गणित

अनौपचारिक प्रौढ विद्यालय तथा खुला शिक्षा

आधारभूत तह (कक्षा ६, ७ र ८) का सिकारुहरुका लागि

स्वाध्ययन सामग्री

गणित

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

अनौपचारिक प्रौढ विद्यालय तथा खुला शिक्षा

आधारभूत तह (कक्षा ६,७ र ८) का सिकारुहरूका लागि

स्वाध्ययन सामग्री

गणित

लेखक

नरहरि आचार्य

कृष्णबहादुर बिष्ट

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

२०७७

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

पहिलो संस्करण : वि.सं. २०७७

भूमिका

विभिन्न कारणले उपयुक्त उमेरमा विद्यालयमा भर्ना भई औपचारिक शिक्षा हासिल गर्न नपाएका १५ वर्षदेखि माथिको उमेर समूहका सिकारुहरूलाई लक्षित गरी सिकारुहरूकै अनुकुल समयमा वैकल्पिक माध्यमबाट शिक्षा प्रदान गर्ने अभिप्रायले अनौपचारिक प्रौढ विद्यालय सञ्चालनमा ल्याइएको छ । सिकारुहरूको सिकाइ क्षेत्रलाई केन्द्रबिन्दुमा राखी उनीहरूको क्षमता अभिवृद्धिमा सहयोग पुग्नेगरी पाठ्यक्रम विकास केन्द्रबाट विकास हुने पाठ्यपुस्तकहरूको सहयोगी वैकल्पिक सामग्रीको रूपमा अझ सरलीकृत हुनेगरी अनौपचारिक प्रौढ विद्यालय तथा खुला शिक्षा आधारभूत तह (कक्षा ६, ७ र ८)का सिकारुहरूका लागि स्वाध्ययन सामग्री विकास गरिएको छ ।

विषयवस्तुहरूलाई प्रौढमैत्री तथा सिकारु केन्द्रित क्रियाकलापमा सहभागी गराएर शिक्षण क्रियाकलाप सञ्चालन गर्नुपर्दछ । शिक्षण सिकाइका क्रममा सहजकर्ताले सिकारुहरूको अनुभवलाई सङ्गठित गर्दै शिक्षण सहजीकरण गर्नुपर्ने हुन्छ । यसैकुरालाई मध्यनजर गर्दै पाठ्यपुस्तकलाई क्रियाकलापमुखी र प्रौढमैत्री बनाउने प्रयास गरिएको छ ।

यस गणित विषयको पुस्तक लेखनकार्य गर्नुहुने लेखकद्वय श्री नरहरि आचार्य र श्री कृष्णबहादुर बिष्टलाई धन्यवाद दिन चाहन्छु । पुस्तक लेखनका क्रममा समय समयमा सल्लाह र सुझाव प्रदान गर्नुहुने यस केन्द्रका उपमहानिर्देशक श्री विष्णुप्रसाद अधिकारी र लेखन कार्यको संयोजन गर्नुहुने पाठ्यक्रम तथा सामग्री शाखाका निर्देशक श्री राजकुमार थापा, शाखा अधिकृत श्री भीमादेवी कोइरालालाई धन्यवाद दिन चाहन्छु ।

यस पुस्तकको विषयवस्तु सम्पादन गर्नुहुने यस केन्द्रका महानिर्देशक डा. तुलसीप्रसाद थपलिया, भाषा सम्पादन गर्नुहुने पाठ्यक्रम विकास केन्द्रका पाठ्यक्रम अधिकृत श्री चिनाकुमारी निरौला, चित्र तथा लेआउट डिजाइन र कभरपेज डिजाइन गर्नुहुने श्री जयराम कुइँकेलप्रति आभार प्रकट गर्दछु । अन्त्यमा यस पुस्तकलाई थप परिमार्जित र परिष्कृत बनाउन सम्बन्धित पाठक तथा सरोकारवालाहरूबाट सदैव रचनात्मक सुझाव तथा प्रतिक्रियाको अपेक्षा समेत गर्दछु ।

डा. तुलसीप्रसाद थपलिया
महानिर्देशक
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

विषयसूची

पाठ १

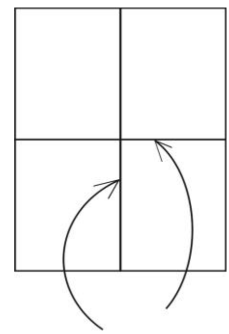
सिधा रेखा र कोणको परिचय

(Introduction of a straight line and angle)

1.0 पुनरावलोकन (Revision)

सिधा रेखा (Straight line)

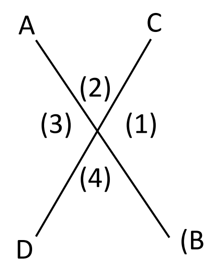
एउटा ज्यामितीय बिन्दु एउटै दिशामा अगाडि अथवा पछाडि बढ्दै जाँदा अथवा एकभन्दा बढी ज्यामितीय बिन्दुहरू एक अर्कालाई छुने गरी एउटै दिशामा पङ्क्तिबद्ध भएमा बन्न जाने ज्यामितीय आकृति अथवा चित्रलाई सिधारेखा भनिन्छ । एउटा सादा कागजलाई बराबर दुई भागमा बाँड्दा हामी त्यसको मध्य भागमा पट्याउछौं । यसरी पट्याएको भागलाई च्यात्नुभन्दा पहिले खोलेर हेर्‍यो भने जुन सोझो आकृति बन्छ त्यसलाई नै सिधारेखा भनिन्छ । सिधारेखाहरूको लम्बाइ अनिश्चित हुन्छ । निश्चित लम्बाइ भएको सिधारेखालाई रेखाखण्ड (line segment) भनिन्छ । रेखाखण्डहरूलाई रेखाहरू मात्र भन्ने चलन पनि छ ।



सिधा रेखाहरू

प्रतिछेदित रेखाखण्डहरू (Intersected line segments)

दुईओटा रेखाखण्डहरूलाई आपसमा लम्ब्याउँदै जाँदा एउटा बिन्दुमा प्रतिच्छेदन (काटिन्छन्) भने त्यस्ता रेखाखण्डहरूलाई प्रतिछेदित रेखाखण्डहरू भनिन्छ । दुईओटा रेखाखण्डहरू आपसमा प्रतिच्छेदन हुँदा (काटिदा) चित्रमा देखाए जस्तै चारओटा कोणहरू बन्दछन् । के तपाईहरूलाई थाहा छ, यी कोणहरूलाई कुन कुन नामले चिनिन्छ ? यिनीहरूको दुई दुईओटाको जोडी बनाएर सम्बोधन गरिन्छ । कोणहरू (1 र 3) तथा (2 र 4) को जोडीलाई शीर्षाभिमुख कोणहरू (Vertically opposite angle) भनिन्छ ।



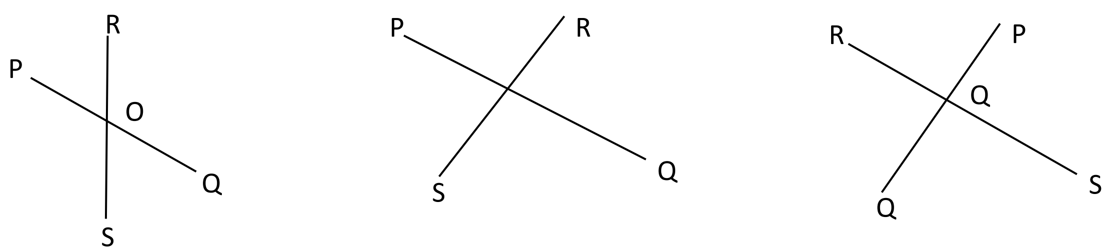
त्यसरी नै कोणहरू (1 र 2), (2 र 3), (3 र 4) र (4 र 1) को जोडीलाई आसन्न कोणहरू (adjacent angles) भनिन्छ ।

1.1 दुईओटा सिधा रेखाखण्डहरू आपसमा काट्दा बन्ने आसन्न कोणहरू र शीर्षभिमुख कोणहरूको सम्बन्धको प्रयोगात्मक परीक्षण (Experimental verification of the verificationsof the adjacent angles and vertically opposite angles)

प्रयोगात्मक परीक्षण 1:

शीर्षभिमुख कोणहरूको सम्बन्धको प्रयोगात्मक परीक्षण विधि: विभिन्न स्थितिमा रहेका सिधा रेखाखण्डहरू PQ र RS चित्रमा देखाए जस्तै बिन्दु 'O' मा प्रतिच्छेदन भएका कम्तीमा तीनओटा चित्रहरू वनाउनुहोस् ।

यसरी तयार भएका कोणहरू ∠POR र∠QOS का मानहरू कोणमापकको सहायताले नाप्नुहोस् र प्राप्त नतिजालाई तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।यसरी तयार भएका कोणहरू ∠POS र ∠ROQ पनि नाप्नुहोस्



<u>तालिका</u>

चित्र नं.	∠POR	∠QOS	∠POS	∠ROQ	परिमाण
1.					
2.					
3.					

उपर्युक्त तालिकाबाट परिमाणको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

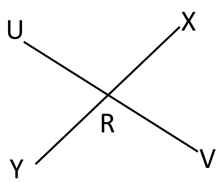
थाहा पाउनुपर्ने तथ्य: *दुई ओटा सिधारेखाहरू आपसमा काटिदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।*

प्रयोगात्मक परीक्षणबाट

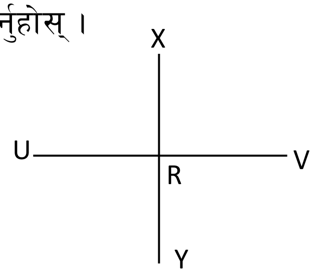
आसन्न कोणहरूको योगफल सम्बन्धी प्रयोगात्मक परीक्षण

(Experimental Verification of the sum of adjacent angles)

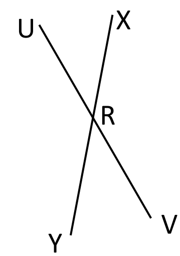
विधि : फरक फरक अवस्थामा रहेका दुईओटा रेखाखण्डहरू UV र XY बिन्दु R मा प्रतिच्छेदित हुने गरी कम्तीमा तीन जोडी रेखाहरू तान्नुहोस । यसरी बन्न जाने कोणहरू ∠URX र ∠VRX को मानहरू कोणमापकको मदतले नापेर दुवैलाई जोड्नुहोस् र तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।



चित्र (1)



चित्र (1)



चित्र (1)

तालिका:

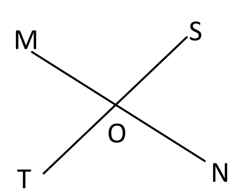
चित्र नं.	∠URX	∠VRX	∠URX +∠VRX	परिणाम
1				
2				
3				

माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्षलाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

> **थाहा पाउनुपर्ने तथ्य** : “दुईओटा सिधा रेखाहरू आपसमा काटिदा बन्ने आसन्न कोणहरूको योगफल 180°

उदाहरण 1:

तल दिएको चित्रमा ∠MOS को आसन्न कोण र शीर्षाभिमुख कोणको नाम लेख्नुहोस् ।

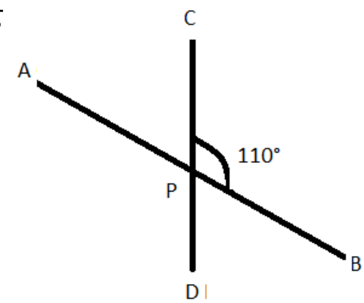


समाधान

चित्रमा दिएअनुसार सिधा रेखा MN र ST बिन्दु O मा प्रतिच्छेदित छन् अत: $\angle MOS$ का आसन्न कोणहरू $\angle SON$ र $\angle MOT$ हुन् र यसको शीर्षाभिमुख कोण $\angle TON$ हो ।

उदाहरण 2 :

तल दिएको चित्रमा $\angle APC$, $\angle APD$ र $\angle DPB$ का मानह



समाधान

सिधारेखाहरू AB र CD बिन्दु P मा काटिएका छन् ।

अत: $\angle APC + \angle CPB = 180°$ (आसन्न कोणहरू)

or $\angle APC = 180° - \angle CPB$

$= 180° - 110°$

$\therefore \angle APC = 70°$

त्यसरी नै $\angle CPB = \angle APD = 110°$ (शीर्षभिमुख कोणहरू)

or, $\angle APC = 180° - \angle CPB$

$= 80° - 110°$

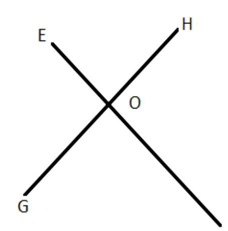
$\therefore \angle APC = 70°$

फेरि $\angle APC = \angle DPB = 70°$ (शीर्षाभिमुख कोणहरू)

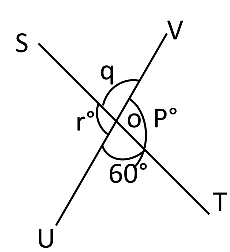
$\therefore \angle APC = 70°$

अभ्यास

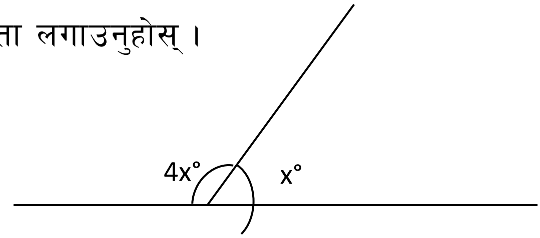
1. दिएको चित्रमा सम्भावित सवै शीर्षाभिमुख कोणहरूको र आसन्न कोणहरूको जोडी लेख्नुहोस् ।



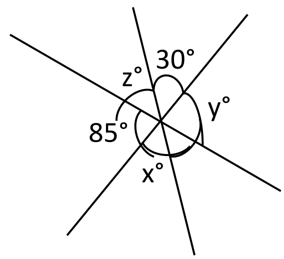
2. तल दिएको चित्रमा p°, q° र r° को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।



3. तल दिएको चित्रमा x° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



4. तल दिएको चित्रमा x°, y° र z°



उत्तरहरू :

1. शीर्षाभिमुख कोणहरूको जोडीः

   (i) ∠EOH र ∠GOF

   (ii) ∠EOG र ∠HOF

   आसन्न कोणहरूको जोडीः (i) ∠EOH र ∠EOG

   (ii) ∠EOG र ∠GOF

   (iii) ∠GOF र ∠FOH

   (iv) ∠FOH र ∠HOE

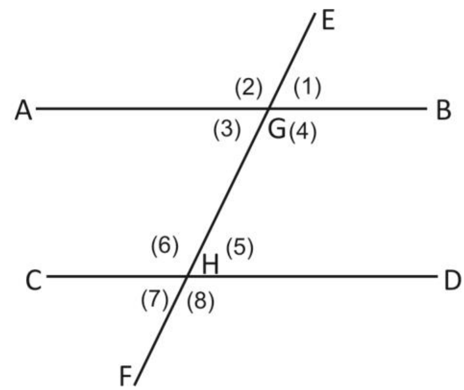
2. p°=120°, q°=60°, r°= 120°

3. x°=36°

4. x°=30, y°=65°, z°= 65°

1.2 दुईओटा सिधा रेखाहरूलाई तेस्रो सिधारेखा (छेदक) ले काट्दा बन्ने कोणहरू (Angles formed by intersecting two straight lines by the third straight-line (transversal)

दुईओटा सिधा रेखाहरूलाई भिन्न भिन्न बिन्दुहरूमा छेदन गर्ने (काट्ने) तेस्रो सिधारेखालाई छेदक रेखा (Transversal) भनिन्छ ।



सँगैको चित्रमा सिधा रेखाहरू AB र CD लाई छेदक EF ले बिन्दुहरू G र H मा काटेको छ । यसरी काट्दा जम्मा आठओटा कोणहरू बन्दछन् । चित्रमा देखाएका कोणहरू 1, 2, 7 र 8 लाई बाहिरी कोणहरू र 3, 4, 5 र 6 लाई भित्री कोणहरू भनिन्छ । त्यसरी नै कोणहरू 3 र 5 लाई र 4 र 6 एकान्तर कोणहरू भनिन्छ । त्यसरी नै कोणहरू 3 र 6 र 4 र 5 लाई क्रमागत भित्री कोणहरू भनिन्छ । एवम् रूपले, कोणहरू 1 र 5 लाई, 2 र 6लाई, 3 र 7 र 4 र 8 लाई सङ्गत कोणहरू भनिन्छ । यी सबै कोणहरूलाई निम्नअनुसार परिभाषित गरिन्छ ।

क) **बाह्य कोणहरू (Exterior angles):** दुईओटा सिधा रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा दुवै सिधारेखाको बाहिर पट्टि पर्ने कोणहरूलाई बाह्य कोण या बाहिरी कोणहरू (Exterior angles) भनिन्छ ।

ख) **भित्री वा आन्तरिक कोणहरू (Interior Angles)** : दुईओटा सिधारेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा दुवै सिधारेखाहरूको भित्र पर्ने र छेदकको दुवैतिरका कोणहरूलाई भित्री या आन्तरिक कोणहरू (Interior angles) भनिन्छ ।

ग) **क्रमागत भित्री कोणहरू (Conscutive interior angles):** दुईओटा सिधारेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर परेका एक जोडी भित्री कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोणहरू (Conscutive interior angles or co-interior angles) भनिन्छ ।

घ) **एकान्तर कोणहरू (alternate interior angles):** दुईओटा सिधारेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा छेदकको दुवैतिर पर्ने अनासन्न भित्री कोणहरूलाई एकान्तर कोणहरू (Alternate interior angles) भनिन्छ ।

ङ) **सङ्गत कोणहरू (Corresponding angles):** दुईओटा सिधारेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटदा छेदकको एकैतिर परेका एउटा बाहिरी एउटा भित्री अनासन्न कोणहरूलाई सङ्गत कोणहरू (corresponding angles) भनिन्छ ।

उदाहरणः दिएको चित्रमा निम्न लिखित कोणहरूको सूची तयार पार्नुहोस् ।

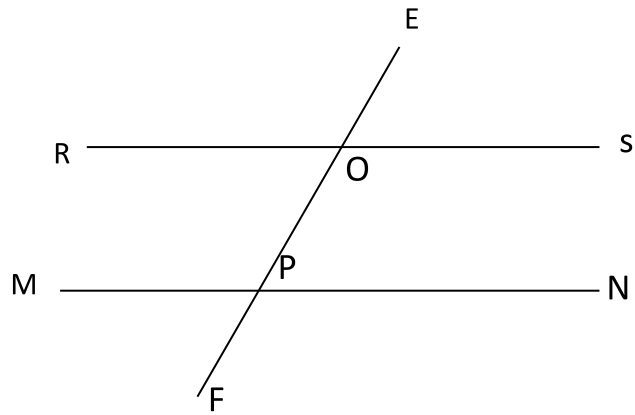
क) भित्रीकोणहरू

ख) बाहिरी कोणहरू

ग) सङ्गत कोणहरू

घ) एकान्तर कोणहरू

ङ) क्रमागत भित्री कोणहरू



समाधान

(क) भित्री कोणहरू : ∠ROP, ∠SOP, ∠MPO र ∠NPO

(ख) बाहिरी कोणहरू : ∠EOR, ∠EOS, ∠MPF र∠NPF

(ग) सङ्गत कोणहरू : ∠EOS र ∠OPN, ∠FPN र ∠POS, ∠EOR र ∠OPM, ∠FPM र ∠POR सङ्गत कोणहरूको जोडी हुन् ।

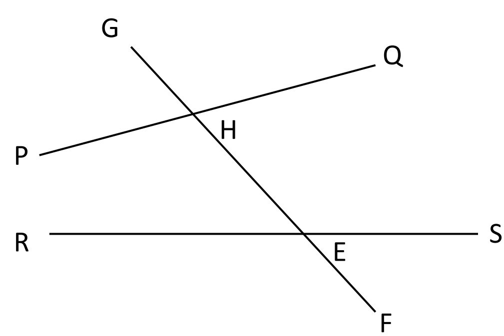
(घ) एकान्तर कोणहरू : (∠ROP र ∠OPN) र (∠SOP र ∠OPM)

(ङ) क्रमागत भित्रीकोणहरूः (∠SOP र ∠NPO) / (∠ROP र ∠MPO)

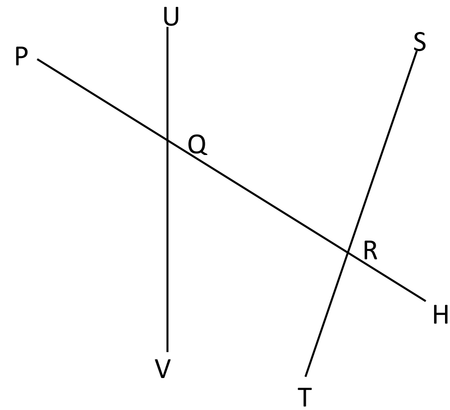
अभ्यास

1. दिएका चित्रबाट निम्नलिखित कोणहरूका सङ्गत कोणहरू, एकान्तर कोणहरू, क्रमागत भित्री कोणहरूका नामहरू लेख्नुहोस् ।

क) ∠PHE ख) ∠QHE



2. दिएका चित्रमा बाहिरी, भित्री, एकान्तर, सङ्गत र क्रमागत कोणहरूको सूची तयार पार्नुहोस् ।



उत्तरहरू:

1. ∠PHE को : सङ्गत कोण ∠REF

   एकान्तर कोण ∠HES र क्रमागत भित्री कोण ∠REH को ∠QHE को सङ्गत कोण ∠SEF, एकान्तर कोण ∠HER र क्रमागत भित्री कोण ∠HES

2. बाहिरी कोणहरू : ∠PQU, ∠PQV, ∠SRH र ∠HRT

   भित्री कोणहरू: ∠UQR, ∠RQV, ∠QRS र ∠QRT

   सङ्गत कोणहरू: ∠PQU र ∠QRS, ∠SRH र ∠UQR,

   ∠PQV र ∠QRT र ∠HRT र ∠RQV

   एकान्तर कोणहरू: ∠UQR र ∠QRT, ∠SRQ र ∠RQV

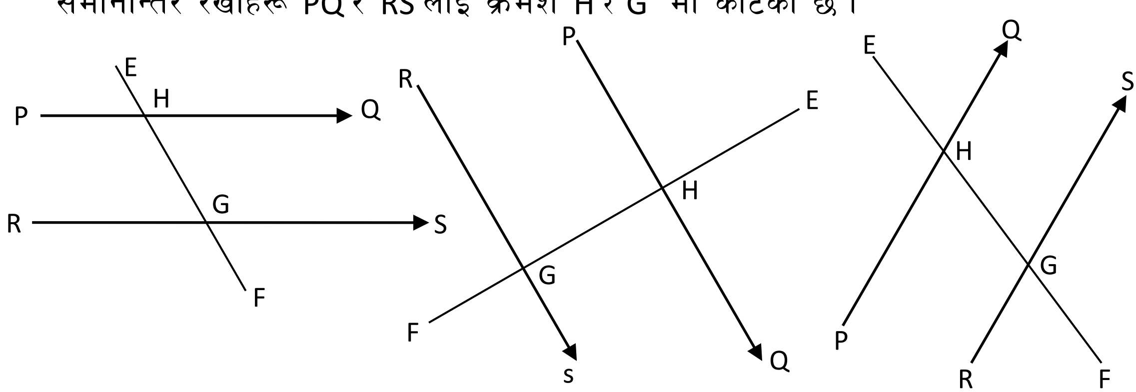
   क्रमागत भित्री कोणहरू: ∠UQR र ∠SRQ

   ∠VQR र ∠QRT

1.3 दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने कोणहरूको आपसी सम्बन्ध सम्बन्धी प्रयोगात्मक परीक्षण (Experimental Verification of the angles made by intersecting two parallel lines by a transversal)

परीक्षण 1 : सङ्गत कोणहरूको सम्बन्धको परीक्षण

विधिः दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै एउटा छेदकले काटेका फरक फरक स्थितिमा तीन ओटा चित्रहरू तयार पार्नुहोस् । दिएको चित्रमा रेखा EF ले समानान्तर रेखाहरू PQ र RS लाई क्रमश H र G मा काटेको छ ।



अब यसरी बन्ने सङ्गत कोणहरूको जोडीहरू ∠PHE र ∠RGH ∠EHQ र∠HQS, ∠RGF र ∠PHG तथा ∠GHQ र∠FGS का मानहरू कोणमापकको मदतले नापेर दिएको तालिका भर्नुहोस् ।

चित्र नं.	∠PHE	∠RGH	∠EHQ	∠HGS	∠RGF	∠PHG	∠FGS	∠GHQ	परिणाम
1									
2									
3									

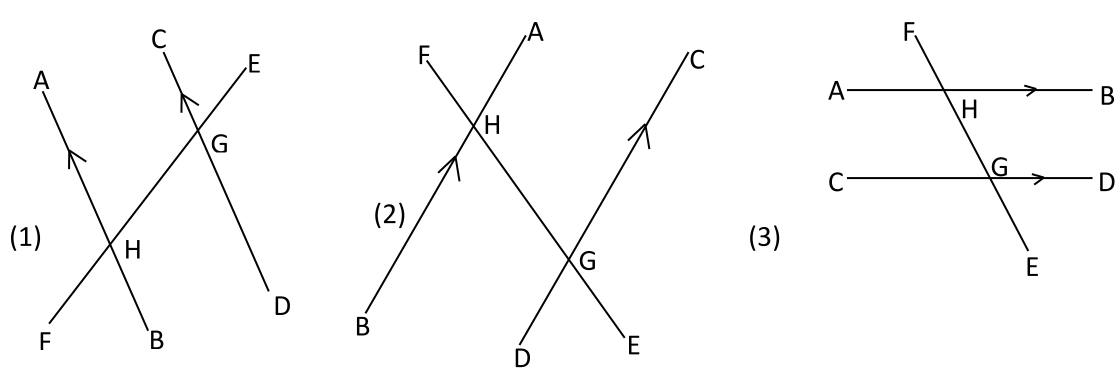
माथिको तालिकाबाट प्राप्त नतिजाको आधारमा उपर्युक्त सङ्गत कोणहरूका जोडीहरूका मानहरू कस्ता छन् ? आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्न जाने सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।*

परीक्षण 2 :

दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्न जाने क्रमागत भित्री कोणहरूको सम्बन्धको परीक्षण

विधि: फरक फरक स्थितिमा रहेका दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटेको कम्तीमा तीन ओटा चित्रहरूको रचना गर्ने । दिएको तीन ओटा चित्रहरूको रचना गर्ने । दिएको चित्रमा समानान्तर रेखाहरू AB र CD लाई छेदक EF ले बिन्दु G र H मा काटेको छ ।



यसरी तयार भएका क्रमागत भित्री कोणहरू जोडीहरू ∠AHG र ∠CGH र ∠BHG र ∠DGH लाई कोणमापकको मदतले नापेर दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	∠AHG	∠CGH	∠DGH	∠DGH	परिमाण
1					
2					
3					

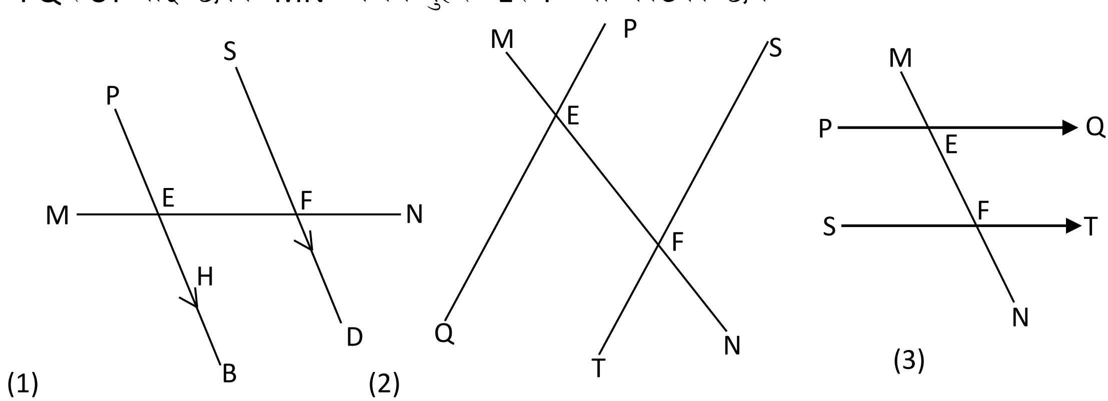
उपर्युक्त तालिकाको परिणामको अध्ययन गरी सोको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्न जाने क्रमागत भित्री कोणहरू बराबर हन्छन् ।

परीक्षण 3:

दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्न जाने एकान्तर कोणहरूको सम्बन्धको परीक्षण

विधि: फरक फरक अवस्थामा रहेका दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटेका कम्तीमा तीनओटा चित्रहरू रचना गर्ने । दिएको चित्रमा समानान्तर रेखाहरू PQ र ST लाई छेदक MN ले बिन्दुहरू ER F मा काटेको छ ।



यसरी बनेका एकान्तर कोणहरूका जोडीहरू ∠PEF र ∠TFE र ∠SFE र ∠FEQ लाई नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र नं.	∠PEF	∠TFE	∠SFE	∠FEQ	परिणाम
1					
2					
3					

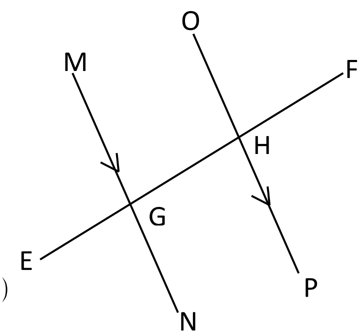
माथिको तालिका अध्ययन गरेर प्राप्त निष्कर्षलाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।*

उदाहरण 1

दिएका चित्रमा समानान्तर रेखाहरू MN र OP लाई छेदक EF ले बिन्दु G र H मा काटेको छ । यदि $\angle EGN = 60°$ भए $\angle GHP$, $\angle HGN$ र $\angle MGH$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



$\angle GHP = \angle EGN$ (सङ्गत कोणहरू)

$= 60°$

फेरि $\angle MGH = \angle GHP$ (एकान्तर कोणहरू)

$= 60°$

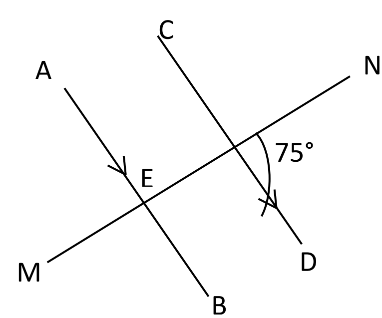
अन्तमा $\angle HGN = 180° - \angle EGN$ (आसन्न कोणहरू)

$= 180° - 60° = 120°$

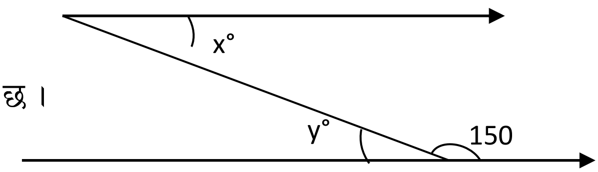
$\therefore \angle GHP = 60° = \angle MGH$ र $\angle HGN = 120°$ Ans

अभ्यास

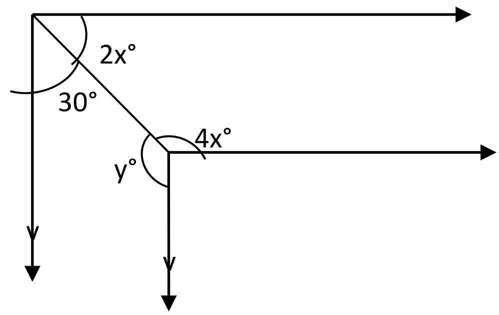
1. दिएको चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD लाई MN छेदकले बिन्दुहरू E र F मा काटेको छ । यदि $\angle NFD = 75°$ भए बाँकी सबै 7 ओटा कोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



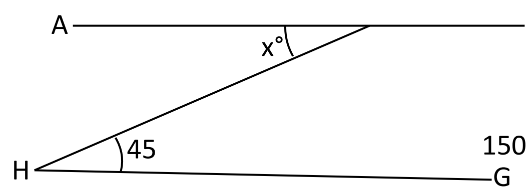
2. दिएको चित्रमा दुईओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काटेको छ। अब x° र y° को मान निकाल्नुहोस्।



3. दिएको चित्रमा x° र y° मान पत्ता लगाउनुहोस्।



4. दिएको चित्रमा x° को मान कति भयो भने रेखाहरू AB र HG समानान्तर हुन्छन्? पत्तालगाउनुहोस्



उत्तरहरू :

1. ∠CFF = 75°, ∠FEB = 75°, ∠EFD = 105°, ∠FEA = 105°
   ∠CFN = 105°, ∠BFM = 105° र ∠AEM = 75°
2. x°=30°, 3. x°=30° र y°=150°, 4. x°=45° हुनुपर्छ।

पाठ २ : त्रिभुज, चतुर्भज र बुहभुजहरू

(Triangle, Quadrilateral and Polygons)

2.0 पुनरावलोकन (Revision)

तपाईँहरूलाई थाहा छ, त्रिभुज भनेको के हो ? भुजा र कोणको आधारमा त्रिभुजलाई कति प्रकारले वर्गीकरण गरिएको छ ? आपसमा छलफल गर्नुहोस् ।

त्रिभुज (Triangle): तीनओटा रेखाखण्डहरूबाट बनेको समतलीय बन्द आकृतिलाई त्रिभुज (Triangle) भनिन्छ । त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू भनिन्छ । त्रिभुज बनाउने सीधा रेखाखण्डहरूलाई यसका भुजाहरू भनिन्छ । भुजाहरू जोडिएका बिन्दुहरूलाई त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू भनिन्छ । शीर्षबिन्दुहरूमा बन्ने भित्री कोणहरूलाई त्रिभुजका कोणहरू भनिन्छ । भुजाको आधारमा निम्न प्रकारका त्रिभुजहरू छन्:

(क) **समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle):** जसमा सबै भुजाहर बराबर हुन्छन् ।

(ख) **समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle):** जसमा दुईओटा भुजाहरू बराबर हुन्छन् र

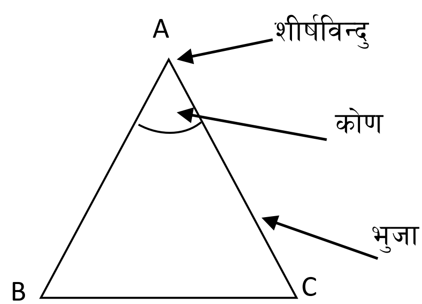
(ग) **विषमवाहु त्रिभुज (Scalene triangel):** जसमा भुजाहरू बराबर हुँदैनन् ।

कोणहरूको आधारमा पनि तीन किसिमका त्रिभुजहरू छन् :

(क) **न्यूनकोण त्रिभुज (Acute angled triangle):** जसमा सबै कोणहरू 90° भन्दा कम हुन्छन् ।

(ख) **समकोण त्रिभुज (Right angled triangle):** जसमा एउटा कोण 90° हुन्छ ।

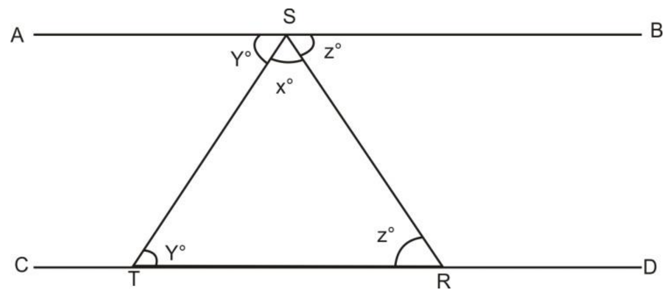
(ग) **अधिक कोण त्रिभुज (Obtuse angled triangle):** जसमा एउटा कोण 90° भन्दा बढी हुन्छ ।



त्रिभुजका विभिन्न गुणहरूको परीक्षण

(Verification of different properties of triangle)

त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल सम्बीन्ध क्रियाकलाप

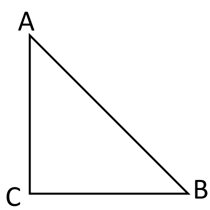


दुईओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD भित्रपर्ने गरी चित्रमा देखाए जस्तै रेखा AB मा शीर्ष बिन्दु र रेखा CD मा आधार पर्ने गरी एउटा त्रिभुज STR को रचना गरौँ । यसका भित्री कोणहरूको नाप $x°$, $y°$ र $z°$ मानौँ । अब दुईओटा समानान्तर रेखाहरू AB र CD लाई छेदक ST र SR ले काट्दा बन्ने एकान्तर कोणहरू $\angle AST=\angle STR=y°$ र $\angle BSR=\angle SRT=z°$ हुन्छन् । चित्रमा प्रष्ट देखिए जस्तै $x°+y°+z°=$ सिधा कोण $\angle ASB$ हुन्छ । तर हामीलाई थाहा छ कि सिधा कोणको मान 180° हुन्छ । यस बाट प्रष्ट हुन्छ कि त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल =180° हुन्छ ।

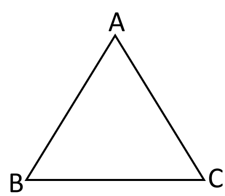
परीक्षण 1: त्रिभुजका भित्रीकोणहरूको योगफलको प्रयोगात्मक परीक्षण

विधिः फरक फरक नापका भुजाहरू र कोणहरू भएका कम्तीमा तीनओटा त्रिभुजहरू ABC को रचना गर्नुहोस् ।

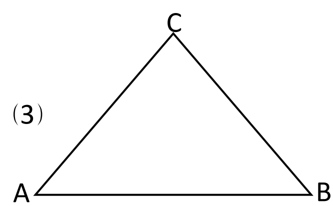
चित्र (1)



चित्र (2)



चित्र (3)



यसरी बनेका त्रिभुजहरूका भित्री कोणहरू $\angle CAB$, $\angle ABC$ र $\angle BCA$ लाई कोणमापकको मदतले नापेर तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

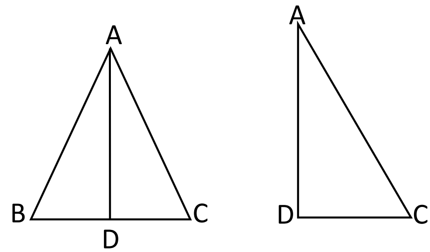
चित्र नं.	$\angle CAB$	$\angle ABC$	$\angle BCA$	परिणाम
1				
2				
3				

माथिको तालिकाको अध्ययन गरेर प्राप्त नतिजाको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *त्रिभुजका भित्रि कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।*

परीक्षण 2: समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्धको

खोजी : एउटा समद्विबाहु



त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् जसमा AB = AC छ । अब शीर्षबिन्दु A र आधार BC को

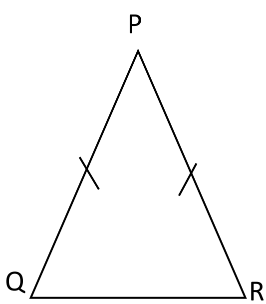
मध्यबिन्दु D लाई जोड्नुहोस् । अब त्रिभुज ABC लाई मध्यरेखा AD मा पर्ने गरी

पट्याउँदा त्रिभुज AD B रADC का शीर्ष बिन्दुहरू B र C चित्रमा देखाए जस्तै

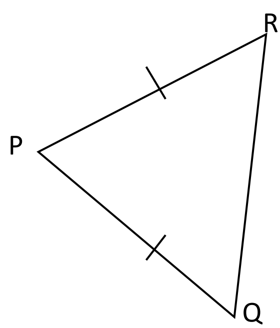
पूर्णरूपमा खप्टिन्छन् । यसरी नै रेखा AB र AC तथा रेखा BD र DC पनि पूर्ण

रूपमा खप्टिन्छन् । यस क्रियाकलापबाट प्रष्ट हुन्छ कि समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

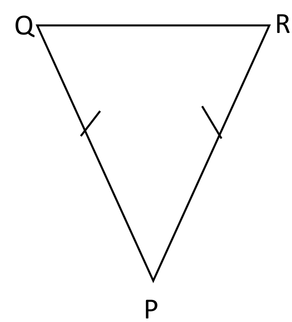
प्रयोगात्मक परीक्षण: फरक फरक आधार भुजा र बराबर भुजाहरू भएका कम्तीमा तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू PQR खिच्नुहोस् ।



चित्र (1)



चित्र (2)



चित्र (3)

यसरी तयार भएका त्रिभुजहरू PQR मा आधारका कोणहरू ∠PQR र ∠PRQ लाई कोणमापकको मदतले नापी तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

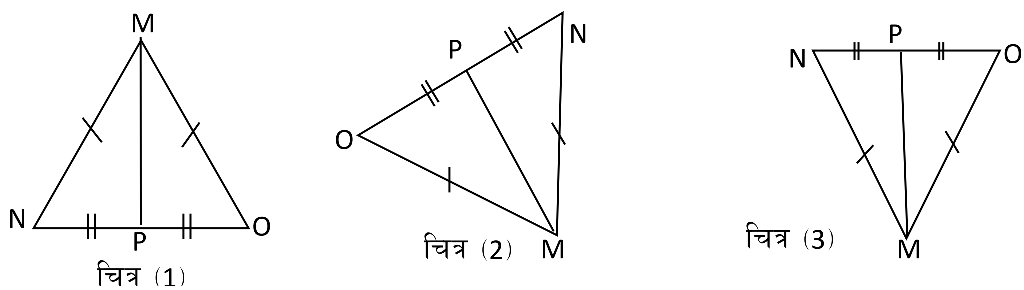
चित्र नं.	∠PQR	∠PRQ	परिणाम
1			
2			
3			

माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्ष आफ्नो कपिमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।*

परीक्षण 3: समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षबिन्दुलाई आधारको मध्यबिन्दुसँग जोड्ने मध्यरेखा र आधारको सम्बन्धको प्रयोगात्मक परीक्षण

विधि : फरक फरक आधार र बराबर दुईभुजा भएका कम्तीमा तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू MNO खिच्नुहोस् । जहाँ MN = MO छन् । अब शीर्षबिन्दु M लाई आधारको मध्यबिन्दु P सम्म जोड्नुहोस् ।



अब कोणमापकको मदतले ∠MPN र ∠MPO लाई नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

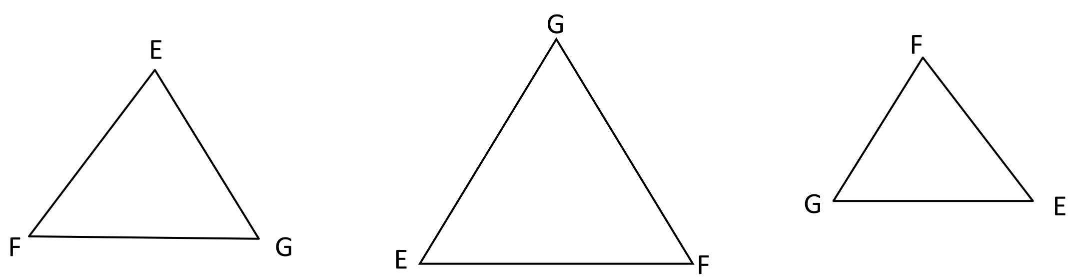
चित्र नं.	∠MPN	∠MPO	परिणाम
1			
2			
3			

माथिको तालिकाबाट प्राप्त निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् । दुवै आसन्न कोणहरू 90° हुँदा त्यस्ता रेखाहरूको समबन्ध के हुन्छ ?

निष्कर्ष : *समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षविन्दुलाई आधारको मध्यबिन्दु सम्म जोड्ने रेखा आधारसँग लम्ब हुन्छ ।*

परीक्षण 4: समबाहु त्रिभुजका कोणहरूको सम्बन्धको प्रयोगात्मक परीक्षण

विधि: फरक फरक भुजाहरूका लम्बाइ भएका कम्तीमा तीनओटा समबाहु त्रिभुजहरूको रचना गर्नहोस् । तिनीहरूको नाम EFG राख्नुहोस् ।



अब प्रत्येक त्रिभुजमा

∠EFG, ∠FGE र ∠GEF लाई कोणमापकको मदतले नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

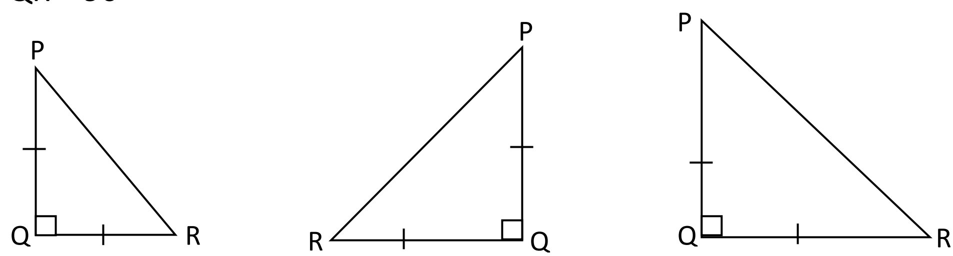
चित्र नं.	∠EFG	∠FGE	∠GEF	परिणाम
1				
2				
3				

उपर्युक्त तालिकाबाट प्राप्त नतिजाको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *समबाहु त्रिभुजको सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् । साथै प्रत्येक कोणको मान 60° हुन्छ ।*

परीक्षण 5: समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको सम्बन्धको प्रयोगात्मक परीक्षण

विधि : एउटा कोण 90° भएका र दुईओटा भुजा बराबर भएका फरक फरक नापका तीनओटा समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजहरू PQR को रचना गर्नुहोस् । जहाँ PQ=QR र PQR = 90°



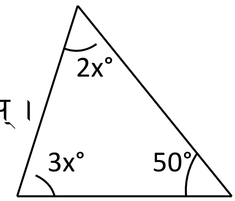
यसरी बनेका त्रिभुजहरूका ∠QPR र ∠QRP लाइ कोणमापकको मदतले नापेर तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र नं.	∠QPR	∠QRP	परिणाम
1			
2			
3			

उपर्युक्त तालिकाबाट प्राप्त नतिजाको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारको कोणहरू बराबर हुन्छन् र प्रत्येक कोण 45°.*

उदाहरण 1



दिएको चित्रमा त्रिभुजका बाँकी कोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ, $2x°+3x°+50°=180°$

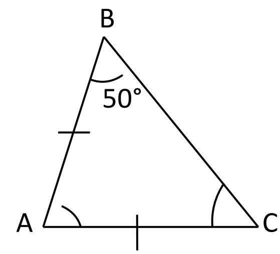
or, $5x° = 180°-50°=130°$

or, $x°= \frac{130°}{5} = 26°$

अत: $2x° = 2x26° = 52°$

र $3x° = 3x26° = 78°$ Ans

उदाहरण 2



दिएको त्रिभुजको $\angle BAC$ को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको चित्रमा AB = AC छ । अत: $\angle ABC = \angle ACB$ (समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू) $= 50°$

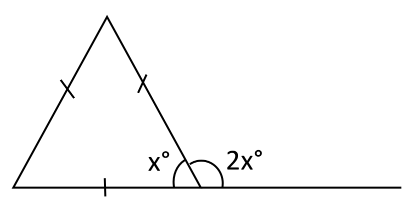
फेरि $\angle A+\angle B+\angle C= 180°$

or, $\angle A= 180°-\angle B-\angle C$

$= 180°-50°-50°=80°$

$\therefore \angle BAC = 80°$ Ans

उदाहरण 3



दिएको त्रिभुजका बाँकी कोणहरू निकाल्नुहोस् ।

समधान

हामीलाई थाहा छ,

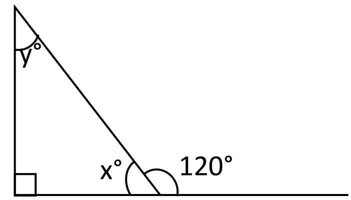
$x°+2x°= 180°$ (आसन्न कोणको योग)

or, $3x° = 180°$

or, $x°= 60°$ Ans

किनकि दिएको त्रिभुज समबाहु छ, अत: यसको प्रत्येक कोण . $60°$ हुन्छ ।

उदाहरण 4



दिएको चित्रमा x° र y° को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ,

$x° + 120° = 180°$ (आसन्न कोणहरूको योगफल)

or, $x° = 180° - 120° = 60°$

फेरी, $90° + 60° + y° = 180°$ (त्रिभुजको कोणहरूको योगफल)

or, $y° = 180° - 90° - 60°$

$= 90° - 60° = 30°$

$\therefore y° = 30°$ र $x° = 60°$ Ans

अभ्यास

1. तल दिएका ज्यामितीय तथ्यहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण गनुहोस् ।

   क) समकोणी त्रिभुजमा समकोणको सामनेको भुजा सबै भन्दा लामो हुन्छ ।

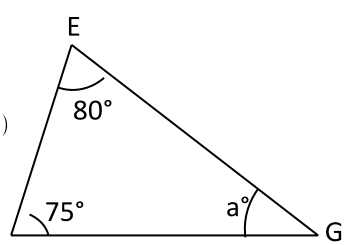
   ख) समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षबिन्दुलाई आधारको मध्यबिन्दु सम्म जोड्ने मध्यकले शीर्षकोणलाई आधा गर्दछ । (दुई बराबर भागमा बाड्दछ)

   ग) एउटा त्रिभुजमा लामो भुजाको साम्नेको कोण छोटो भुजाको सामनेको कोण भन्दा ठुलो हुन्छ ।

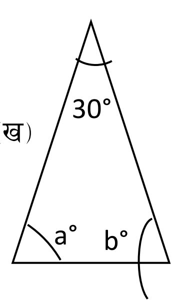
   घ) कुनै पनि त्रिभुजमा दुईओटा भुजाहरूको लम्बाइको योगफल तेस्रो भुजा भन्दा ठुलो हुन्छ ।

2. तल दिएका त्रिभुजहरूमा a°, b° र c° मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

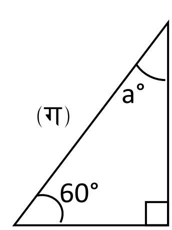
(क)



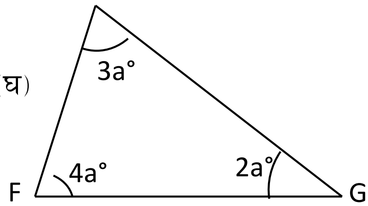
(ख)



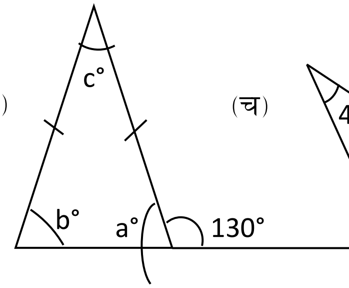
(ग)



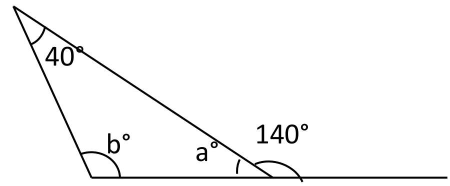
(घ)



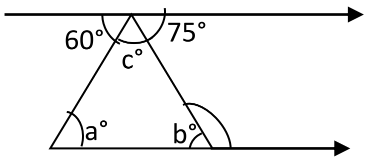
(ङ)



(च)



(छ)



उत्तरहरू :

1: (क), (ख), (ग) र (घ) (शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।)

2. क) a°= 25° ख) a°=b°=60° ग) a°=30° घ) a°=20°

ङ) a°=b°=50° र c= 80° च) a°= 40 र b°= 100° छ) a°= 120°

b°= 60° र c° = 60° ज) b°= 110° र a°= 50° (झ) a°=b°=c°=60°

ञ) a°= b°=45° र c°=135° ट) a°=60°, b°=75° र c°=45°

2.2 नियमित बहुभुजको रचना (Construction of Regular Polygons)

नियमित बहुभुज (Regular Polygon): यदि कुनै बहुभुजका सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् भने त्यस्तो बहुभुजलाई नियमित बहुभुज भनिन्छ । n ओटा भुजा भएको नियमित बहुभुजको आन्तरिक कोणको नाप $\frac{n-2}{n}$x 180° हुन्छ ।

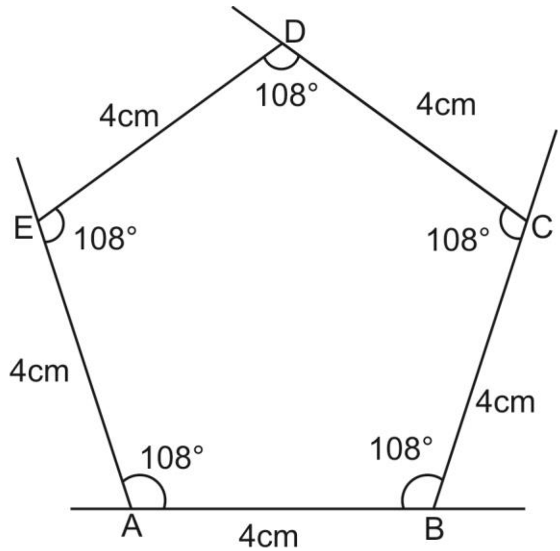
(क) नियमित पञ्चभुजको रचना (Construction of regular Pentagon)

भुजाको लम्बाइ 4cm भएको नियमित पञ्चभुजको रचना गर्न ।

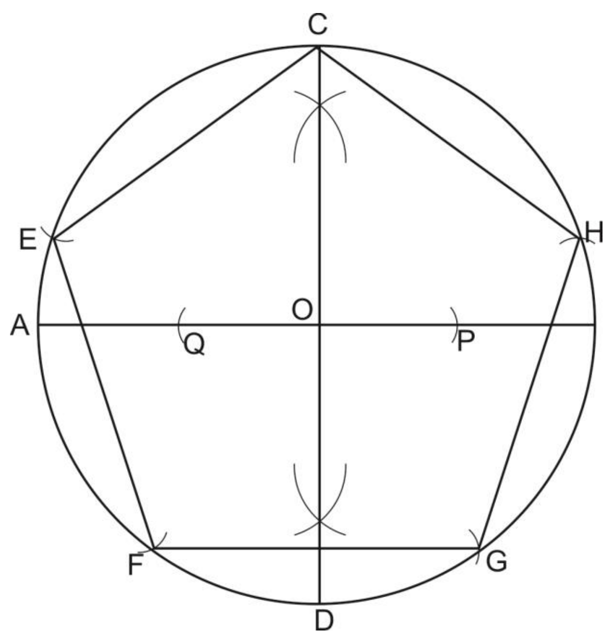
नियमित पञ्चभुजको आन्तरिक कोण $= \frac{n-2}{n} \times 180°$

$= \frac{5-2}{5} \times 180° = 108°$

विधि : कुनै आधार रेखा खिचेर त्यसमा चार से.मी. (4cm) लम्बाइको रेखाखण्ड AB खिच्ने । त्यसपछि बिन्दु A र B मा 108° कोण कोणमापकको मदतले खिच्ने यसरी खिचेको कोणहरूलाई 4cm का रेखाखण्डहरूले जोड्ने र तिनीहरूको नाम चित्रमा देखाए जस्तै E र C राख्ने । अन्तमा बिन्दु E र C मा फेरि कोणमापकको मदतले 108° का कोणहरू खिच्ने र ती कोणहरूलाई जोड्ने रेखाखण्डहरू बिन्दु D मा भेट्ने गरी मापकको मदतले जोड्ने । यसरी 4cm भुजा भएको पञ्चभुजको रचना हुन्छ ।



दोस्रो तरिका एउटा वृत्त भित्र नियमित पञ्चभुजको रचना गर्ने तरिका



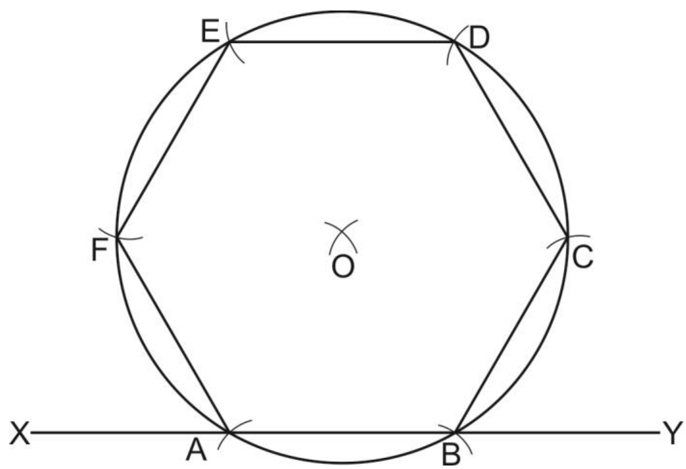
1. कुनै पनि नापको व्यास भएको एउटा वृत्त खिच्ने । जस्तै चित्रमा व्यास AB=8cm भएको वृत्त खिचिएको छ । यसको केन्द्र बिन्दुलाई O मानौँ ।
2. अब AB को लम्बार्धक खिचौं र वृत्तको परिधिमा काटेको बिन्दुलाई C र D मानौँ ।
3. यसपछि OB को लम्बार्धक खिची मध्ये बिन्दुलाई P लिऔँ ।
4. अबPC बराबरको चाप लिएर बिन्दु Q मा चिह्न लगाऔं ।
5. त्यसपछि CQ बराबरको चाप नापेर C बाट वृत्तको परिधिमा बिन्दु E मा चिह्नो लगाउन'होस् ।

6. यसरी नै वृत्तको परिधिमा CE बराबरका चापहरू क्रमशः EF, FG, GH र HC काटौँ । सबै बिन्दुहरू C, E, F, G, H र C क्रमशः जोडौँ यसरी नियमित पञ्चभुज EFGHC तयार हुन्छ ।

(ख) नियमित षट्भुजको रचना (Construction of regular hexagon)

विधि : एउटा भुजाको लम्बाइ 3cm भएको नियमित षट्भुजको रचना तल अनुसार गरिन्छ ।

1. सर्वप्रथम एउटा आधार रेखा XY मा कुनै बिन्दु A मा चिनो लगाउनुहोस् । त्यसपछि AB=3cm नापेर मापकको सहायताले रेखाखण्ड AB काट्नुहोस् । अब बिन्दु A र B बाट AB बराबरको चापहरू काट्ने र काटिएको बिन्दुलाई O नाम दिनुहोस् ।
2. अब OA बराबरको रेडियस (अर्धव्यास) भएको र केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्त खिच्नुहोस् ।

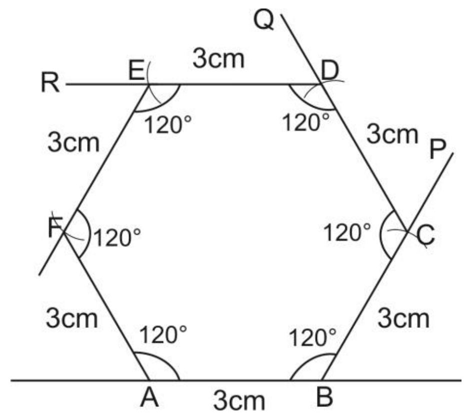


3. यसरी बनेको वृत्तमा बिन्दु B बाट AB बराबरका चापहरू परिधिका बिन्दुहरू C,D, E र F मा क्रमशः काट्नुहोस् ।
4. यसरी चिह्न लगाएका बिन्दुहरू, B, C, D, E, F र A लाई क्रमशः जोड्नुहोस् । यसरी नियमित षट्भुज ABCDE को रचना हुन्छ ।

अर्को तरिका :

सर्वप्रथम नियमित षट्भुजको आन्तरिक कोण = $\frac{n-2}{n}$ x 180° = 4 x 30 = 120° पत्ता लगाउनुहोस् ।

1. आधार रेखा XY मा AB = 3cm हुने गरी कोणमापकको मदतले नाप्नुहोस् ।

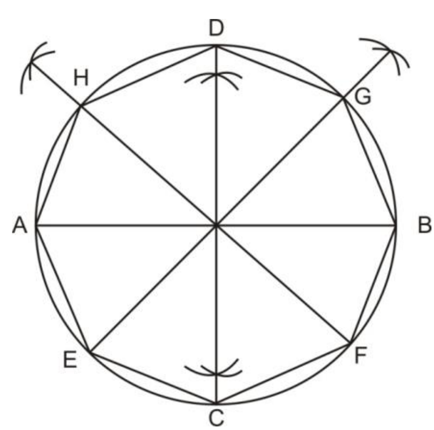


2. बिन्दु B मा कोणमापकको सहायताले 120° को कोण ∠ABP खिच्चुहोस् ।अब BP मा ABबराबरको 3cm को चाप काटौं ।
3. काटिएको चापलाई C लेखौं ।
4. फेरि बिन्दु C मा 120° कोण BCQ खिचौं र C बाट CQ मा 3cm को चाप काटौं । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाऔं । अन्तमा FR A लाई क्रमश: जोड्नुहोस् । यसरी नियमित षट्भुज ABCDEF को रचना हुन्छ ।
5. फेरि बिन्दु D मा 120° को कोण CDR खिचौं र D बाट DR मा 3cm बराबरको चाप काटौं ।
6. काटिएको चापलाई E ले जनाऔं ।
7. फेरिबिन्दु E मा 120° कोण DES खिचौं र E बाटES मा 3cm को चाप काटौं । काटिएको बिन्दुलाई F ले जनाऔं । अन्तमा F र A लाई जोडौं । यसरी नियमित षट्भुज ABCDE को रचना हुन्छ ।

ग) नियमित अष्टभुजको रचना (Construction of Regular octagon)

6 cm व्यास भएको वृत्त भित्र नियमित अष्टभुजको रचना गरौं ।

विधि:



1. कम्पासको मदतले व्यास AB= 6 cm हुने गरी केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्तको रचना गर्नुहोस् ।
2. AB को लम्बार्धक खिचौं । परिधिमा काटेका बिन्दुलाई C र D मानौं ।
3. यसरी बनेका कोणहरू ∠DOA र ∠DOB का अर्धक खिचौं । अर्धकहरूले काटेका

बिन्दुहरूलाई E, F, G र H नाम राखौँ ।

4. अन्तमा नियमित अष्टभुज AHDGBFCE तयार हुन्छ ।

नोट : नियमित अष्टभुजलाई नियमित षटभुजलाई रचना गरेको दोस्रो तरिकाबाट पनि रचना गर्न सकिन्छ ।

अभ्यास

1. नियमित पञ्चभुजको भित्री कोण पत्ता लगाई निम्न भुजा भएका पञ्चभुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।

   (i) 4cm (ii) 5cm (iii) 6cm

2. नियमित षट्भुजको भित्री कोण पत्ता लगाई निम्न भुजा भएका षटभुजाहरूको रचना गर्नुहोस् ।

   (i) 3cm (ii) 4cm (iii) 5cm

3. भित्री कोण पत्ता लगाई निम्न भुजाहरू भएका नियमित अष्ट भुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।

   (i) 2cm (ii) 3cm (iii) 4cm

4. 3cm अर्धव्यास भएको वृत्त भित्र निम्न नियमित बहुभुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।

   (i) पञ्चभुज (ii) षटभुज (iii) अष्टभुज

   उत्तरहरू : प्रत्येक बहुभुज रचना गरेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

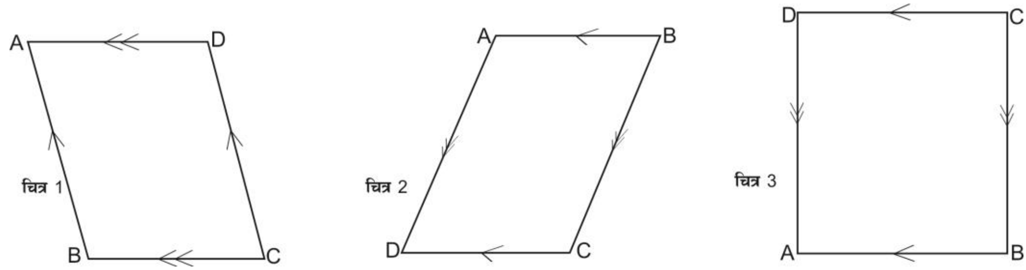
2.3 समानान्तर चर्तुभुज, वर्ग र आयतका विभिन्न गुणहरूको प्रयोगात्मक परीक्षण:

(Experimental Verification of various properties of parallelogram, Square and Rectangle)

(क) समानान्तर चर्तुभुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्ने ।

विधि : फरक फरक आकृति र भुजाहरू भएका कम्तीमा तीनओटा समानान्तर चर्तुभुजहरूको रचना गर्नुहोस् ।

चित्रमा देखाए जस्तै तिनीहरूको नाम ABCD लेख्नुहोस् ।



माथि रचना गरिएका समानान्तर चतुर्भजहरूको सम्मुख कोणहरूलाई कोणमापकको प्रयोग गरी नापेर तल दिएको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र नं	∠BAD	∠DCB	∠ABC	∠ADC	परिणाम
1					
2					
3					

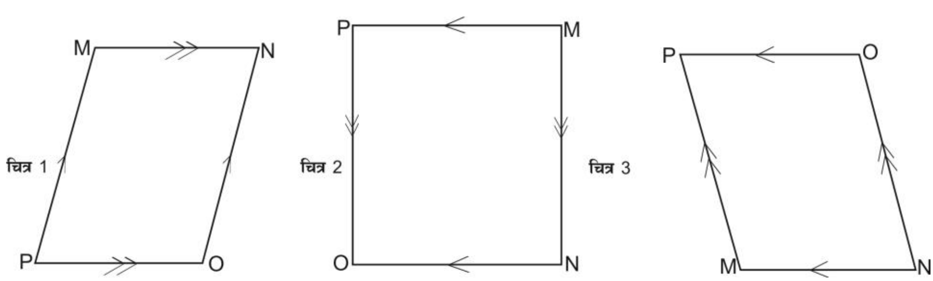
उपर्युक्त बालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्षलाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *समानान्तर चतुर्भजका सम्मुखहरू बराबर हुन्छन् ।*

(ख) समानान्तर चतुर्भजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक परीक्षण गर्ने ।

विधि : फरक फरक आकृति र भुजाहरू भएका कम्तीका तीनओटा समानान्तर चतुर्भजहरूको रचना गर्नुहोस् ।

चित्रमा देखाए जस्तै तिनीहरूको नाम MNOP राख्नुहोस् ।



अब माथि रचना गरिएका चतुर्भजहरूका सम्मुख भुजाहरूको नाप मापकको सहायताले नापेर तालिकामा भर्नहोस् ।

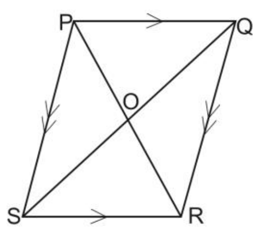
चित्र नं.	MN	OP	MP	NO	परिमाण
1					
2					
3					

माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्षलाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

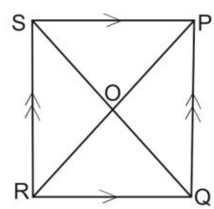
निष्कर्ष : *समानान्तर चतुर्भजका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।*

(ग) समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्ने ।

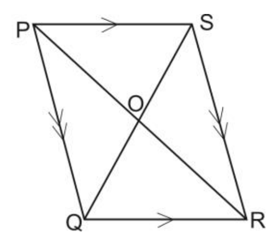
विधि : माथि परीक्षण (क) र (ख) मा जस्तै तीनओटा समानान्तर चतुर्भजहरूको रचना गर्नुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै तिनीहरूको नाम PQRS राख्नुहोस् । विकर्णहरू PR र QS लाई जोड्नुहोस् ।



चित्र नं. i



चित्र नं. ii



चित्र नं. iii

अब मापकको मदतको OP, OR, OQ र OS को नाप नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

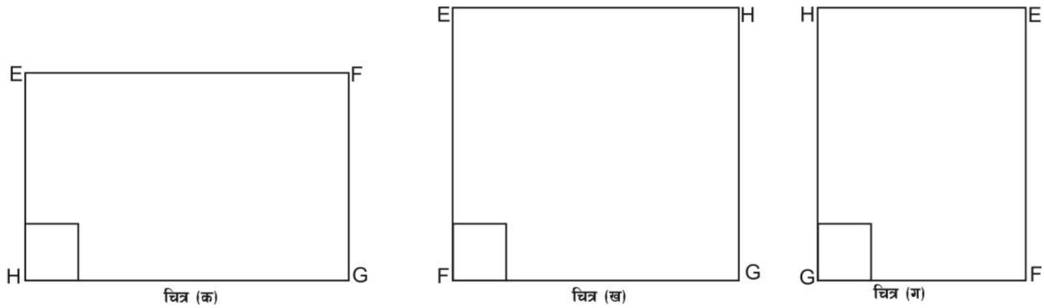
चित्र नं.	OP	OR	OQ	OS	परिमाण
(i)					
(ii)					
(iii)					

माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त नतिजालाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *समानान्तर चतुर्भजका विकर्णहरू समद्विभाजन हुन्छन् ।*

(घ) आयतका सबै कोणहरू समकोण हुन्छन् । भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्नुहोस् ।

विधि : फरक फरक भुजाका नाप भएका तीनओटा आयतहरूको रचना गर्नुहोस् र चित्रमा देखाए अनुसार तिनीहरूको नाम EFGH राखौँ ।



अब कोणमापकको सहायताले उपर्युक्त आयतहरूका सबै कोणहरूलाई नापेर तलको तालिकामा भर्नहोस् ।

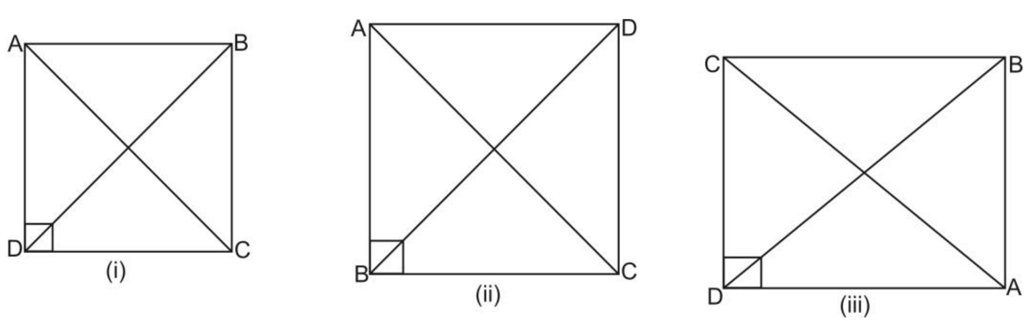
चित्र नं.	∠EHG	∠HEF	∠EFG	∠FGH	परिणाम
(क)					
(ख)					
(ग)					

उपर्युक्त तालिकाको अध्ययन गरेर प्राप्त निष्कर्षलाई आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *आयतका सबै कोणहरूको मान 90° (एक समकोण) हुन्छ । अर्थात आयतका प्रत्येक कोणहरूको नाप 90° वा एक समकोण बराबर हुन्छ ।*

(ङ) आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्नुहोस् ।

विधिः फरक फरक नापका तीनओटा आयतहरू खिच्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै तिनीहरूको नाम ABCD राखौँ



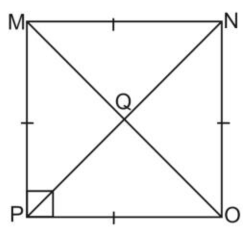
प्रत्येक आयतका विकर्णहरू AC र BD लाई जोडौँ र मापकको सहायताले नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र न.	**AC**	**BD**	**परिणाम**
(i)			
(ii)			
(iii)			

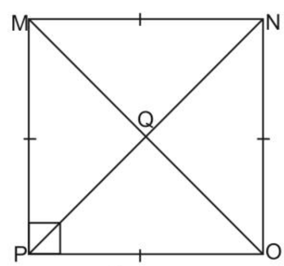
माथिको तालिकाबाट निष्कर्षको निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।*

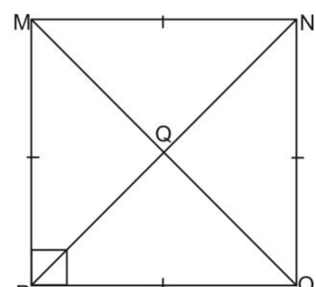
(च) वर्गका विकणहरू एकअर्काका लम्बार्धक हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

माथि चित्रमा देखाए जस्तै फरक फरक नापका भुजाहरू भएका तीनओटा वर्गहरू MNOP को रचना गर्नुहोस् । विकर्णहरू MO र PN लाई जोड्नुहोस् र काटिएको बिन्दुलाई Q ले जनाउनुहोस् । अब ∠MQN, ∠MQP, MQ, QO, PQ र QN को नापहरू कोणमापक र मापकको मदतले नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

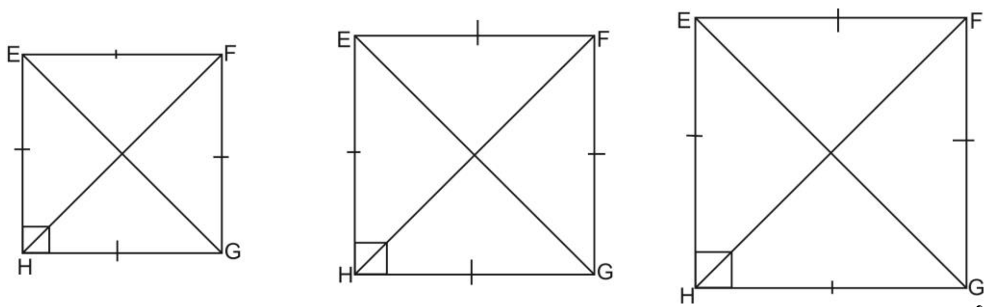
चित्र नं.	∠MQN	∠MQP	MQ	QO	PQ	QN	परिणाम
1							
2							
3							

माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

निष्कर्ष : *वर्गका विकर्णहरू आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् ।*

(छ) वर्गका विकर्णहरू सम्मुख कोणहरूका अर्धक हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्नुहोस् ।

विधि : चित्रमा देखाए जस्तै फरक फरक नापका तीनओटा वर्गहरू खिच्नुहोस् र तिनीहरूको नाम EFGH राख्नुहोस् । त्यसपछि विकर्णहरू EG र FH लाई जोड्नुहोस् ।



अब ∠HEG, ∠FEG, ∠FGE, ∠HGE, ∠EFH, ∠GFH, ∠EHF र ∠GHF लाई कोणमापकको मदतले नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र नं.	∠HEG	∠FEG	∠FGE	∠HGE	∠EFH	∠GFH	∠EHF	∠GHF	परिणाम
(क)									
(ख)									
(ग)									

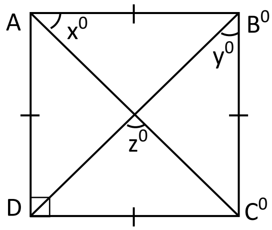
माथिको तालिकाको अध्ययन गरी प्राप्त निष्कर्ष आफ्नो कापीमा लेख्नुहोस् ।

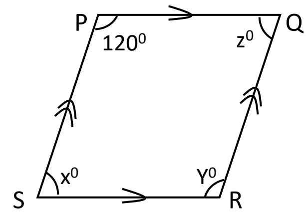
निष्कर्ष : *वर्गका विकर्णहरूले सम्मुख कोणहरूलाई आधा गर्दछन् अर्थात समद्विभाजन गर्दछन् ।*

अभ्यास

1. समानान्तर चतुर्भुज, आयत र वर्गका समान गुणहरू र असमान गुणहरूको सूची बनाई शीर्षहरूलाई देखाउनुहोस् ।
2. 3cm, 4 cm र 5cm भुजा भएका वर्गहरू रचना गरी तिनीहरूका विकर्णहरू आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् । भनी प्रयोगात्मक पुष्टि गर्नुहोस ।

3. दिएको चित्रहरूमा $x°, y°$ र $z°$ को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस ।





4. एउटा समानान्तर चतुर्भुज, एउटा आयत र एउटा वर्गको रचना गरी प्रत्येकका विकर्णहरू समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रयोगात्मक परीक्षण गर्नुहोस् ।

उत्तरहरू :

2) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3) $x° = 45°$ $y° = 45°$ $z° = 90°$

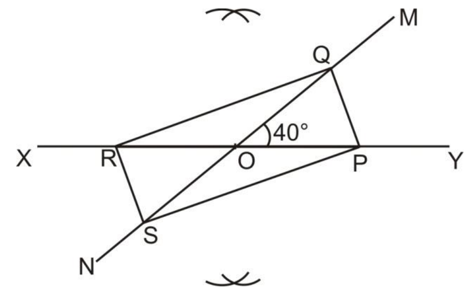
2.4 आयतका रचना (Construction of rectangle)

(क) दुईओटा विकर्णहरू र तिनीहरूको विचको कोण दिएको अवस्थामा आयतको रचना गर्ने तरिका

विधि : विकर्णहरू $PR = 4cm$ र $QS = 4cm$ तथा $\angle POS = 40^0$ भएको आयतको रचना गर्नुहोस् ।

1. सर्वप्रथम चित्रमा देखाए जस्तै एउटा आधार रेखा XY मा $PR = 4cm$ बराबरको लम्बाइ काट्नुहोस् अर्थात मापकको सहायताले नाप्नुहोस् ।

2. PR को लम्बार्धक खिची मध्यबिन्दुमा चिह्न लगाउनुहोस् । त्यसको नाम 'O' राख्नुहोस् ।



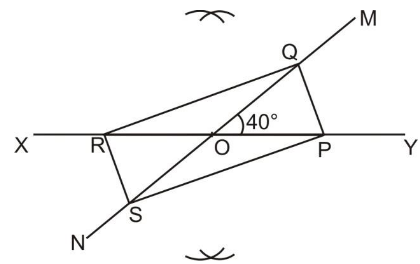
3. अब कोणमापकको सहायताले बिन्दु O मा कोण $\angle POM$ खिच्नुहोस् र MN सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।

4. अब'O' बाट PO बराबरका चापहरू रेखा MN मा काट्नुहोस् र बिन्दुहरूको नाम चित्रमा देखाए जस्तै Q र S राख्नुहोस् ।

5. अन्तमा PQ, QR, RS र SP लाई जोड्नुहोस् । अब चाहिएको आयत PQRS तयार हुन्छ ।

अर्को तरिका:

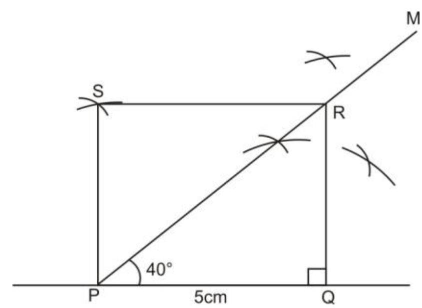
1. आधार रेखा xy खिच्नुहोस् ।
2. xy को कुनै बिन्दु O मा कोणमापकको सहायताले 40^0 को काण खिच्नुहोस् । यो कोणलाई चित्रमा देखाए जस्तै लामो रेखा MN ले जोड्नुहोस् ।
3. अब O बाट 2cm बराबरको चापहरू OY, OM, OX र ON मा काट्नुहोस् र काटिएका बिन्दुहरूलाई P, Q , R र S ले जनाउनुहोस् ।
4. अन्तमा PQ, QR, RS र SP लाई जोड्नुहोस् । यसरी चाहिएको आयत PQRS को रचना हुन्छ ।



ख) एउटा भुजा र त्यो भुजाले एउटा विकर्णसँग बनाएको कोण दिइएको अवस्थामा आयतको रचना गर्ने ।

विधि : एउटा भुजा 5cm र त्यसैले एउटा विकर्णसँग बनाएको कोण 40° हुँदा आयतको रचना गर्ने तरिका :

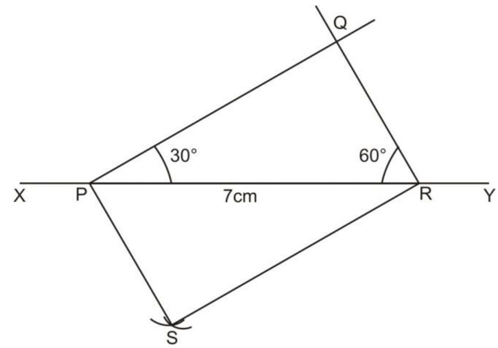
1. आधार रेखामा PQ = 5cm को रेखाखण्ड काट्ने ।
2. बिन्दु P मा कोणमापकको मदतले 40° कोण खिच्ने । यसलाई लामो रेखा PM ले जोड्ने ।
3. अब बिन्दु Q मा 90° को कोण खिच्ने जसले PM लाई भेट्छ भेटेको बिन्दुलाई R भन्ने । QR जोड्ने



4. बिन्दु R बाट PQ बराबरको चाप र बिन्दु P बाट QR बराबरको चाप लिएर दुवैलाई काट्ने र काटिएको बिन्दुलाई S ले जनाउने ।
5. अन्तमा PS र RS लाई जोड्ने र आयत PQRS तयार हुन्छ ।

(ग) विकर्ण PR = 7 cm र PR ले PQ **सँग** बनाएको कोण 30° भएको आयतको रचना गर्ने ।

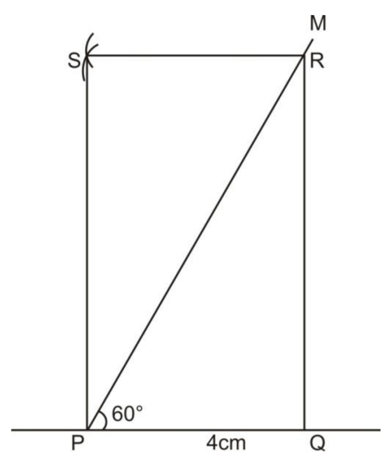
विधि :



1. आधार र XY मा PR = 7cm को रेखाखण्ड काट्ने
2. बिन्दु P मा 30° र बिन्दु R मा 60° को कोण बनाउने जहाँ $30° + 60° = 90°$ हुनुपर्छ ।
3. दुवै कोणहरू काटिएको बिन्दुको नाम Q राख्ने
4. अब PQ र RQ लाई जोड्ने
5. अन्तमा P बाट QR बराबरको चाप र R बाट PQ बराबर को चाप लिएर दुवैलाई काट्ने । चापहरू काटिएको बिन्दुहरूलालाई S ले जनाउने र
6. PS र RS लाई जोड्ने र चाहिएको आयत PQRS बन्दछ ।

(घ) समकोण त्रिभुजको कर्ण र आधारको विचको कोण तथा कर्ण र आधारको लम्बाइ दिएको अवस्थामा आयतको रचना गर्ने

विधि : कर्ण 8cm, आधार PQ = 4cm र $\angle RPQ = 60°$ भएको समकोण त्रिभुज बनाएर आयत बनााउने



1. कर्ण PR = 8cm, आधार PQ = 4cm र $\angle RPQ = 60°$ भएको समकोण त्रिभुज बनाउन सर्वप्रथम आधार $PQ = 4\ cm$खिच्ने ।
2. बिन्दु P मा 60° को कोण खिच्ने र त्यसलाई PM ले जोड्ने
3. PMमा कर्ण PR = 8cm हुने गरी काट्ने
4. Rर Q लाई जोड्ने र समकोण त्रिभुज PQR बन्दछ जहाँ $\angle PQR = 90°$ हुन्छ ।
5. अब P बाट QR बराबरको चाप र R बाट PQ बराबरको चाप लिएर बिन्दु S मा काट्ने

6. अन्तमा PS र RS जोड्ने र चाहिएको आयत PQRS बन्दछ

अभ्यास

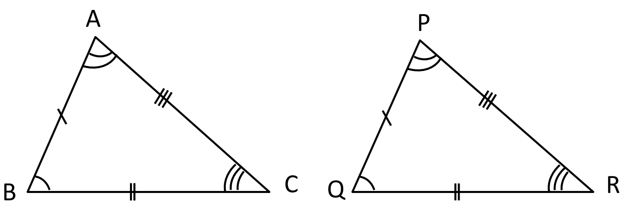
1. विकर्णहरू AC र BD को लम्बाइ 6cm र $\angle AOB = 30°$ भएको आयतको रचना गर्नुहोस् ।
2. एउटा आयतका विकर्णहरू विचको कोण 45° छ र प्रत्येक विकर्णको लम्बाइ 5cm भए सो आयतको रचना गर्नुहोस् ।
3. एउटा समकोण त्रिभुजको कर्ण $PR = 4cm$, आधार $PQ = 2cm$ र $\angle QPR = 60°$ भए आयत PQRS को रचना गर्नुहोस् ।
4. विकर्ण $AC = 10cm, AB = 5cm$ र $\angle BAC = 60°$ भएको आयतको रचना गर्नुहोस् ।
5. एउटा 5cm भुजा भएको भएको आयतको रचना गर्नुहोस्, जहाँ एउटा विकर्ण र त्यो भुजाको विचको कोण 30°हुन्छ ।
6. एउटा विकर्ण 6 cm भएको आयतको रचना गर्नुहोस् जहाँ त्यो विकर्णले एउटा भुजासँग बनाएको कोण 40° छ ।

उत्तर : माथिका सबै रचनाहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

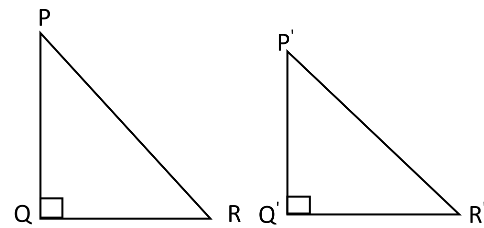
पाठ ३ :

त्रिभुजको अनुरूपता र समरूपता
Congruence and Similarity

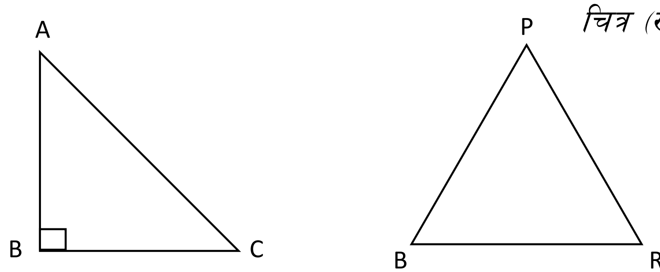
3.0 पुनरावलोकन (Review)



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

माथि चित्र (क) मा देखाएका त्रिभुजहरूका सबै सङ्गत भुजाहरू बराबर छन् । यस्ता त्रिभुजहरूका सबै नापहरू बराबर हुन्छन् र आकृति पनि उस्तै हुन्छन् । यस्ता ज्यमितीय चित्रहरूलाई अनुरूप (Congruent) भनिन्छ ।

चित्र (ख) मा देखाएका त्रिभुजहरू उस्तै देखिन्छन् । तर सङ्गत भुजाहरू बराबर छैनन् । यस्ता ज्यमितिय चित्रहरूलाई समरूप (Similar) भनिन्छ । चित्र (ग) मा देखाएका त्रिभुजहरूका आकृति पनि फरक फरक छन् र सङ्गत कोणहरू र भुजाहरू पनि फरक फरक छन् । यस्ता चित्रहरूलाई अनुरूप पनि भनिदैन र समरूप पनि भनिदैन ।

अनुरूप त्रिभुजहरू (Congruent triangles): उस्तै आकृति र सङ्गत नापहरू बराबर भएका त्रिभुजहरूलाई अनुरूप त्रिभुज(Congruent triangles) भनिन्छ । माथि चित्र (क) का त्रिभुजहरू $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ छन् ।

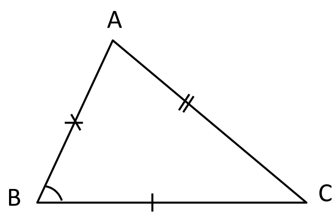
समरूप त्रिभुजहरू (Similar Triangles) : उस्तै आकृति भएका तर सङ्गत भुजाहरू बराबर नभएका त्रिभुजहरूलाई समरूप त्रिभुजहरू(Similar Triangles) भनिन्छ । माथि चित्र (ख) का त्रिभुजहरू $\Delta PQR \sim \Delta P'Q'R'$ छन् भनी लेखिन्छ ।

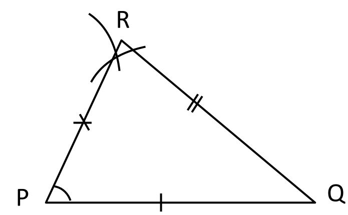
3.1 त्रिभुजहरू अनरूप हुने अवस्थाहरूको परीक्षण

परीक्षण – 1

विधि : सर्वप्रथम फरकफरक नापका भुजाहरू भएको एउटा त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् ।

1. अब आधार BC सँग बराबर हुने गरी आधार PQ खिचौं ।
2. अब P बाट AB बराबरको चाप र Q बाट AC बराबरको चापहरू लिने र काटिएको बिन्दुलाई R ले जनाऔँ ।
3. अब PR र RQ लाई जोडौँ । यसरी बनेको त्रिभुज PQR र ABC को आकृति तथा सबै सङ्गत भागहरू बराबर हुन्छन् ।
4. अतः त्रिभुज ABC र PQR अनरूुप हुन्छन् ।





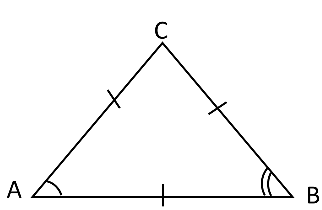
5. यसरी ΔABC र ΔPQR का सबै सङ्गत कोणहरू र सङ्गत भुजाहरू बराबर हुन्छन् । अतः ΔABC र PQR अनुरूप छन् अर्थात $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

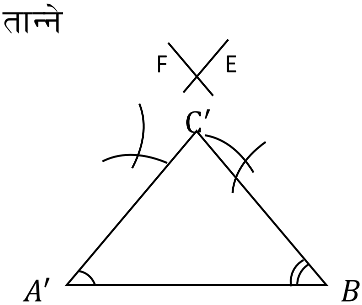
निष्कर्ष : *यदि दुईओटा त्रिभुजहरूका सङ्गत भुजाहरू बराबर छन्. भने त्यस्ता त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । यसलाई भु.भु.भु. वा (S.S.S) तथ्य भनिन्छ ।*

परीक्षण-२

विधि :

1. फरक फरक भुजा भएको एउटा त्रिभुज ABC रचना गर्ने
2. आधार रेखा AB बराबरको A′B′ रेखा तान्ने





3. बिन्दु A' मा $\angle BAC$ बराबरको कोण $B'A'E$ खच्ने र बिन्दु B' मा $\angle CBA$ बराबरको कोण $\angle FB'A'$ खिच्ने ।

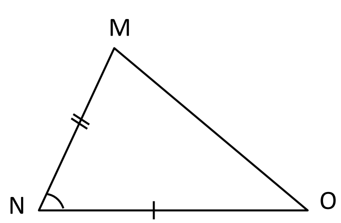
4. रेखाहरू $A'E$ र $B'F$ काटिएको बिन्दुलाई C'ले जनाउने । यसरी तयार भएको त्रिभुज $+A'B'C'$ र ΔABC का सबै सङ्गत भुजाहरू र कोणहरू बराबर हुन्छन् र दुवैको आकृति पनि उस्तै हुन्छ । अतः यी दुवै त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् अर्थात $\Delta ABC \cong A'B'C'$

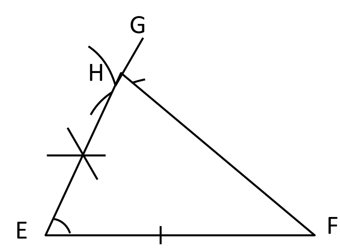
निष्कर्ष : *दुईओटा त्रिभुजका दुईओटा कोण र ती दुई कोणहरू बिचका भुजाहरू क्रमशः सङ्गत रूपमा अलग अलग बराबर छन् भने त्यस्ता त्रिभुजहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् र यो अवस्थालाई को.भु.को.(A.S.A) तथ्य भनिन्छ ।*

परीक्षण–3

विधि :

1. सर्वप्रथम एउटा त्रिभुज MNO को रचना गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखा NO सँग बराबर हुने गरी रेखा EF खिच्नुहोस ।
3. अब बिन्दु E मा कोण $\angle MNO$ सँग बराबर हुने गरी कोण $\angle GEF$ खिच्नुहोस् र
4. बिन्दु E बाट EG मा MN बराबरको चाप काट्ने र काटिएको बिन्दुलाई H ले जनाउनुहोस् ।
5. HE र HF लाई जोड्नुहोस् ।





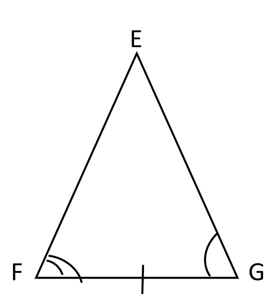
यसरी तयार भएको त्रिभुज HEF र MNO का सबै सङ्गत कोणहरू र भुजाहरू बराबर हुन जान्छन् र तिनिहरूका आकृतिहरू पनि उस्तै हुन्छन् र अतः यिनीहरू अनुरूप त्रिभुज बन्छन् ।

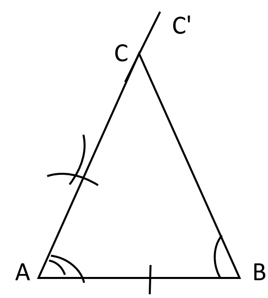
निष्कर्ष : *यदि दुईओटा त्रिभुजहरूका दुईओटा सङ्गत भुजाहरू र तिनीहरूका विचका कोणहरू बराबर भए ती दुईओटा त्रिभुजहरू अनुरूप बन्दछन् । यो तथ्यलाई भु.को.भु.(S.A.S) भनिन्छ ।*

परीक्षण-४

विधि :

1. सर्वथम एउटा त्रिभुज EFG को रचना गर्नुहोस् ।
2. अब आधार रेखा EF सँग बराबर हुने गरी अर्को आधार रेखा AB खिच्नुहोस् ।
3. बिन्दु A मा $\angle EGF$ सँग बराबर हुने गरी $\angle C'AB$ खिच्नुहोस् ।
4. अब EF बराबर हुने गरी बिन्दु A बाट AC' मा चाप काट्ने र काटिएको बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
5. बिन्दु B मा $\angle EGF$ सँग बराबर हुने गरी कोण $\angle CBA$ खिच्नुहोस् ।





यसरी तयार भएको त्रिभुज ABC र त्रिभुज EFG का सबै सङ्गत भागहरू बराबर हुनुका साथै आकृतिहरू उस्तै हुने भएकाले यी दुईओटा त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।

निष्कर्ष : *यदि दुईओटा त्रिभुजका एउटा भुजा त्यसमा परेको एउटा कोण र त्यो भुजाको सम्मुख कोण क्रमशः अलग अलग बराबर छन् भने त्यस्ता त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । यसलाई भु.को.को.$(S.A.A)$ तथ्य भनिन्छ ।*

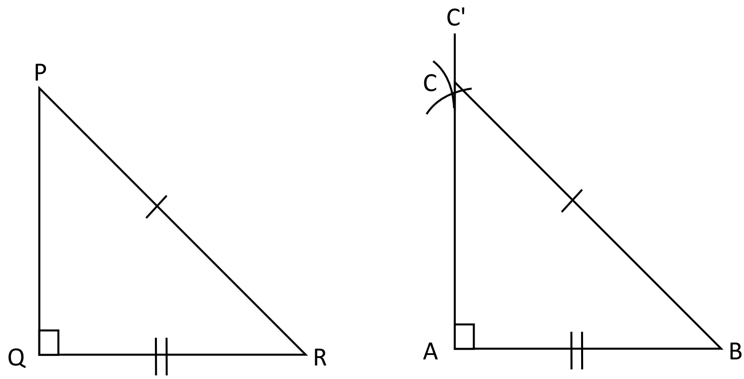
परीक्षण-5

विधि :

1. एउटा समकोणी त्रिभुज PQR खिच्नुहोस् । जहाँ $\angle PQR = 90°$ होस् ।
2. अब आधार भुजा QR सँग बराबर हुने गरी अर्को रेखा AB खिचौँ ।
3. बिन्दु A मा $\angle PQR = 90°$ सँग बराबर हुने गरी $\angle C'AB = 90°$ को कोण खिच्नुहोस् ।

4. अब बिन्दु B बाट PR बराबर हुने गरी C′A मा चाप काट्ने र काटिएका बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् । BC लाई जोड्नुहोस ।

5. अब बिन्दु B बाट PR बराबर हुने गरी C′A मा चाप कोट्ने र काटिएको बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् । BC लाई जोड्नुहोस् ।

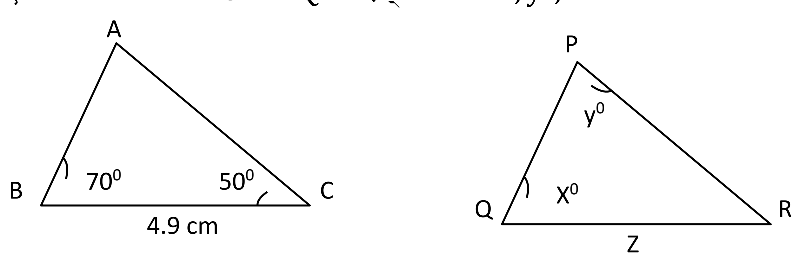


यसरी बनेको समकोणी त्रिभुज ABC र समकोणी त्रिभुज PQR का सबै सङ्गत कोणहरू र भुजाहरू बराबर भई आकृति पनि उस्तै हुन्छ । अत: $\Delta PQR \cong \Delta ABC$

निष्कर्ष : *यदि एउटा समकोणी त्रिभुजको समकोण, एउटा भुजा र कर्ण अर्को समकोणी त्रिभुजको समकोण, सङ्गत भुजा र कर्णसँग क्रमश: अलग अलग बराबर भए तिनीहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् । यो तथ्यलाई स.क.भु. (R.H.S) भनिन्छ ।*

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा $\Delta ABC \cong PQR$ छन् । अब $x°, y°,\ z°$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

ΔABC मा $\angle A = 180° - 70° - 60°$

$= 60° = \angle P$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

$\therefore \angle P = y° = 60°(\because \Delta ABC \cong \Delta PQR = x°$

फेरि $\angle ABC$ = सङ्गत कोण$\angle PQR^\circ = x^\circ$

$$or, 70^\circ = x^\circ \therefore \angle x^\circ = 70^\circ$$

अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू भएकोले

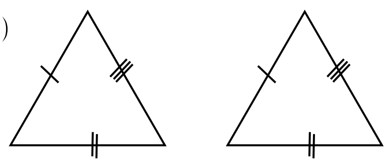
$BC = QR$

$$\therefore z = 4.9cm$$

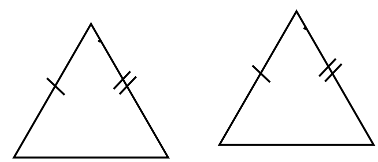
अभ्यास

1. तल दिएका त्रिभुजहरूका जोडीहरू अनुरूप छन् या छैनन छुट्याउनुहोस् र अनुरूप छन भने कुन तथ्यअनुसार अनुरूप छन् ,

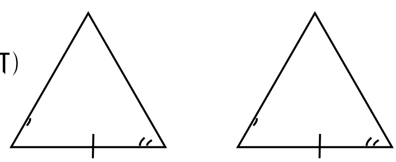
(क)



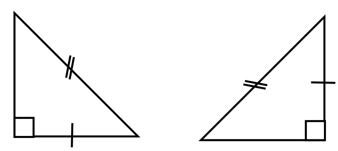
(ख)



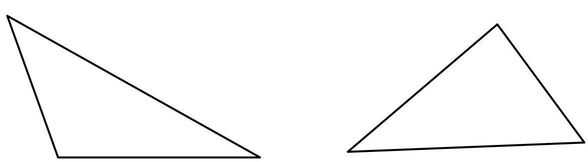
(ग)



(घ)

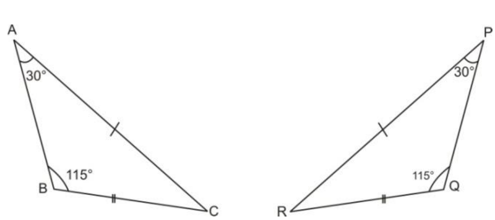


(ङ)

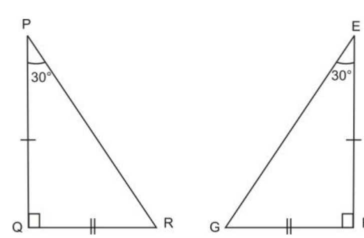


2. तल दिएका अनुरूप त्रिभुजहरूका जोडीहरूमा सङ्गत कोणहरू र सङ्गत भुजाहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

(क)

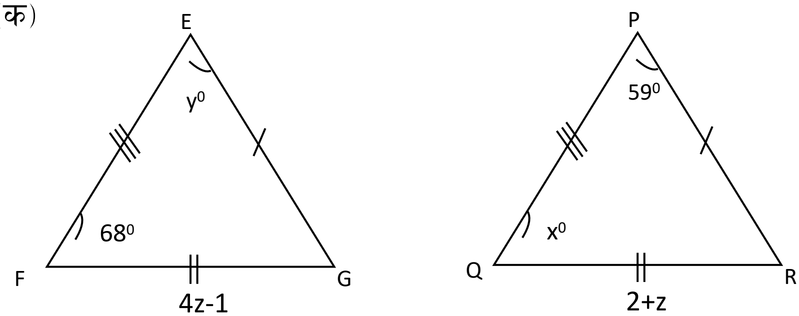


(ख)

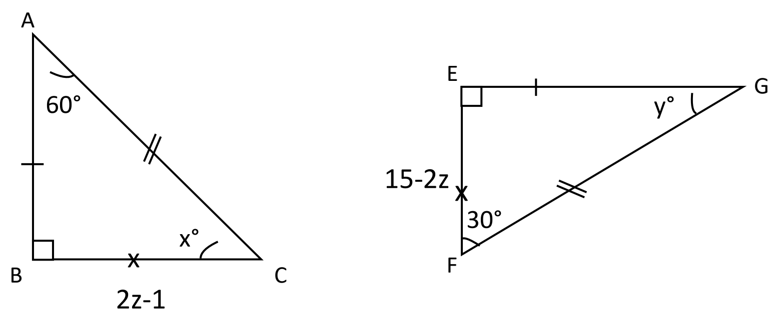


3. तल दिएका त्रिभुजका जोडीहरू अनुरूप भए $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ को मान कति कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

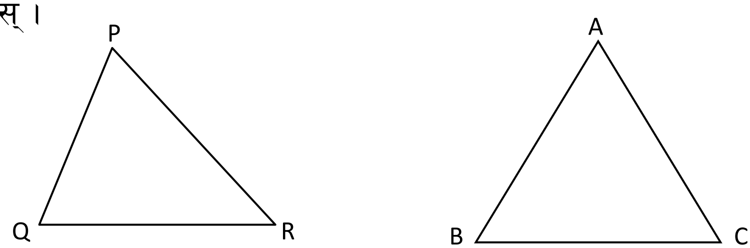
(क)



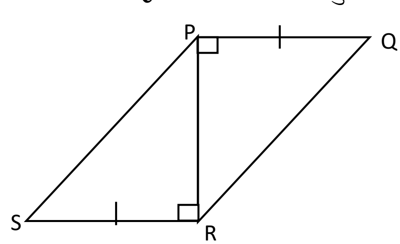
(ख)



4. तल दिएका त्रिभुजहरू आपसमा अनुरूप छन् या छैनन् नापेर हेर्नुहोस् । यदि अनुरूप छन् भने यिनीहरूका कुन कुन कोणहरू र भुजाहरू बराबर छन् ? लेख्नुहोस् ।



5. सँगैको चित्रमा ΔPQR र ΔPRS अनुरूप छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



उत्तरहरू :

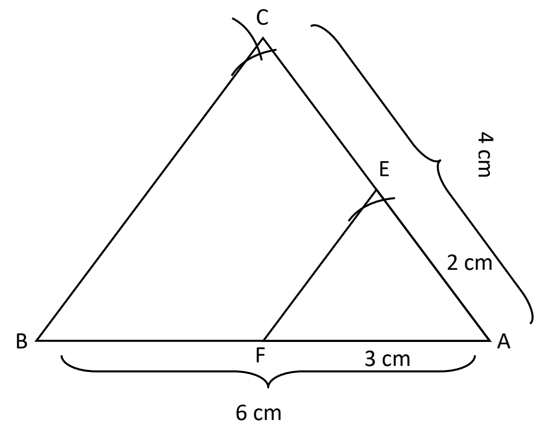
1. (क) भु.भु.भु. तथ्य अनुसार अनुरूप छन् ।
   (ख) भु.को.भु तथ्य अनुसार अनुरूप छन् ।
   (ग) को.भु.को तथ्य अनुसार अनुरूप छन् ।
   (घ) स.क.भु. तथ्य अनुसार अनुरूप छन् ।
   (ङ) अनुरूप छैनन् ।
2. (क) $\angle A$ को सङ्गत कोण $= \angle P$
   $\angle B$ को सङ्गत कोण $= \angle Q$
   $\angle C$ को सङ्गत कोण $= \angle R$
   AC को सङ्गत भुजा = PR
   AB को सङ्गत भुजा = PQ
   BC को सङ्गत भुजा = RQ

   (ख) $\angle P$ को सङ्गत कोण $= \angle E$
   $\angle Q$ को सङ्गत कोण $= \angle F$
   $\angle R$ को सङ्गत कोण $= \angle G$
3. (क) $y^\circ = 59^\circ, x^\circ = 68^\circ,$ र $z = 1$
   (ख) $x^\circ = 30^\circ, x^\circ = 60^\circ,$ र $z = 4$
4. अनुरूप छन् । भुजा PQ = भुजा AB, भुजा QR = भुजा AC, भुजा PR =भुजा BC
   $\angle P = \angle B, \angle Q = \angle A$ र $\angle R = \angle C$
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.2 समरूपता (Similarity)

उस्तै आकृति भएका ज्यामितीय चित्रहरूलाई समरूप चित्र अथवा आकृति भनिन्छ । दुईओटा त्रिभुजहरू ABC र PQR समरूप भए तिनीहरूलाई $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ लेखिन्छ । साथै समरूप त्रिभुजहरूका सङ्गत भुजा र कोणहरू क्रमश : समानुपातिक र बराबर हुन्छन् ।

क्रियाकलाप



एउटा त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् जहाँ $AB = 6cm, BC = 5cm$ र $CA = 4cm$ छन् अब AB र AC को मध्यबिन्दु पत्ता लगाई तिनीहरूलाई क्रमश F र E ले जनाउनुहोस । यसरी बन्ने त्रिभुज ΔAEF मा $EA = 2cm$ र $FA = 3cm$ हुन्छ । मापकले नापेर हेर्नुहोस् । भुजा $EF = \frac{BC}{2} = 2.5cm$ हुन्छ । यसरी नै कोणमापकले नापेर हेर्नुहोस् । $\angle AEF = \angle ACB$ र $\angle AFE = \angle ABC$ पाउनुहुने छ । $\angle A$ दुवै को साझा छ । अतः ΔABC र ΔAEF का सङ्गत कोणहरू बराबर छन् । यसरी नै सङ्गत भुजाहरू AE, AC, AF, AB, र EF, BC का अनुपातहरू पनि बराबर छन् । अर्थात $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$ छ ।

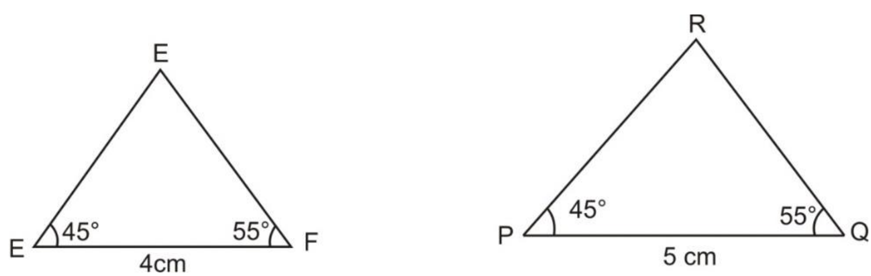
चित्रलाई राम्ररी अध्ययन गर्नुहोस् । ΔABC र ΔAEF उस्तै आकृतिका त्रिभुज हुन अर्थात समरूप त्रिभुज हुन् । यसबाट के प्रष्ट हुन्छ भन् समरूप त्रिभुजहरूका सङ्गत भुजाहरू समानपातिक हुन्छन् र सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् । यसरी नै यदि कुनै दुईटा त्रिभुजहरूका सबै सङ्गत कोणहरू बराबर छन् भने तिनीहरू समरूप हुन्छन् । साथै दुईओटा त्रिभुजहरूका सङ्गत भुजाहरू समानुपातिक भएमा पनि ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

3.2.1 त्रिभुजहरू समरूप हुने अवस्थाहरू

(Conditions for triangles to be similar)

(क) यदि दुईओटा त्रिभुजहरूका दुईओटा सङ्गत कोणहरू बराबर छन् भने ती दुई त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

परीक्षण: चित्रमा देखाए जस्तै आधार भुजा EF = 4cm र $\angle GEF = 45°$ र $\angle GFE = 55°$ भएको त्रिभुज EFG को रचना गर्नुहोस् । यसरी नै आधार भुजा PQ = 5cm भएको र $\angle RPQ = 45°$ र $\angle RQP = 55°$ भएको अर्को त्रिभुज PQR को रचना गर्नुहोस् । अब यी दुई त्रिभुजका बाँकी कोणहरू $\angle EGF$ र $\angle PRQ$ नापेर हेर्नुहोस् र दुवैको मान $80°$ पाउनुहुने छ । साथै यिनीहरूका सङ्गत भुजाहरू पनि समानुपातिक हुनेछन् । नापेर तालिका मा भर्नुहोस् ।



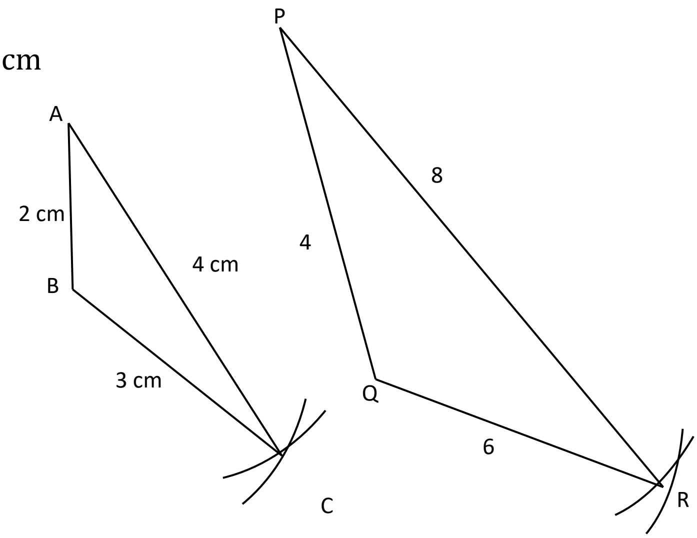
$\angle R$	$\angle G$	$\frac{PR}{EG}$	$\frac{PQ}{EF}$	$\frac{RQ}{GF}$	परिणाम

माथिको तालिका अनुसार ΔEFG र ΔPQR का सङ्गत कोणहरू बराबर छन् र सङ्गत कोणहरू भुजाहरू समानुपातिक छन् । अत: $\Delta EFG \sim \Delta PQR$

निष्कर्ष : *दुईओटा सङ्गत कोणहरू बराबर हुने त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।*

(ख) दुईओटा त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू समानुपातिक भएमा ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

परीक्षण : $AB = 2cm, BC = 3cm$ र $CA = 4cm$ भएको एउटा त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस् । यसरी नै $PQ = 4cm, QR = 6m$ र $PR = 8cm$ भएको अर्को त्रिभुज PQR को रचना गर्नुहोस् ।



यसरी बनेका त्रिभुजहरूका सङ्गत भुजाहरू समानुपातिक छन्, अर्थात $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{1}{2}$ । अब यिनीहरूका सङ्गत कोणहरू नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

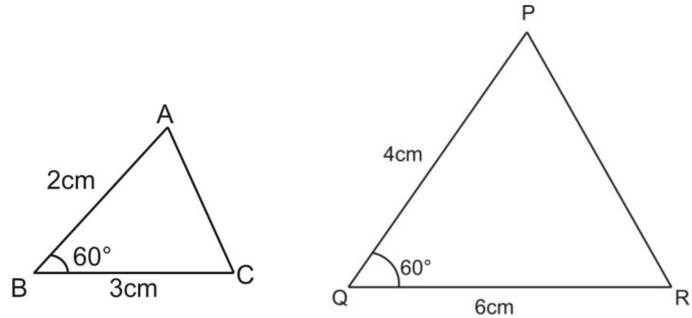
$\angle A$	$\angle P$	$\angle B$	$\angle Q$	$\angle C$	$\angle R$	परिणाम

माथिको तालिकाबाट थाहा भए अनुसार ΔABC र ΔPQR का सबै सङ्गत कोणहरू बराबर छन् । अत: $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

निष्कर्ष : *यदि दुईओटा सङ्गत भुजाहरू क्रमश अलग अलग समानुपातिक छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।*

(ग) यदि दुईओटा त्रिभुजहरूका दुईओटा सङ्गत भुजाहरू क्रमश अलग अलग समानुपातिक छन् र तिनीहरू बिचका कोणहरू पनि बराबर छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

परीक्षण : $AB = 2cm, BC = 3\ cm$ र $\angle ABC = 60°$ भएको ΔABC को रचना गर्नुहोस् । यसरी नै $PQ = 4cm, QR = 6cm$ र $\angle PQR = 60°$ भएको ΔPQR पनि रचना गर्नुहोस् ।



यसरी बनेका त्रिभुजहरूका $\angle B = \angle Q$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{2}$ अर्थात दुईओटा सङ्गत भुजाहरू समानुपातिक छन् र तिनीहरू बिचका कोणहरू पनि बराबर छन् । अब यिनीहरूका बाँकी कोणहरू र भुजाहरूको नाप लिएर तलको तालिकामा भर्नुहोस् ।

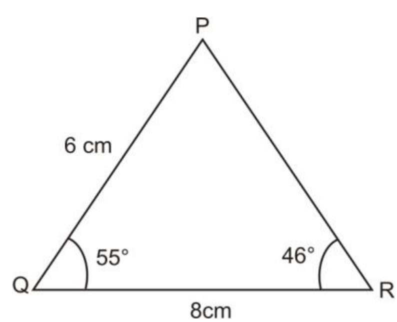
$\angle A$	$\angle P$	$\angle C$	$\angle R$	AC	PR	$\frac{AC}{PR}$	परिणाम

माथिको तालिका अनुसार $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ समरूप छन् ।

निष्कर्ष : *यदि दुईओटा त्रिभुजका दुईओटा सङ्गत भुजाहरू समानुपातिक छन् र तिनीहरू बिचका कोणहरू पनि बराबर छन् भने ती त्रिभुजहरू समरूप छन् ।*

उदाहरण 1

दिइएका त्रिभुजहरू ΔABC र ΔPQR समरूप भए तिनीहरूका बाँकी कोणहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् र बाँकी भुजाहरूको अनुपात पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

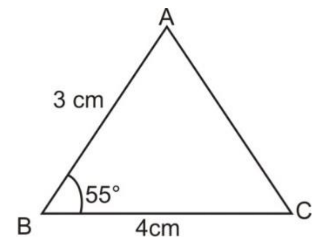


समाधान

दिएको अनुसार $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ छन् । अत: , $\frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ फेरि

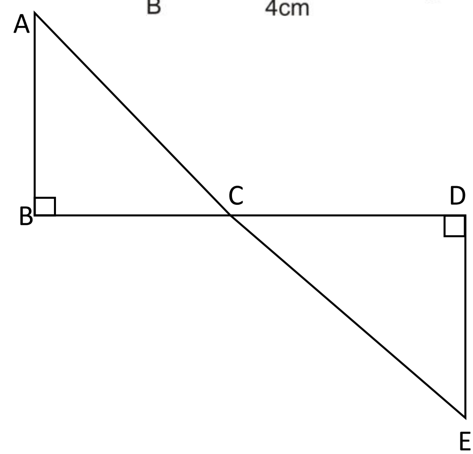
ΔPQR मा $\angle P = 180° - 55° - 46° = 79°$

अत:$\angle P = \angle A = 79°$ र $\angle C = \angle R = 46°$



उदाहरण 2

दिएको चित्रमा ΔABC र ΔCDE मा समरूप छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



समाधान

ΔABC र ΔCDE मा

i. $\angle ABC = \angle CDE = 90°$ दिएको छ ।

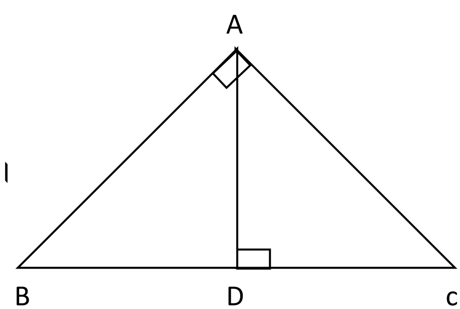
ii. $\angle ACB = \angle DCE$ (शीर्षाभिमुख कोणहरू)

iii. $\angle BAC = \angle CED$(बाँकी कोणहरू)

अत: $\Delta ABC \sim \Delta CDE$(को.को.को. तथ्य अनुसार)

उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा ΔABC र ΔABD र ΔADC तीनैओटा समरूप छन् भनी प्रमाािणत गर्नुहोस् ।



समाधान

ΔABC र ΔABD मा

i. $\angle BAC = \angle ADB = 90°$ (समकोण भएकोले)

ii. $\angle ABC = \angle ABD$ (साझा कोण)

iii. $\angle BAD = \angle ACB$ (बाँकी कोणहरू) अतः $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ ....(क)

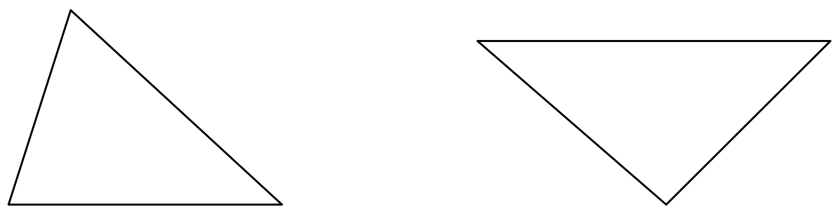
यसरी नै $\Delta ABC \sim \Delta ADC$ प्रमाणित गर्न सकिन्छ । ....(ख)

माथि (क) र ख अनुसार $\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta ADC$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास

1. तल दिएको जोडी त्रिभुजहरू समरूप छन् या छैनन, सङ्गत कोणहरू र भुजाहरू नापेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

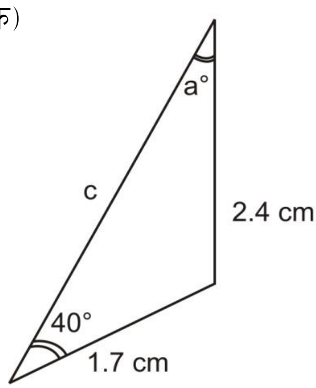


(ख)

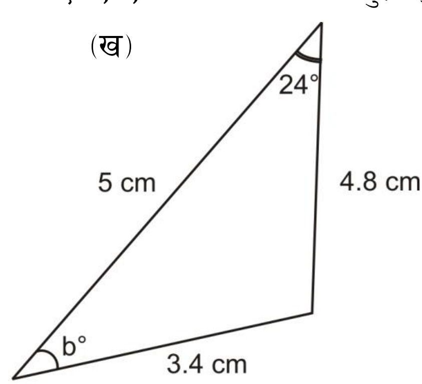
(ग)

2. तल दएको त्रिभुजका जोडीहरू समरूप भए a, b, c को मान निकाल्नुहोस् ।

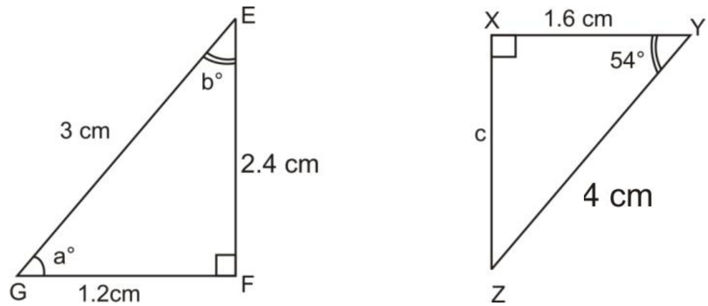
(क)



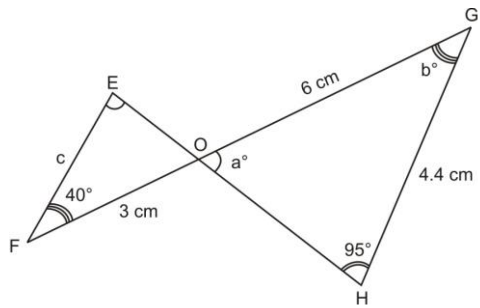
(ख)



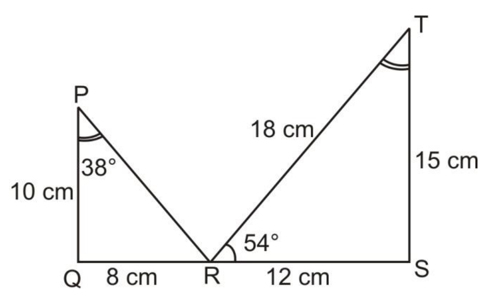
(ख)



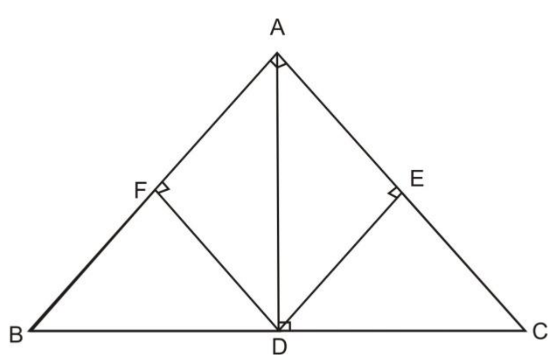
(ग)



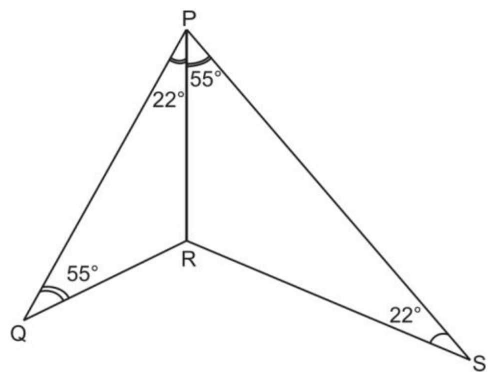
3. दिइएका चित्रमा ΔPQR र ΔTSR समरूप भए PR को मान ∠T, ∠Q र ∠S को मान कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् ।



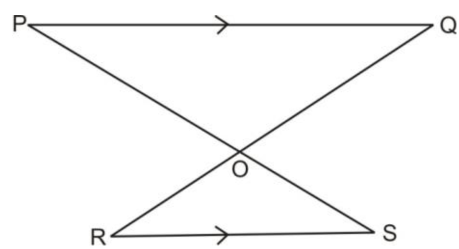
4. दिइएको चित्रमा कतिओटा त्रिभुजहरू आपसमा ससरूप छन् कुनै एक जोडीलाई समरूप देखाउनुहोस् ।



5. दिइएको चित्रमा ΔPQRर ΔPSR समरूप हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



6. दिइएको चित्रमा PQ||RS र सिधारेखाहरू PS र RQ बिन्दु O मा काटिएका छन् । प्रमाणित गर्नुहोस् । ΔPOQ~ΔROS



उत्तरहरू :

1. (क) छैनन (ख) छन् (ग) छन्

2. (क) $a° = 24°, b° = 40°$ र $c = 2.5$ cm

   (ख) $a° = 54°, b° = 36°$ र $c = 3.2$ cm

   (ग) $a° = 45°, b° = 40°$ र $c = 2.2$ cm3. $PR = 12$cm, $\angle T = 38°$

   र $\angle S = 88° = \angle Q$

4. 7 ओटा छन् । बाँकी उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

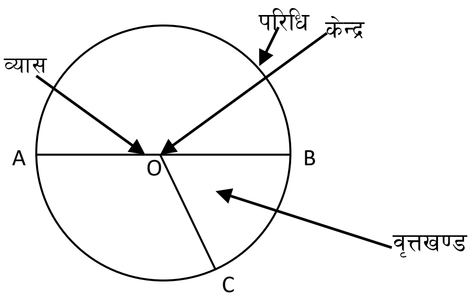
6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्

7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ ४ : वृत्त (Circle)

4.0 पुनरावलोकन :

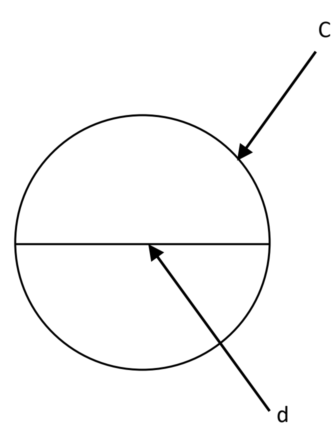
परिभाषा : एउटा समथर सतह (Plane) मा एउटा घुम्ने बिन्दु यदि एउटा निश्चित बिन्दुबाट सधैं बराबर दुरीमा रहेर घुम्छ भने त्यसले तय गरेको गोलाकार बाटोलाई वृत्त (Circle) भनिन्छ । त्यो निश्चित बिन्दुलाई वृत्तको केन्द्रबिन्दु भनिन्छ र गोलाकार बाटो देखि केन्द्र बिन्दु सम्मको अचल (Contant) दुरीलाई वृत्तको अर्धव्यास (radius of the circle) भनिन्छ । गोलाकार बाटोको जम्मा लम्बाइलाई वृत्तको परिधि (Circumference of the circle) भनिन्छ । अर्धव्यासको दोब्बर लम्बाइलाई वृत्तको व्यास (Diameter) भनिन्छ । दुईओटा अर्धव्यासको बिचमा परेको वृत्त क्षेत्रलाई वृत्तखण्ड (sector) भनिन्छ ।



4.1 वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपातको खोजी

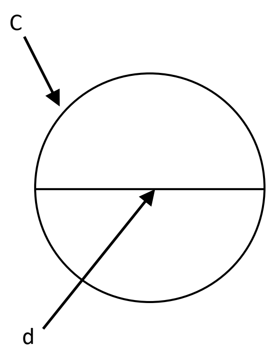
(Finding the ratio of Circumference of the circle to diameter)

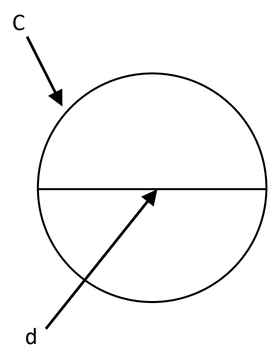
वृत्तको परिधि (Circumference) नाप्ने सम्बन्धी क्रियाकलाप



सर्वप्रथम एक रूपैयाँ, दुई रूपैयाँ र पाँच रूपैयाँको तीनओटा सिक्काहरू जम्मा गर्नुहोस् । ती सिक्काहरूलाई कागजमा राखेर तिनीहरूको किनारासँग सिसाकलमको टुप्पो टाँसिने गरी तीनओटा वृत्तहरू खिच्नुहोस् । ती वृत्तहरूको केन्द्रबिन्दु पत्ता लगाई प्रत्येकको अर्धव्यास र व्यास पत्ता लगाउनुहोस् । अब प्रत्येक वृत्तसँगसम्बन्धित सिक्का लिनुहोस् र धागोको

सहायताले प्रत्येकको परिधि (गोलाकार घेरा) नाप्नुहोस् । यसरी नापेको सिक्काको परिधिर त्यसले खिचेको वृत्तको परिधि बराबर हुन्छन् । अब प्रत्येक वृत्तको व्यास र परिधिलाई क्रमशः d र cले जनाउनुहोस् ।c लाई d ले भाग गर्नुहोस् र प्रत्येक वृत्तमा $\frac{c}{d}$ को मान लगभग 3.14 हुन्छ । तर यो निश्चित मान होइन । परिधिलाई व्यासले भाग गर्दा यो प्रक्रिया कहिल्यै टुङ्गिदैन अर्थात यो भागफल दशमलवमा आइरहन्छ । दशमलब बिन्दु पछि आउने सङ्ख्याहरू न टुङ्गिन्छन् न त एउटै समूहमा दोहोरिन्छन् । यस्ता सङ्ख्याहरूलाई अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational numbers) भनिन्छ, । c र d को यो अनुपातलाई ग्रीक अक्षर π(Pie)ले जनाउने चलन छ दशमलवको दुई स्थान सम्म $c/d = \pi$ को मान र $\frac{22}{7}$ को मान 3.14 हुने भएकाले $\frac{c}{d} = \pi = \frac{22}{7}$ लेख्ने चलन छ ।





चित्र (क)

$$\frac{c}{d} = 3.14 = \pi(\text{Pie}) = \frac{22}{7}(\text{लगभग})$$

चित्र (ख)

$$\frac{c}{d} = 3.14 = \pi(\text{Pie}) = \frac{22}{7}(\text{लगभग})$$

चित्र (ग)

$$\frac{c}{d} = 3.14 = \pi(\text{Pie}) = \frac{22}{7}(\text{लगभग})$$

निष्कर्ष : *वृत्तको परिधि र व्यासको अनुपात बराबर π हुन्छ ।*

अर्थात $\frac{c}{d} = \pi \text{ or } C = \pi d = \pi \times 2r$

$\therefore C = 2\pi r$ *जहाँ* r *भनेको वृत्तको अर्धव्यास हो ।*

उदाहरण 1

एउटा वृत्तको व्यास14 cmभए त्यसको परिधि कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान

यहाँ व्यास(d) $= 14\ \text{cm}$ र $\pi = \frac{22}{7}$

परिधि(C) =?

हामीलाई थाहा छ, $C = \pi d$

अतः वृत्तको परिधि (C) $= 44\ \text{cm}$ Ans.

उदाहरण 2.

एउटा वृत्तको परिधि 88 cm भए यसको अर्धव्यास कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

समाधान

यहाँ, दिएको छ, परिधि(C) $= 88\ \text{cm}$, $\pi = \frac{22}{7}$

अर्धव्यास (r) =?

हामीलाई थाहा छ, $(C) = 2\pi r$

$$\text{or,} \quad 88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\text{or}, 7 \times \frac{7 \times 88}{2 \times 22} = r$$

$$\text{or}, r = \frac{7 \times 4}{2} = 14\ \text{Ans.}$$

अतःवृत्तको अर्धव्यास (r) $= 14\ \text{cm}$ Ans.

उदाहरण 3

एउटा परिधि 22π cm भए त्यसको व्यास कति हुन्छ ।

समाधान

हामीलाई थाहा छ, परिधि(c) $= \pi d$

$$\therefore 22\pi = \pi d$$

$$\text{or}, d = 22\ \text{cm} \quad \therefore$$

व्यास (d) $= 22\ \text{cm}$ Ans.

अभ्यास

1. तलका अर्धव्यास र व्यास भएका वृत्तहरूको परिधि पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) अर्धव्यास 2 cm (ख) अर्धव्यास= 3 cm (ग) अर्धव्यास= 3.5 cm

   (घ) व्यास= 10 cm (ङ) व्यास= 14 cm

2. तल दिएका परिधि भएका वृत्तहरूको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) 44 cm (ख) 88 cm (ग) 176 cm

   (घ) 66 cm (ङ) 132 cm

3. एउटा वृत्ताकार पोखरीको व्यास 21 m भए सो पोखरीको परिधि कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् । $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

4. एउटा वृताकार बगैँचाको व्यास 56 ft छ । यहि यसको चारैतिर तारबारले घेर्नु पर्‍यो भने जम्मा कति फिट तार किन्नु पर्ला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

5. एउटा साइकल चालकको साइकलको चक्काको व्यास 49 cm छ । यदि चालकले सो चक्कालाई 100 चोटी गुडायो भने उसले कति दुरी पार गर्‍यो होला ? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

उत्तरहरू :

1. **(क)**12.56 cm (ख) 18.84 cm (ग) 21.98 cm (घ) 31.4 cm (ङ) 43.96 cm

2. (क) 7 cm (ख) 14 cm (ग) 28 cm (घ) 10.5 cm (ङ) 21 cm

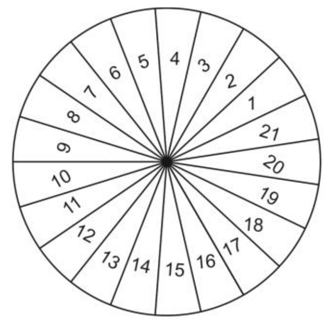
3.132 cm

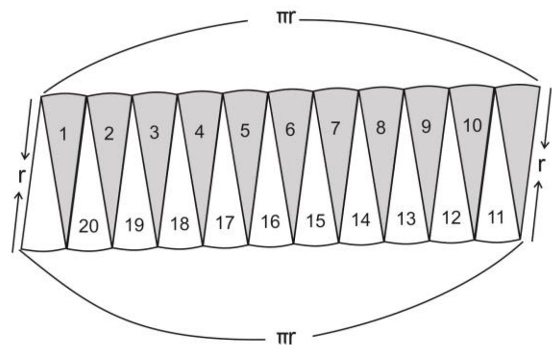
4. 176 ft

5.15400cm = 154 m

4.2 वृत्तको क्षेत्रफल (Area of a Circle)

वृत्तको क्षेत्रफल सम्बन्धी क्रियाकलापः एउटा कागजमा केन्द्रबिन्दु O भएको एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । अब सो कागजलाई वृत्तको परिधि हुँदै कैँची अथवा पत्तीले वृताकार रूपमा काट्नुहोस् । यसरी नै बनेको वृत्ताकार कागजलाई चित्रमा देखाए जस्तै व्यासलाई आधार मानी बराबर 21 ओटा भागमा बाड्नुहोस् र प्रत्येक भागमा 1 देखि 21 सम्मका सङ्ख्या लेख्नुहोस् । अब कैँचीको सहायताले 21 ओटै भागमा बराबर गरी काट्नुहोस् ।अब 10/10 ओटा टुक्राहरूलाई दुईतिरबाट एक अकासँग टास्नुहोस र 21 औँ टुक्राको बराबर दुईभागमा बनाएर चित्रमा देखाए जस्तै आयताकार आकृति बन्ने गरी छेऊ छेऊमा टास्नुहोस् । यसरी बनेको आयताकार चित्रको लम्बाइ $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ र चौडाइ r हुन जान्छ ।





अतः वृत्तको क्षेत्रफल = आयताकार आकृतिको क्षेत्रफल $= l \times b = \pi r \times r$

$= \pi r^2$

माथिको सूत्रलाई व्यासको रूपमा लेख्दा,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$= \frac{\pi d^2}{4}$

∴ A = $\frac{\pi d^2}{4}$ वर्ग इकाइ, जहाँ d = 2r = व्यास

उदाहरण 1

एउटा वृत्तको अर्धव्यास 7cm भए त्यसको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । ($\pi = 3.14$)

समाधान

यहाँ, अर्धव्यास (r) = 7 cm र $\pi = 3.14$

अत: वृत्तको क्षेत्रफल (A)= πr^2

$= 3.14 \text{ x } (7)^2$

$= 3.14 \text{ x } 49$

$= 153.86 \text{ cm}^2$ Ans

उदाहरण 2

एउटा वृत्तको परिधि 88cm भए त्यसको क्षेत्रफल कति होला ?($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ, परिधि (C) = 88cm

वृत्तको क्षेत्रफल (A)= ?

हामीलाई थाहा छ, परिधि (C) = $2\pi r$

or, $88 = 2\text{x}\frac{22}{7} r$

or, $r = \frac{88\text{x}7}{44} = 14\text{cm}$

अत: वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

$= \frac{22}{7} \text{x } (14)^2$

$= \frac{22}{7} x 14 x 14$

$=22 \text{ x } 2 \text{ x } 14$

$= 44 \text{ x } 14$

616 वर्ग से.मी. Ans

उदाहरण 3

एउटा वृत्तको व्यास 28cm भए यसको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ, व्यास (d) = 28cm

∴ अर्धव्यास (r) $= \frac{d}{2} = \frac{28}{2} = 14cm$

अत: वृत्तको क्षेत्रफल (A) $= \pi r^2 \times (14)^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 22 \times 28$

= 616 वर्ग से.मी.

उदाहरण 4

एउटा वृत्तको क्षेत्रफल 2464 वर्ग से.मी. भए यसको अर्धव्यास कति हुन्छ ? $(\pi = \frac{22}{7})$

समाधान

यहाँ, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $2464cm^2$ र $\pi = \frac{22}{7}$

वृत्तको अर्धव्यास $(r) = ?$

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको क्षेत्रफल $(A) = \pi r^2$

∴ $2464 = \pi r^2 = \frac{22}{7} r^2$

$or, \frac{2464x7}{22} = r^2$

$\text{or}, r^2 = 784 = 28x28$

$\therefore r = \sqrt{28x28} = 28$ से.मी.

अभ्यास

1. तलका अर्धव्यास र व्यास भएका वृत्तहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् $(\pi = \frac{22}{7})$

   क) अर्धव्यास =2cm   ख) अर्धव्यास = 3cm   ग) अर्धव्यास = 14cm

   घ) अर्धव्यास = 28cm   ङ) अर्धव्यास = 42cm

2. तलका परिधि भएको वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । $(\pi = \frac{22}{7})$

   क) 88cm   ख) 176cm   ग) 44cm

3. एउटा वृत्तको परिधि 22m छ भने यसको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् । $\pi = \frac{22}{7}$

4. एउटा वृत्ताकार चौरको क्षेत्रफल 154 वर्ग कि.मी. भए यसको व्यास कति होला ? $\pi = \frac{22}{7}$

5. एउटा वर्गको परिधि र 7cm अर्धव्यास भएको वृत्तको परिधि बराबर भए कसको क्षेत्रफल कतिले बढी हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू

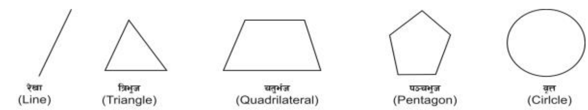
1. क) 12.5 cm^2 ख) 28.26 cm^2 ग) 153.86 cm^2
   घ) 615.44 cm^2 ङ) 1384.74 cm^2
2. क) 616 cm^2 ख) 2464 cm^2 ग) 154 cm^2
3. 38.5 m^2
4. 14 Km
5. वृत्तको क्षेत्रफल 33cm^2ले बढी हुन्छ ।

ठोस आकृतिहरू (Solid Figure)

1.0 पुनरावलोकन (Revizion)

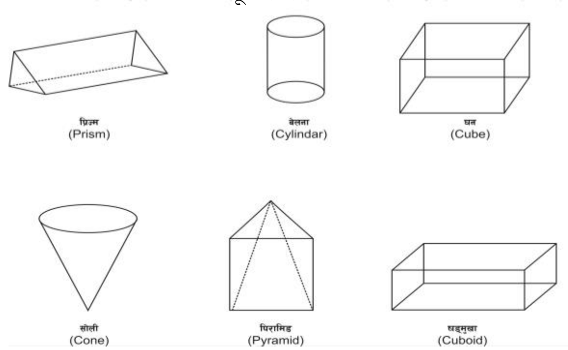
समतलीय आकृतिहरू (Plane figures): एउटै सतहमा बनेका द्विआयामिक (दुई दिशातिर बढ्ने मा घट्ने) ज्यामितीय आकृतिहरूलाई समतलीय आकृतिहरू (Plane figures or shapes) भनिन्छ । यस्ता आकृतिहरूलाई सँगैको समूह (क) मा देखाइएका छन् ।

समूह (क)



ठोस आकृतिहरू (Solid figures):- एक भन्दा बढी सतहमा बनेका त्रिआयामिक (तीन दिशातिर बढ्ने या घट्ने) ज्यामितीय आकृतिहरूलाई ठोस् आकृतिहरू (Solid figure or shapes) भनिन्छ । यस्ता आकृतिहरूलाई सँगैको समूह (ख) मा देखाइएको छ ।

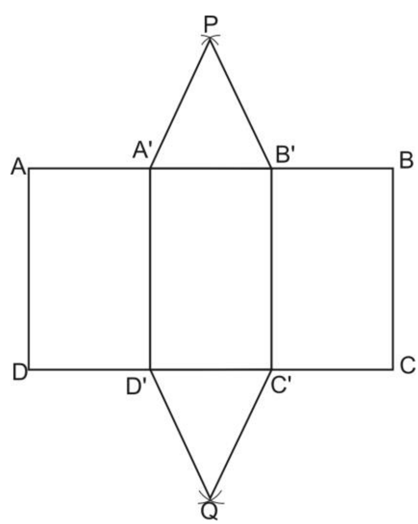
समूह (ख)



5.1 त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिड (Triangular Prism and Pyramid)

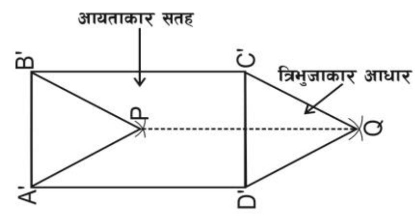
(क) त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

क्रियाकलाप : एउटा बाक्लो कागजमा एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै यसको नाम ABCD राख्नुहोस् । अब यसको लम्बाइ AB र CD लम्बाइ बराबर तीन भागमा बाड्नुहोस् । बाँडिएको भागलाई A', B', C', र D' ले जनाउनुहोस् । अब A', B', C', र D' लाई चित्रमा देखाए जस्तै जोड्नुहोस् । यसपछि A'B' र C'D' मासोही लम्बाइ भएका भुजाहरूबाट बन्ने समबाहु त्रिभुजहरू PA'B' र QC'D' बनाउनुहोस् । अब कैँचीको मदतले बाहिरी किनाराबाट रेखाहरूको सिधा पर्ने गरी



काट्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तो आकृति प्राप्त गर्नुहोस् । यसलाई त्रिभुजाकार प्रिज्मको जाली भनिन्छ ।

अब आयत ABCD लाई रेखा A' D' र B' C' मा पट्याउनुहोस् । यसरी नै समबाहु त्रिभुजहरू PA' B' र QC'D' लाई पनि क्रमशः A'B' र C' D' मा पट्याउनुहोस् । AD र BC खप्ट्याउनुहोस् । साथै PA', AA', PB' BB', QD', DD', QC' र CC' लाई पनि खप्ट्याउनुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तो आकृति बनाउनुहोस् । यसरी तयार भएको आकृतिलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म भनिन्छ ।



त्रिभुजाकार प्रिज्म

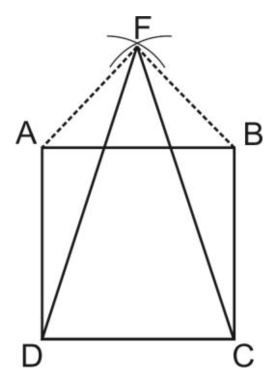
निष्कर्ष: *दुईओटा अनुरूप त्रिभुजाकार समानान्तर आधार र तीनओटा बराबर आयतकार सतह भएको ठोस वस्तुलाई त्रिभुजाकार प्रिज्म (Trianglular Prism) भनिन्छ ।*

(ख) पिरामिड (Pyramid)

एउटा त्रिआयामिक (Three dimensiona) ठोस वस्तु जसको एउटा बहुभुजाकार आधार हुन्छ, त्रिभुजाकार सर्तहरू हुन्छन् र आधारको विपरित एउटा शीर्षबिन्दु हुन्छ, त्यसलाई पिरामिड भनिन्छ ।

क्रियाकलाप : एउटा बाक्लो कागजमा वर्गको रचना गर्नुहोस् र त्यसको नाम ABCD राख्नुहोस् । अब AB, CD, BC र DA मा अनुरूप समद्विबाहु त्रिभुजहरू रचना गर्नुहोस् । यिनीहरूको नाम ABE, BCF, CDG र DAH राख्नुहोस् । अब कैँचीको मदतले बाहिरी किनोरे किनार काट्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तो आकृति प्राप्त गर्नुहोस् यसलाई पिरामिडको जाली भनिन्छ ।

अब यसरी काटिएको आकृतिलाई AB, BC, CD र DA मा पट्याउनुहोस् र चारओटै त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू E, F, G र H लाई एउटैमा खप्टिने गरी टाँस्नुहोस् । यसरी चित्रमा देखाए जस्तो आकृति प्राप्त गर्नुहोस् । यस्तो आकृतिलाई वर्गाकार आधार भएको पिरामिड (Pyramid) भनिन्छ ।

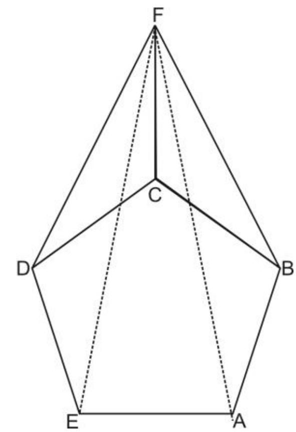


निष्कर्ष : *बहुभुजाकार आधार, त्रिभुजाकार सतहरू र आधारको विपरित एउटा शिर्षविन्दु हुने ठोस आकृतिलाई पिरामिड (Pyramid) भनिन्छ ।*

स्मरण रहोस् कि आधारको आकृतिको आधारमा विभिन्न प्रकारका पिरामिडहरू हुन्छन् । जस्तैः त्रिभुजाकार, पिरामिड, वर्गाधार पिरामिड, आयताकार पिरामिड, पञ्चभुजाधार पिरामिड, षट्भुजाधार पिरामिड आदि ।

उदाहरण 1

दिएको चित्रमा देखाएको ठोसको नाम, आधार र सतहरूको नाम लेख्नुहोस् ।



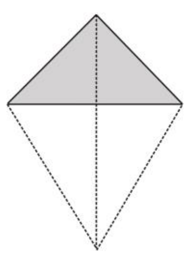
समाधान

दिएको ठोसको नाम पञ्चभुजाधार पिरामिड हो । यसको आधार पञ्चभुज ABCD र त्रिभुजाकार सतहहरू ABF, BCF, DFE, DCF र EAF छन् ।

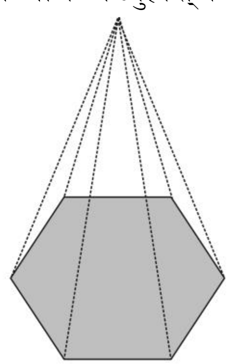
अभ्यास

1. चित्रमा देखाएका ठोसहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

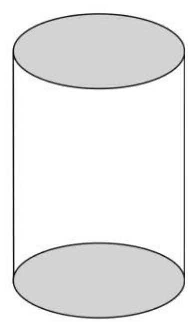
(क)



(ख)

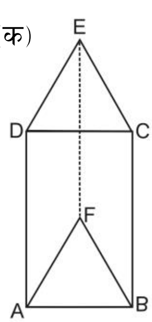


(ग)

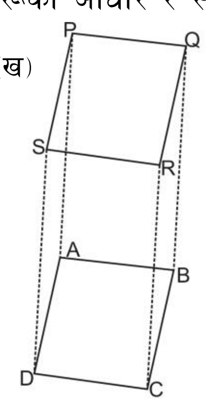


2. चित्रमा देखाएको ठोसहरूको आधार र सतहहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

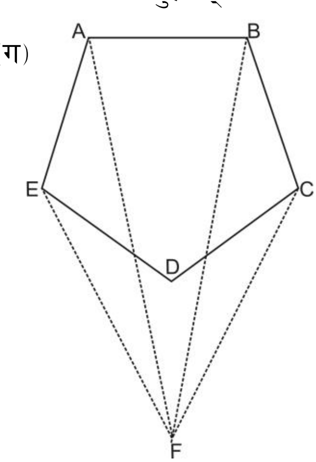
(क)



(ख)



(ग)



उत्तरहरू

1. (क) त्रिभुजाकार पिरामिड (ख) षट्भुजाधार पिरामिड (ग) बेलना
2. आधारहरू EDC र FAB त्रिभुजहरू हुन् ।

   (क) सतहहरू EDAF, ABCD र ECBF आयतहरू हुन् ।

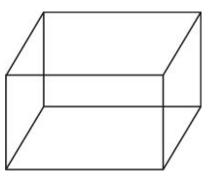
   (ख) वर्गहरू PQRS र ABCD आधार हुन् र आयातहरू PADS, PQBA, QBCR र RCDS सतहहरू हुन् ।

   (ग) षट्भुज ABCDE आधार हो र त्रिभजुहरू AEF, BCF, CDF र DEF सतहहरू हुन् ।

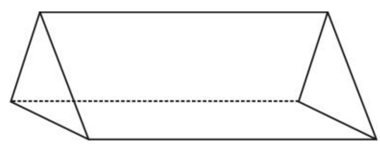
5.2 ठोस आकृतिहरूका जालीहरू (Nets of solid figures)

(क) त्रिभुजाकार प्रिजम्को जाली: त्रिभुजाकार प्रिज्मलाई सोलार यसको आधार र सतहहरूलाई सम्म पारेर राख्दा जस्तो आकृति बन्दछ त्यलाई त्रिभुजाकार प्रिज्मको जाली भनिन्छ ।

(क)

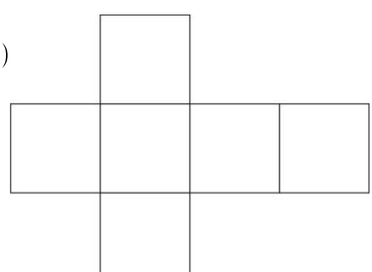


घन (Cube)

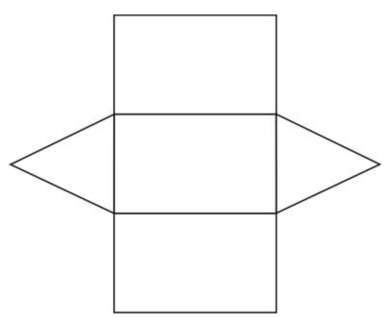


त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

(ख)

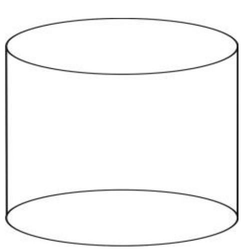


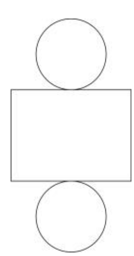
घनको जाली



त्रिभुजाकार प्रिज्मको जाली

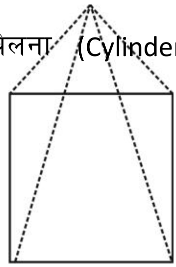
(ग)



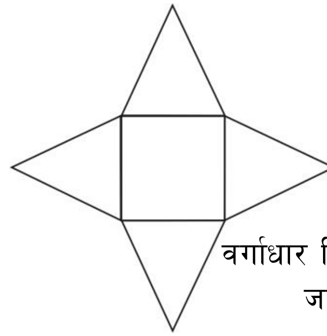


बेलनाको जाली

(घ)बेलना (Cylinder)

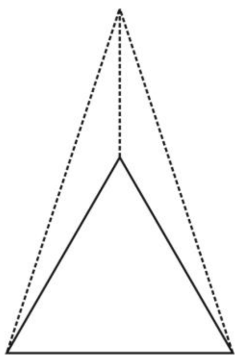


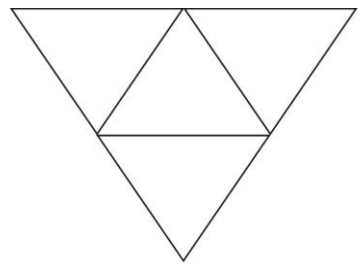
वर्गाधार पिरामिड
(Square Based Pyramid)



वर्गाधार पिरामिडको
जाली

(ङ)





त्रिभुजाधार पिरामिडको जाली

त्रिभुजाधार पिरामिड
(Tetrahedron)

अभ्यास

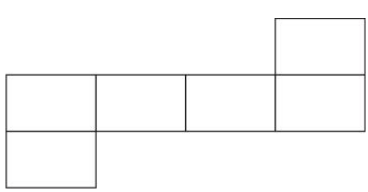
1. निम्न ठोस आकृतिहरूको जाली तयार गरी शिक्षकहरूलाई देखाउनुहोस् ।

    (क) षटमुखा (ख) घन (ग) सोली (घ) पञ्चभुजाधार पिरामिड

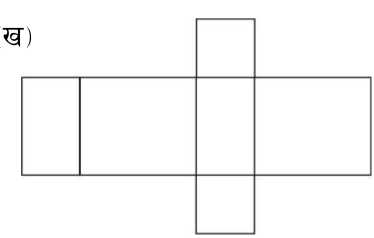
    (ङ) वर्गाधार पिरामिड (च) षटभुाधार पिरामिड

2. तलका जालीबाट बन्ने ठोसको नाम लेख्नुहोस् ।

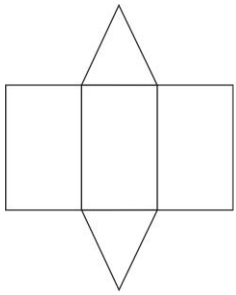
(क)



(ख)



(ग)



उत्तरहरू:

2. (क) घन (Cube)   (ख) षटमुखा (cuboid)

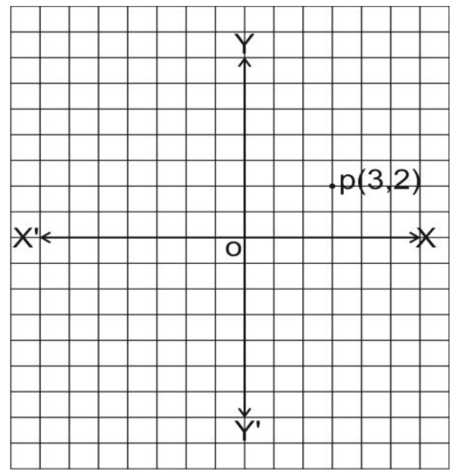
   (ग) त्रिभुजाकार प्रिज्म (Triangular Prism)

पाठ ६ :

बिन्दुका निर्देशाङ्कहरू

(Coordinates of a point)

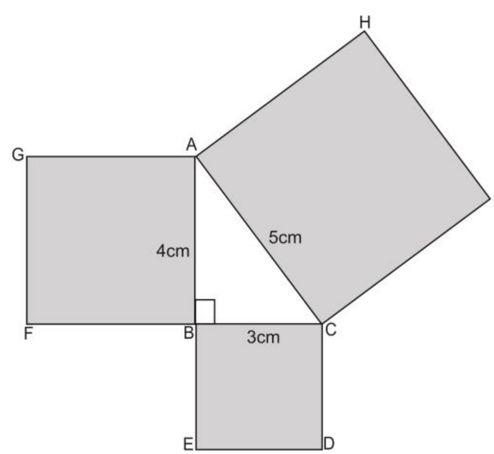
6.0 पुनरावलोकन (Revision)



सँगैको चित्रमा एउटा ग्राफको नमुना देखाएको छ । यसमा देखाएका रेखाहरू XOX' र YOY' लाई लाई X -अक्ष र Y -अक्ष भनिन्छ । यी दुवै अक्षहरू एक आपसमा लम्बार्धक हुन्छन् । यिनीहरू काटिएको बिन्दुलाई उद्गम बिन्दु भनिन्छ र यसलाई O ले जनाइन्छ । कुनै ज्यामितीय बिन्दु P का निर्देशाङ्क भन्नाले यसको Y-अक्ष र X- अक्ष देखिको दुरीलाई भन्ने गरिन्छ । P बिन्दुको Y-अक्षदेखिको दुरीलाई $X-$ निर्देशाङ्क ($x-$ coordinate or abscissa) भनिन्छ । बिन्दु P को X-अक्षदेखिको दुरीलाई $Y-$ निर्देशाङ्क ($y-$ coordinate or ordinate) भनिन्छ । P का निर्देशाङ्कहरू लाई P(x, y) लेखिन्छ । P(x, y) मा xभनेको $x-$निर्देशाङ्क र Y भनेको $Y-$ निर्देशाङ्क हो । माथिको चित्रमा XOY प्रथम चर्तुथाशं, YOX' लाई दोस्रो चर्तुथाशं, X'OY' लाई तेस्रो चर्तुथाशं र XOY' लाई चौंथो चर्तुथाशं भनिन्छ । कुनै बिन्दुP पहिलो, दोस्रो, तेस्रो र चौंथो चर्तुथाशंमा पर्दा यसको निर्देशाङ्कहरूलाई क्रमशः P(x, y), P$(-x, y)$, P$(-x, -y)$ र P$(x, -y)$ द्वारा लेख्ने चलन छ । माथि चित्रमा देखाएको बिन्दु P का निर्देशाङ्कहरू (3,2) छन् अर्थात् P बिन्दु Y- अक्षबाट 3 इकाइटाढा र X- अक्षबाट 2 इकाइटाढा छ ।

पाइथागोरस साध्य (Pythagoras theorem)

कथनः एउटा समकोण त्रिभुजको कर्णमा बनेका वर्गको क्षेत्रफल त्यसै समकोण त्रिभुजको आधारमा बनेको वर्ग र लम्बमा बनेको वर्गको क्षेत्रफलहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ । यो तथ्यलाई यसरी पनि भन्ने चलन छ । “समकोण त्रिभुजको कर्णको वर्ग = आधारको वर्ग + लम्बको वर्ग अर्थात् $h^2=p^2+b^2$ हुन्छ ।”



क्रियाकलाप : चित्रमा जस्तै कर्ण .5cm, आधार . 3cm र लम्ब . 4cm भएको समकोण त्रिभुज खिच्नुहोस् र यसको नाम ABC राख्नहोस् । अब कर्ण AC, आधार BC र लम्ब AB मा वर्गहरू बनाउनुहोस् । वर्गहरूको नाम ACIH, BCDE, र ABFG
राख्नुहोस् ।

अब वर्ग ABFG को क्षेत्रफल + वर्ग BCDE को क्षेत्रफल

$= (AB)^2 + (BC)^2$

$= (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$

$= (5)^2 = (AC)^2$

अतः $AC^2 = AB^2+BC^2$

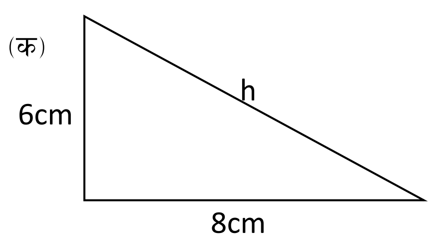
अर्थात् $\boxed{h^2=p^2+b^2}$

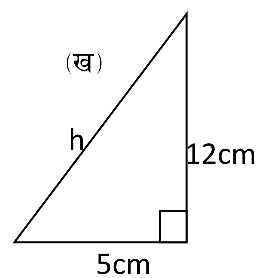
यहाँ, h,P र b लाई पाइथागोरस त्रेय (Pythagoras triples) भनिन्छ ।

जस्तैः (3, 4, 5) (9, 12, 15) इत्यादि

उदाहरण 1

दिएको चित्रहरूमा h को मान निकाल्नुहोस् ।





समाधान

(क) यहाँ, लम्ब (p)= 6cm र आधार (b)= 8cm, कर्ण (h)= ?

हामीलाई थाहा छ, $h^2 = p^2 + b^2$

$= (6cm)^2 + (8cm)^2$

$= 36cm^2+64cm^2$

$= 100\ cm^2$

$\therefore h = \sqrt{100cm^2} = 10cm$

(ख) यहाँ, लम्ब (p)= 12cm र आधार (b)= 5cm, कर्ण (h)= ?

हामीलाई थाहा छ, $h^2=p^2+b^2$

or, $h=\sqrt{p^2+b^2}$

$h=\sqrt{(12)^2+(5)^2}$

$=\sqrt{144+25}$

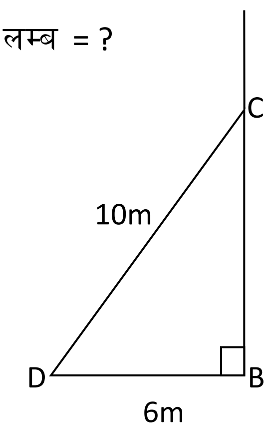
$=\sqrt{169}$

$=13cm$

उदाहरण 2

दिएको चित्रमा AB विजुलीको ठाडो खम्बा हो र CD त्यसमा अड्याएको भऱ्याङ हो । यदि भऱ्याङ CD =10m र भऱ्याङको फेददेखि खम्बाको फेदसम्मको दुरी DB = 6 m भए भऱ्याङको टुप्पो C देखि खम्बाको फेद सम्मको दुरी CB कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



यहाँ, CD=10 m =कर्ण DB=6m = आधार र CB = लम्ब = ?

हामीलाई थाहा छ, $(\text{कर्ण})^2 = (\text{आधार})^2 + (\text{लम्ब})^2$

or, $(CD)^2 = (DB)^2 + (CB)^2$

or, $(10)^2 = (6)^2 + (CB)^2$

or, $(CB)^2 = 100-36 = 64$

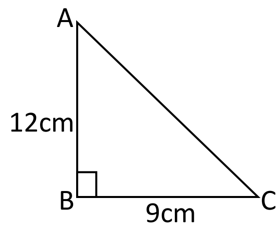
or, $CB = \sqrt{64} = 8$

$\therefore CB = 8$ m

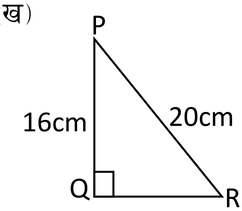
अभ्यास

1. तल दिएका समकोण त्रिभुजहरूमा बाँकी भुजाको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

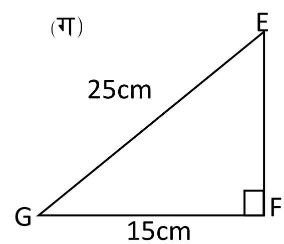
(क)



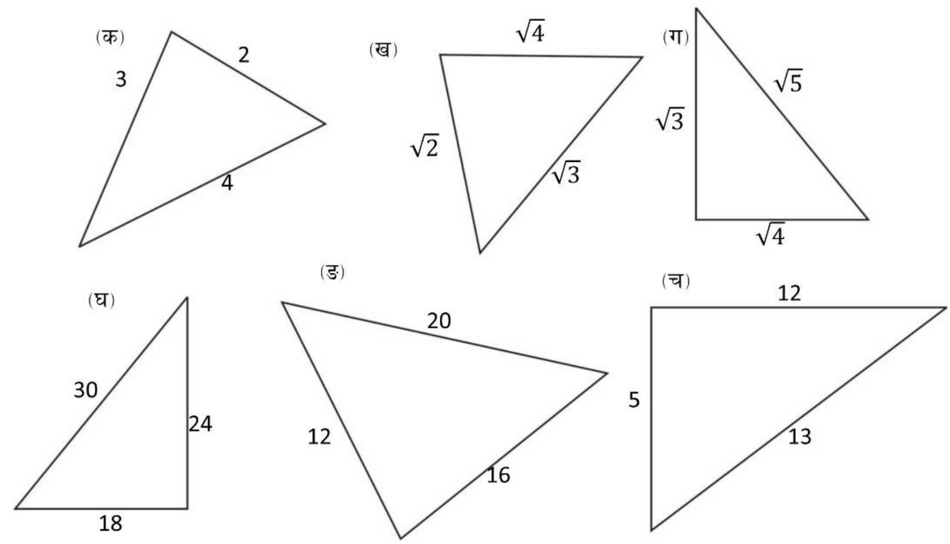
(ख)



(ग)



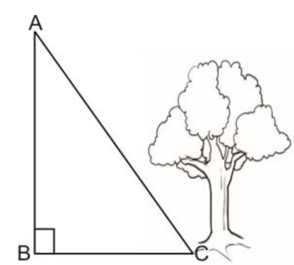
2. तल दिएका त्रिभुजहरूमा कुन कुन त्रिभुज समकोण त्रिभुज हुन् र कुन कुन होइनन् ? छुट्याउनुहोस् ।



3. 4cm भुजा भएको वर्गको विकर्णको लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।

4. चित्रमा देखाएको समबाहु चतुर्भजको भुजाको लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।

5. चित्रमा AC एउटा रुखको फेददेखि बिजुलीको खम्बाको टुप्पो सम्मको लम्बाइ हो र BC खम्बा र रुखको फेद बिचको दुरी हो । यदि BC = 24 cm, AC = 40 m भए खम्बा AB को उचाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



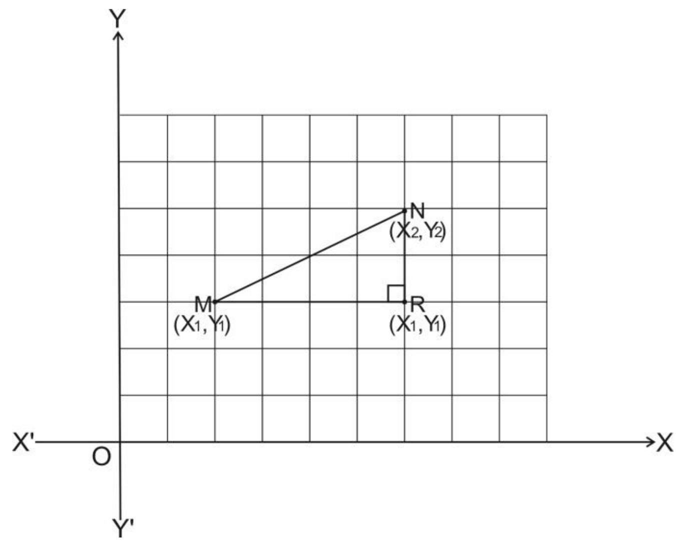
उत्तरहरू :

1. (क) AC = 15 cm (ख) QR = 12 cm (ग) EF = 20 cm

2. (क) होइन (ख) होइन (ग) होइन (घ) हो (ङ) हो (च) हो

3. $4\sqrt{2}$cm 4. 5 इकाइ 5. 32 m

6.1 दुई बिन्दुहरूविचको दुरी (Distance between two points)



चित्रमा देखाए जस्तै ग्राफपेपरमा धनात्मक X- अक्ष खिच्नुहोस् । अब प्रथम चर्तुथाशमा कुनै दुईओटा बिन्दुहरू $M(x_1,y_1)$ र $N(x_2,y_2)$ लिनुहोस् । अब M र N बाट OX मा MA र NB लम्बहरू खिच्नुहोस् । फेरि M बाट NB मा पनि लम्ब MR खिच्नुहोस् । यसरी समकोण त्रिभुज MNR बन्दछ । अब निर्देशाङ्कको परिभाषा अनुसार चित्रमा $OA=x_1$, $MA=Y_1$, $OB=x_2$ र $NB=y_2$ हुन्छ । तर MA=RB हुन्छ किन भने आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् । अत: $MA=RB=y_1$ हुन्छ । फेरि चित्रबाट प्रष्ट हुन्छ कि $NR=NB-RB=y_2-y_1$ हुन्छ । त्यस्तै $AB=OB-OA=x_2-x_1$ हुन्छ । फेरि आयत ABRM मा सम्मुख भुजा AB=भुजा MR हुन्छ । अत: $AB=MR=x_2-x_1$ हुन्छ । अब समकोण त्रिभुज MNR मा पाइथागोरस साध्य प्रयोग गर्दा $MN^2=MR^2+NR^2=(x_2-x_1)2+(y_2-y_1)^2$ (माथिको मान राख्दा) अथवा, $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

अत: M र N को बिचको दुरी $MN=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ हुन्छ ।

> साराशंमा दुईओटा विन्दुहरु (x_1, y_1)र (x_2y_2) लाई जोड्ने रेखाखण्डको लम्बाई (d) $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$इकाइ हुन्छ । यसलाई दुई बिन्दुबीचको दुरी निकाल्ने सुत्र (Distance formula) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

दुईओटा बिन्दुहरू P(2,3) र Q(6,8) को बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ: $P(x_1,y_1) = P(2,3)$ र $Q(x_2,y_2)= Q(6,8)$7u7

हामीलाई थाहा छ,

$$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(6-2)^2+(8-3)^2}$$

= $\sqrt{4^2 + 5^2}$

= $\sqrt{16 + 25}$

= $\sqrt{41}$ इकाइ

उदाहरण 2

बिन्दु A(0,6) र B(-10,0) बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ $A(x_1, y_1) = A(0,6) \therefore x_1 = 0, y_1 = 6$

$B(x_2, y_2) = B(-10,0) \therefore x_2=-10, y_2 = 0$

हामीलाई थाहा छ, $A(x_2, y_2)$ र $B(x_2,y_2)$ र $B(x_2, y_2)$ बिचको दुरी AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

= $\sqrt{(-10 - 0)^2 + (0 - 6)^2}$

= $\sqrt{(-10)^2 + (-6)^2}$

= $\sqrt{100 + 36}$

= $\sqrt{136}$

= $2\sqrt{34}$ इकाइ

उदाहरण 3

यदि बिन्दु A(-1, -5) र बिन्दु B(6, -5)

एउटा नदीको दुई किनारामा आमनेसामने छन् भने सो नदीको चौडाईको कति होला ?

समाधान

यहाँ $A(x_1,y_1) = A(-1, -5) \therefore x_1 = -1, y_1 = -5$

र $B(x_2,y_2)= B(6, -5) \therefore x_2= 6, y_2 = -5$

अतः नदीको चौडाइ= AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

or, AB= $\sqrt{(6 - (-1))^2 + (-5 - (-5))^2}$

= $\sqrt{(6 + 1)^2 + (-5 + 5)^2}$

= $\sqrt{(7)^2 + (0)^2}$

= 7

अतः नदीको चौडाइ= 7 इकाइ

उदाहरण 4

यदि कुनै त्रिभुजका शीर्ष बिन्दुहरू (0,0), (5,5) र (5, -5) भए त्यो कस्तो त्रिभुज हुन्छ ? दूरीको सूत्र प्रयोग गरी छुट्याउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू O(0,0), P(5,5) र Q(5, -5) हुन् । अब $O(x_1, y_1) = O(0,0)$
$\therefore x_1 = 0, y_1 = 0$

$P(x_2, y_2) = P(5,5) \therefore x_2 = 5, y_2 = 5$

र $Q(x_3, y_3) = Q(5,-5) \therefore x_3 =, y = -5$

अब दुईबिन्दु बिचको दुरीको सूत्र अनसार $OP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(5-0)^2 + (5-0)^2}$

$= \sqrt{(25)^2 + (25)^2}$

$= \sqrt{50}$

$\therefore OP = 5\sqrt{2}$ इकाइ

र $OQ = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(5-0)^2 + (-5-0)^2}$

$= \sqrt{25 + 25}$

$\therefore PQ = \sqrt{50}$

$= 5\sqrt{2}$इकाइ

र र $PQ = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(0 + (-10))^2}$

$= \sqrt{100}$

$= 10$

$\therefore PQ = 10$ इकाइ

यहाँ, $OQ = OP = 5\sqrt{2}$इकाइ छ । अतः त्रिभुज OPQ समद्विवाहु त्रिभुज हो ।

अभ्यास

1. तल दिएका बिन्दुहरू बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

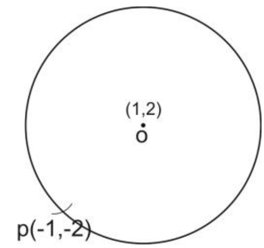
   (क) (1, 1) र (2, 3) (ख) (2, 4) र (5, 6) (ग) (4, -5) र (5, -3)

(घ) (0, 9) र (-10, 0) (ङ) (-3, -4) र (5, 6) (च) (7, 8) र (-1, -5)

(छ) (-3,-5) र (-4,-8) (ज) (0, 0) र (10, 8) (झ) ($\sqrt{2}$, 4) र (0,$\sqrt{2}$)

2. एउटा नदीको दुई किनारामा आमने सामने रहेका दुई ओटा बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू (8, 9) र (8,-9) भए नदीको चौडाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. दिएको चित्रमा 0(1, 2) वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो र बिन्दु $P(-1,-2)$ परिधिमा पर्ने बिन्दु भए यसको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।



6. शीर्षबिन्दुहरू (-1, 0), (0, 4) र (5, -4) भएको त्रिभुज विषमवाहु त्रिभुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

7. शीर्षबिन्दुहरू (1, 0), (6, 5) र (6, 0) भएको त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

8. बिन्दुहरू (1, 0), (1, 4), (3, 4) र (3, 0) आयतका शीर्षबिन्दुहरू हुनु भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

9. बिन्दुहरू (-1, 0), (-6, 0), (-6, -5) र (-1,-5) वर्गका शीर्षबिन्दुहरू वर्गका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

10. शीर्षबिन्दुहरू A(0, 4), B(5, 4), C(6, 0) र D(1, 0) भएको चतुर्भज ABCD समानान्तर चतुर्भज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

11. बिन्दुहरू (4, 5) र (-4, -5) उद्‌गम बिन्दु बाट बराबर दुरीमा छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

12. बिन्दुहरू (8, 4), (8, 0) र (8,-10) समरेखीय (एउटै रेखामा पर्ने) बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तरहरू

(1) (क) $\sqrt{5}$ इकाइ (ख) $\sqrt{13}$ इकाइ (ग) $\sqrt{5}$ इकाइ

(घ) $\sqrt{181}$ इकाइ (ङ) $\sqrt{164}$ इकाइ (च) $\sqrt{233}$ इकाइ

(छ) $\sqrt{10}$ इकाइ (ज) $\sqrt{164}$ इकाइ (झ) 2 इकाइ

(2) 18 इकाइ (3) समद्विवाहु त्रिभुज हो । (4) $\sqrt{41}$ इकाइ

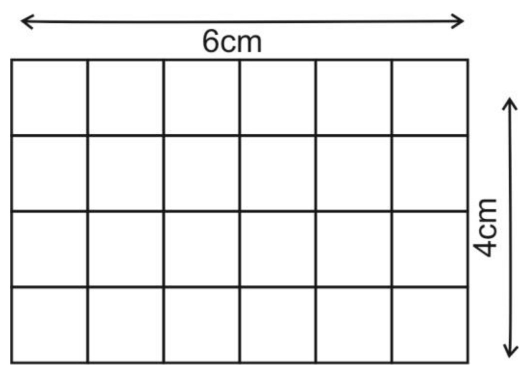
(5) $2\sqrt{5}$ इकाइ प्रश्न (6) देखि (12) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ ७ : ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल र आयतन

(Areas and volumes of Geometrical Figures)

(क) पुनरावलोकन (Revision)

क्रियाकलाप : एउटा 6cm लम्बाइ र 4cm चौडाइ भएको एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् । अब लम्बाइतिरबाट एक-एक से.मी. को दुरीमा ठाडो समानान्तर रेखाहरू तान्नुहोस् । यसरी नै चित्रमा देखाए जस्तै चौडाइ तिरबाट पनि एक-एक से.मी. को दुरीमा तर्सो समानान्तर रेखाहरू खिच्नुहोस् । यसरी आयतको सम्पूर्ण क्षेत्रफल स-साना वर्गहरूमा परिणत हुन्छ । जहाँ, प्रत्येक सानो वर्गको लम्बाइ र चौडाइ 1/1 से.मी. हुन्छन् । यस्ता वर्गको जम्मा सङ्ख्या 24 ओटा हुन्छ । अत: यो आयतको जम्मा क्षेत्रफल 24 वर्ग से.मी हुन्छ । यसरी प्रत्येक आयतको क्षेत्रफल निकाल्न सकिन्छ । यो विधि लामो हुन्छ । आयातको यो क्षेत्रफल निकाल्न लम्बाइ 6cm र चौडाइ 4cm लाई गुणन गर्दा प्राप्त हुन्छ । जस्तै 24 वर्ग से.मी.= 6 से.मी. x4 से.मी. हुन्छ । अत: आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ (l) x चौडाइ(b) हुन्छ अर्थात् A=lxb वर्ग इकाइ हुन्छ । यसरी नै वर्गको क्षेत्रफल निकाल्ने सूत्र यसप्रकार छ:



वर्गको क्षेत्रफल (A) = lxb = lxl

= l^2 वर्ग इकाइ (किनकी वर्गको लम्बाइ = चौडाइ हुन्छ ।)

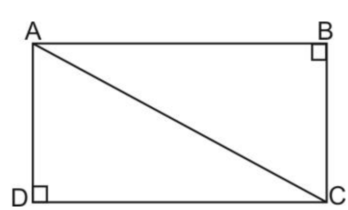
∴ A = l^2 वर्ग इकाइ

7.1 त्रिभुज र चतुर्भजको क्षेत्रफल (Area of Triangles and Quadrilaterals)

(क) त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle)

क्रियाकलाप: आयत ABCD को रचना गर्नुहोस् । जहाँ AB = लम्बाइ

(l) र BC = चौडाइ (b) मान्नुहोस् ।



यस आयतको विकर्ण AC लाई जोड्नुहोस् । यसरी दुईओटा त्रिभुजहरू ADC र ABC तयार हुन्छन् । यि त्रिभुजहरूमा भुजा AD = भुजा BC, भुजा AB= भुजा DC हुन्छन् । किनभने आयतका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् । साथै भुजा AC दुवैको साझा भुजा हो । अतः भु.भु.भु. तथ्य अनुसार त्रिभुज ADC रत्रिभुज ABC अनुरूप हुन्छन् । अब आयत ABCD लाई काट्नुहोस् र फेरि विकर्ण AC तिरबाट काटेर दुईओटा त्रिभुजहरूमा बिभाजन गर्नुहोस् । यसरी प्राप्त त्रिभुजहरूलाई आपसमा खप्ट्याउनुहोस् । खप्टयाउदा भुजा AB माथि भुजा CD र भुजा CB माथि भुजा AD पर्नु पर्छ । यसरी खप्ट्याउँदा दुवै त्रिभुजहरूले एक अर्कालाई ढाकेर एउटै त्रिभुज जस्तो आकृति बन्दछ । यसबाट यी दुई त्रिभुजहरूका क्षेत्रफलहरू बराबर छन् भन्ने प्रष्ट हुन्छ । यो प्रयोगले अनुरूप त्रिभुजहरूका क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् भन्ने पुष्टि हुन्छ । तर अनुरूप त्रिभुजहरू ADC र ABC लाई जोड्दा आयत ABCD बन्दछ । अतः ΔADC र ΔABC प्रत्येकको क्षेत्रफल आयतको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ । तर आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ (l) x चौडाइ (b) हुन्छ ।

अर्थात् आयत ABCD को क्षेत्रफल $= l \times b = AB \times BC = DC \times AD$

$=$ आधार x उचाइ $= b \times h$

अतः त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = त्रिभुज ADC को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}$ आयत ABCD को क्षेत्रफल

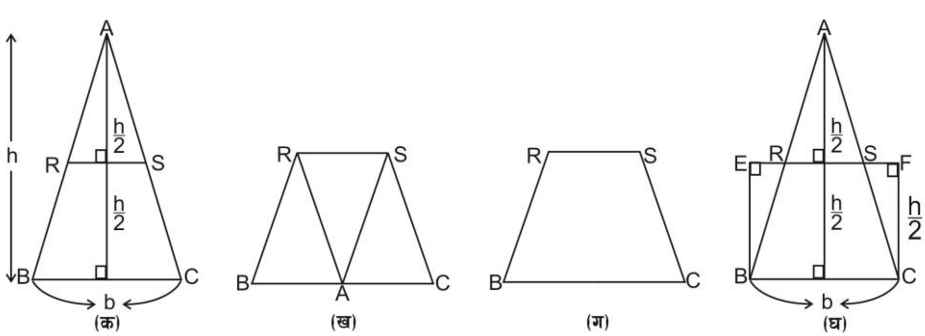
$= \frac{1}{2}$(आधारxउचाइ) $= \frac{1}{2}(b \times h)$

अतः त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधारxउचाइ)

$= \frac{1}{2}$ (base x height)

$= \frac{1}{2}$ -b x h) हुन्छ ।

अर्को तरिका : कार्ड बोर्डमा उचाइ (h) र आधार (b) भएको एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् । अब चित्र (ख) मा देखाए जस्तै यो त्रिभुजलाई उचाइको आधा भागबाट आधार BC सँग समानान्तर हुने गरी पट्याउनुहोस् । यसरी पट्याउँदा बिन्दु A ले आधार BC लाई छोएको हुनुपर्छ ।



पट्याइएको रेखाको नाम RS राखौँ र कैंचीले त्रिभुज ARS लाई RS तिरबाट काटौँ। फेरित्रिभुज ARS को शीर्षबिन्दु A बाट आधार RS मा लम्ब खिचौं। अब कैंचीको मदतले ΔARS को लम्ब हुँदै काटेर दुईओटा साना त्रिभुजहरूमा बाँडौं । अब यि दुईओटा त्रिभुजहरूलाई चतुर्भज RSCB को SC र RB छेउमा टाँसेर चित्र (घ) मा जस्तो आयत EFCB बनाऔं। अब आयत EFCB को आधार b र उचाइ $\frac{h}{2}$ हुन्छ। अत: आयत EFCB को क्षेत्रफल

= लम्बाइ x चौडाइ

$= b \times \frac{h}{2}$

$= \frac{1}{2} b \times h$ हुन्छ।

तर आयत EFCB त्रिभुज ABC बाट बनेको हुँदा यी दुवैको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ। अत:

$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times b \times h$

अथवा

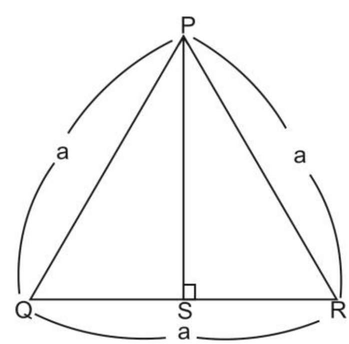
$\boxed{\Delta ABC = \frac{1}{2}(\text{आधार} \times \text{उचाइ})}$

सारांशमा, कुनै पनि त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधारxउचाइ

$= \frac{1}{2}(bxh)$ वर्ग इकाई हुन्छ।

(ख) समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of equilateral triangle)

क्रियाकलाप: चित्रमा देखाए जस्तै सबै भुजा बराबर भएको एउटा त्रिभुज PQR खिच्नुहोस् र प्रत्येक भुजाको लम्बाइलाई 'a' इकाइ मान्नुहोस् । अब शीर्षबिन्दु P बाट आधार QR मा लम्ब PS खिच्नेहोस। समबाहु त्रिभुजको गुण अनुसार PS ले आधार QR लाई आधा गर्दछ । अब समकोण त्रिभुज PSR मा पाइथागोरस साध्य अनुसार PS= $\sqrt{RP^2 - SR^2}$



$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$ $(\because SR = \frac{a}{2})$

$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

$= \frac{a}{2}\sqrt{3}$

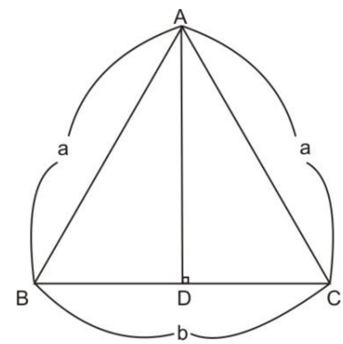
$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ इकाइ $= \Delta PQR$ को उचाइ

अतः त्रिभुज PQR क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधारxउचाइ

$= \frac{1}{2} \text{x} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ वर्ग इकाइ

अतः समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ वर्ग इकाइ हुन्छ, जहाँ a भनेको एउटा भुजाको लम्बाइ हो ।

(ग) समद्विवाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of isosceles triangle)



क्रियाकलापः एउटा समद्विवाहु त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् । जसको प्रत्येक बराबर भुजाको लम्बाइ a इकाइ र आधार भुजाको लम्बाइ b इकाइ मान्नुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै शीर्षबिन्दु A बाट आधार BC मा लम्ब AD खिच्नुहोस् । समद्विबाहुको त्रिभुजको विशेषता अनुसार लम्ब AD ले BC लाई आधा गर्दछ । अतः BD = DC $= \frac{b}{2}$ अब समकोण त्रिभुज ADC मा, DC $= \frac{b}{2}$ र AC = a अतः पाइथागोरस साध्य अनुसार AD$= \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$

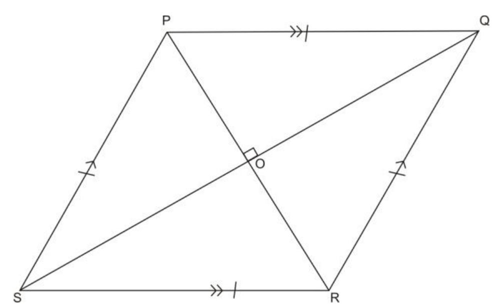
अतः त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार×उचाइ

$= \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$= \frac{1}{4} b\sqrt{4a^2 - b^2}$ इकाइ

∴समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) $= \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$इकाइ हुन्छ । जहाँ b आधार भुजा र भुजा र a बराबरको भुजाको लम्बाइ हो ।

(घ) समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Rhombus)



क्रियाकलाप : चित्रमा देखाए जस्तै एउटा समबाहु चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस् । यसको विकर्णहरू PR र QS लाई जोड्नुहोस् । PR र QS को लम्बाइलाई d1 र d2 मान्नुहोस् समबाहु चतुर्भजको विशेषता अनुसार

PR र QS एक अर्काका लम्बार्धक हुन्छन् भन्ने तथ्य हामीलाई थाहा छ ।

अत: समबाहु चतर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = त्रिभुज PQS को क्षेत्रफल+त्रिभुज QRS को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\text{x } QS \times PO + \frac{1}{2} QS\text{x}RO$

$= \frac{1}{2} QS(PO+RO)$

$= \frac{1}{2} QS \times PR$

$= \frac{1}{2} d_2 \times d_1$

अत: समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल= $\frac{1}{2} d_1 \times d_2$, जहाँ d_1 र d_2, विकर्णहरूको लम्बाइ हुन् ।

(ङ) चङ्गाको क्षेत्रफल (Area of a kite)

क्रियाकलाप: चित्रमा जस्तै एउटा चङ्गा ABCD को रचना गर्नुहोस् । यसको विकर्णहरू AC र BD पनि एक अर्कासँग लम्ब हुन्छन् । AC र BD लाई जोड्नुहोस् र तिनीहरूको लम्बाइलाई d_1 र d_2 मान्नुहोस् । अब चङ्गाको क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD क्षेत्रफल+ त्रिभुज BCD को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} AO\text{x}BD + \frac{1}{2} CO\text{x}BD$

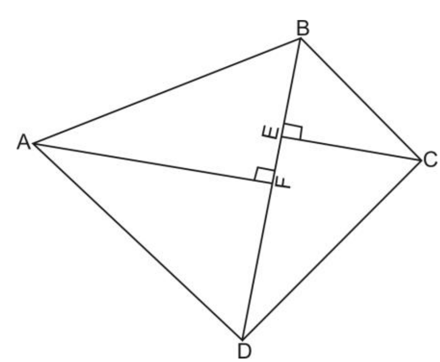
$= \frac{1}{2} BD\ (AO + CO) = \frac{1}{2} BD\text{x}AC$

$= \frac{1}{2} d_1\text{x}d_2$

∴चङ्गााको क्षेत्रफल(A)= $\frac{1}{2} d_1\text{x}d_2$, जहाँ d_1 र d_2, दुईवटा विकर्णहरू हुन् ।

(च) चतुर्भजको क्षेत्रफल (Area of a quadrilateral)

क्रियाकलाप: चित्रमा देखाए जस्तै एउटा चतुर्भुज ABCD को रचना गर्नुहोस् । यसको एउटा विकर्ण BD लाई जोड्नुहोस् । अब A र C बाट BD मा लम्बहरू AF र CE खिच्नुहोस् । अब चतुर्भजको ABCD को क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD को क्षेत्रफल + त्रिभुज BCD को क्षेत्रफल



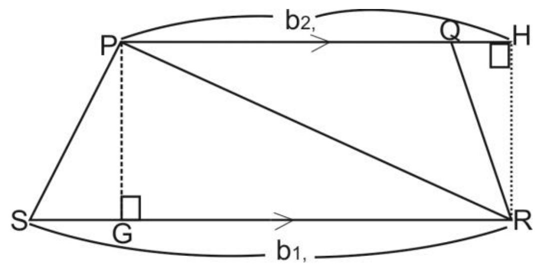
$= \frac{1}{2} BD \text{ x } AF + \frac{1}{2} BD \text{ x } CE$

$= \frac{1}{2} BD(AF + CE)$

अत: चतुर्भजको क्षेत्रफल= $\frac{1}{2}$ x एउटा विकर्ण x (विपरित शिर्षविन्दुहरुबाट खिचिएका लम्बहरुको लम्बाईको योगफल) = $\frac{1}{2} BD\ (P_1+P_2)$

(छ) समलम्ब चतुर्भजको क्षेत्रफल (Area of a Trapezium)

क्रियाकलाप : चित्रमा देखाए जस्तै एउटा समलम्ब चतुर्भज PQRS खिच्निुहोस् । यसको एउटा विकर्ण PR लाई जोड्नुहोस् । अब R र P बाट लम्बहरू खिच्नुहोस् जसले लम्ब्याएको PQ लाई H मा र SR लाई G मा भेट्छ । मानौं PQ = b_2 र SR = b_1 अब



समलम्ब चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल = त्रिभुज PQR को क्षेत्रफल + त्रिभुज PSR को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \text{ x SR x PG} + \frac{1}{2}\text{PQ x RH}$

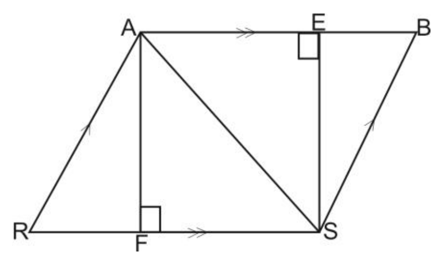
$= \frac{1}{2}\text{SR x PG} + \frac{1}{2}\text{PQ x PG } (\therefore \text{PG = RH})$

$= \frac{1}{2}\text{PG (SR + PQ)} = \frac{1}{2}$x उचाइ x (आधारहरूको योगफल)

अत: उचाइ { h र आधारहरु b_1 र b_2 भएको समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$x उचाइ x (आधारहरुको योगफल)= $\frac{1}{2}$h (b_1+b_2)

(ज) समानान्तर चतुर्भजको क्षेत्रफल (Area of Parallelogram)

क्रियाकलाप : चित्रमा देखाए जस्तै एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD को रचना गर्नुहोस् । विकर्ण AC जोड्नुहोस् अब C बाट AB मा लम्ब CE र A बाट DC मा लम्ब AF खिच्नुहोस् । अब: समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = त्रिभुज ADC को क्षेत्रफल + त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$AFxDC + $\frac{1}{2}$CExAB



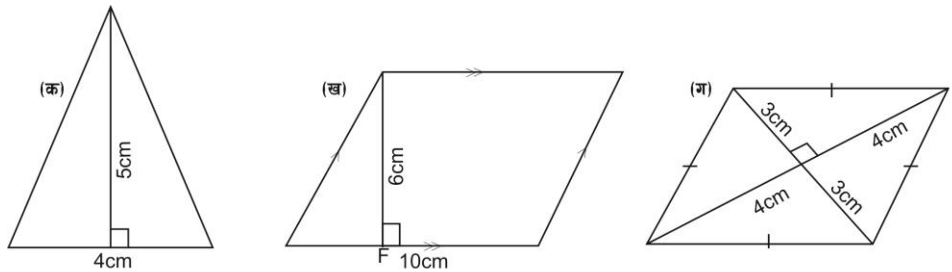
$= \frac{1}{2}\text{AF x DC} + \frac{1}{2}\text{AF x DC}$ (AB = DC र CE = AF)

= AF x DC = DC x AF = आधार x उचाइ

अत: आधारको लम्बाइ b र उचाइ h भएको समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल A= bxh हुन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिएका समतलीय आकृतिहरू क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



समाधान

(क) यहाँ, त्रिभुजको आधार (b) = 4cm र उचाइ (h)= 5cm

अत: त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$x आधारx उचाइ

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ वर्ग से.मी.

(ख) यहाँ, समानान्तर चतुर्भुजको उचाइ (h) = 6cm र आधार (b) = 10 cm

अत: समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार x उचाइ

$= 10 \times 6 = 60cm^2$

(ग) यहाँ, समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरूको लम्बाइ $(d_1) = 3+3 = 6cm$ र

$d_2 = 4+4 = 8cm$

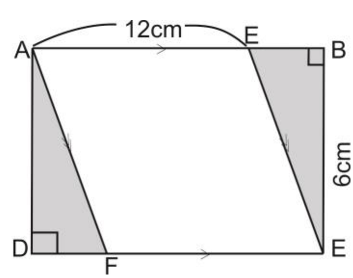
अत: समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 6cm \times 8cm$

$= 24\ cm^2$

उदाहरण 2

दिएको चित्रमा आयत ABCD को क्षेत्रफल $90cm^2$भए छाया पारेको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= 12\ cm \times 6\ cm$

$= 72\ cm^2$

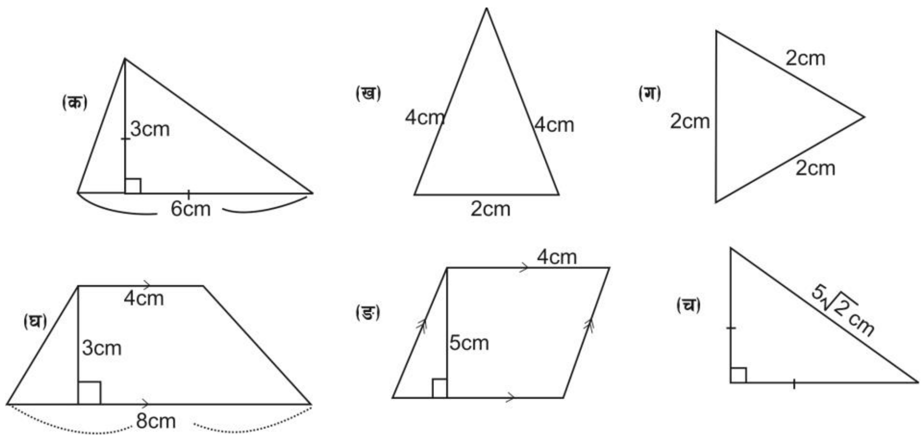
र आयतको क्षेत्रफल $= 90\ cm^2$

अतः छाया पारेको क्षेत्रफल $= 90\ cm^2 - 72\ cm^2$

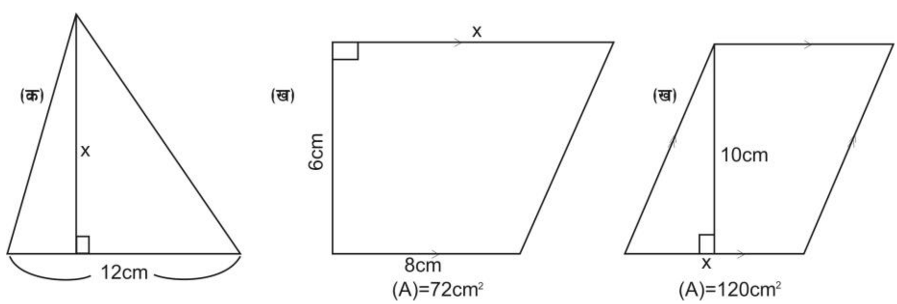
$= 18\ cm^2$

अभ्यास

1. निम्न ज्यामितीय चित्रहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

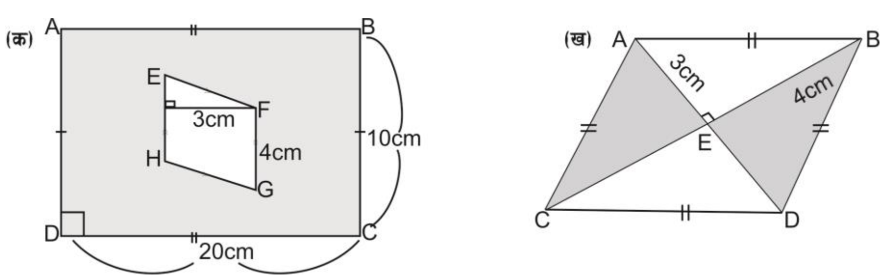


2. तलका चित्रहरूमा x को मान निकाल्नुहोस् । जहाँ क्षेत्रफल (A) दिएको छ ।



(A)=60 cm²

3. तल दिएका चित्रहरूमा छाया पारेको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।



4. एउटा वर्गाकार खेल मैदान भित्र एउटा वृताकार पौडी पोखरी छ । यदि खेल मैदानको लम्बाइ 250m र पोखरी बाहेकको मैदानको क्षेत्रफल 61114 वर्ग मिटर भए पोखरीको अर्धव्यास कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा समबाहु त्रिभुजको भुजा 616 वर्ग से.मी. क्षेत्रफल भएको वृत्तको अर्धव्यासको दुई गुना भए सो त्रिभुजको क्षेत्रफल कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू :

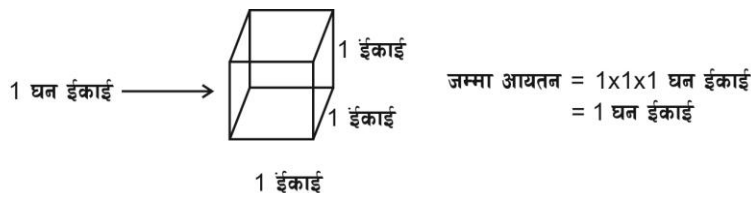
1.	(क) $9cm^2$	(ख) $\sqrt{15}cm^2$	(ग) $\sqrt{3}$वर्ग से.मी.
	(घ) 18 वर्ग से.मी.	(ङ) 20 वर्ग से.मी.	(च) 12.5 वर्ग से.मी.
	(छ) 40 वर्ग से.मी.	(ज) 12 वर्ग से.मी.	(झ) 12 वर्ग से.मी.
	(ञ) 35 वर्ग से.मी.	(ट) 14 वर्ग से.मीं	
2.	(क) $x = 10$ से.मी.	(ख) $x = 16$ से.मी.	(ग) $x = 12$ से.मी.
3.	(क) 188 वर्गसे.मी.	(ख) 12 वर्गसे.मी.	
4.	21 मिटर		
5.	$196\sqrt{3}$वर्ग से.मी.		

7.2 घन र षड्मुखाको आयतन (Volume of a cube and a cuboid)

समतलीय ज्यामितीय चित्रहरूले सतहलाई जति मात्रामा ढाक्न सक्छ त्यसलाई त्यो आकृतिको क्षेत्रफल भनिन्छ । यो क्षेत्रफल दुई दिशामा बढाउन र घटाउन सकिन्छ । त्यसैले यो दुई आयामिक हुन्छ । दुवै दिशाको विस्तारको एउटै इकाइमा गुणन गर्दा क्षेत्रफलका इकाइबन्ने हुँदा क्षेत्रफलको इकाइवर्ग इकाइमा लेखिन्छ । यदि लम्बाइ र चौडाइतिरको विस्तार एक-एक इकाइ बराबर भए त्यस्तो चित्रको क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाइ हुन्छ । एक वर्ग इकाइ क्षेत्रफलबाट अरु सबै क्षेत्रफल गणना गर्न सकिन्छ, जुन कुरा हामीले यो भन्दा अघिल्लो अध्यायमा पढि सक्यौ । यस अध्यायमा हामीहरू ठोस आकृतिहरूको आयतन गणना गर्न सिक्ने छौं ।

सबै खाले ज्यामितीय ठोसहरूले सतहलाई मात्र नढाकि आकासलाई समेत ओगट्ने गर्दछन् । यसरी ठोस वस्तुहरूले जुन मात्रामा सतह र आकासलाई ओगट्छन्, त्यसलाई ती ठोसहरूको आयतन भनिन्छ । यस्तो खाले आयतन बढ्ने

र घट्ने तीनओटा दिशा हुन्छन् । यसैले आयतनलाई त्रिआयामिक (three dimensional) भनिन्छ । यी तीनओटा दिशाहरूलाई लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ भनिन्छ । यदि कुनै ठोसको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ तिरको विस्तार समान एक-एक इकाइको भए त्यसको आयतन 1 घन इकाइ हुन्छ किनकि यो तीन ओटैलाई गुणन गरेर प्राप्त हुन्छ । अर्थात् 1 घन इकाइ = 1 इकाइ x 1 इकाइ x 1 इकाइ हुन्छ । अतः घन इकाइलाई आयतनको इकाइ मानिन्छ । कुनै ठोसले ओगटेको आकासमा जतिओटा 1 घन इकाइ अटाउँछन् त्यसलाई सो ठोसको आयतन भनिन्छ । यसरी 1 घन इकाइको जम्मा सङ्ख्या जोडेर सबै ठोसहरूको आयतनको गणना गरिन्छ ।



एउटा पातलो कागजको बाकस जसको लम्बाइ 6cm, चौडाइ 4cm र उचाइ 3cm छ, त्यसभित्र 1 घन से.मी. अर्थात् 1 cm^3 आयतन भएका 72 ओटा इकाइ धनहरू अटाएको पाइन्छ । अतः सो बाकसको आयतन 72 cm3 अर्थात् 72 घन से.मी. छ भनिन्छ ।

यहाँ 72 घन से.मी. = 6cm x 4cm x 3cm

= 6 से.मी x 4 से.मी x 3 से.मी

= लम्बाइ x चौडाइx उचाइ

अतः एउटा षट्मुखा जसको लम्बाइ (l), चौडाइ (b) र उचाइ (h) त्यसको आयतन (v)= (l x b x h) घन इकाइ हुन्छ ।

लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएका षट्मुखालाई घन (Cube) भनिन्छ ।

अतः घनको आयतन (v)= l x b x h

= l x l x l

= l^3

माथिको आयतनको सूत्रलाई यसरी पनि लेख्न मिल्छः

षट्मुखाको आयतन (v)= l x b x h

= (l x b)xh

= आधारको क्षेत्रफल x उचाइ

अतः आयतन (v)= आधारको क्षेत्रफल x उचाइ हुन्छ। यो सूत्र सबै ठोसहरुका लागि लागु हुन्छ।

उदाहरण 1

लम्बाइ, चौडाइर उचाइ क्रमशः 6cm, 5cm र 4cm भएको षट्मुखाकार बाकसको आयतन कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, l = 6cm, b = 5cm र h = 4cm, आयतन (v) = ?

हामीलाई थाहा छ, आयतन (V) = l x b x h

$= (6 \times 5 \times 4)\ cm^3$

$= 120\ cm^3$

अतः सो बराबरको आयतन = $120\ cm^3$

उदाहरण 2

आधारको क्षेत्रफल 100 वर्ग मिटर भएको घनाकार कोठाको आयतन निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ घनाकार कोठाको आधारको क्षेत्रफल (A) =$100m^2 = l^2$

$\therefore l = \sqrt{100m^2} = 10\ m$

अतः घनाकार कोठाको आयतन (V) = l^3m^3

$= (10)^3m^3$

$= 1000\ m^3$

उदाहरण 3

$1680m^3$ पानी अटाउने एउटा षट्मुखाकार ट्याङ्कीकोउचाइ5m भए यसको आधारको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

यहाँ आयत (V)= $1680m^3$

उचाइ (h) = 5m

आधारको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, आयतन (V) = Axh

or, A=$\frac{V}{h}$ = $\frac{1680}{5}$

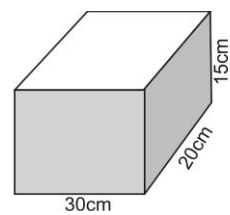
= 336 m^2

अत: ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल = 336m^2

उदाहरण 4

चित्रमा एउटा षट्मुखाकार बाकस देखाएको छ । यो बाकसमा 5cm लम्बाइ, 3cm चौडाइ र 2cm उचाइ भएका कति ओटा साबुनका बट्टाहरू अटाउँछन् ? पत्ता लगाउन्होस् ।

समाधान



यहाँ बाकसको आयतन (V) = lxbxh

= (30x20x15) cm^3

= 9000cm^3

एउटा साबुनको षट्टाको आयतन (V)= lxbxh

= (5x3x2) cm^3 = 30cm^3

अत: साबुनको बट्टाको सङ्ख्या = $\frac{\text{बाकसको आयतन}}{\text{एउटा साबुनको आयतन}}$

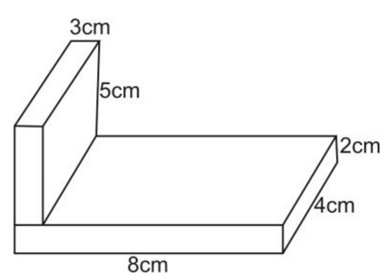
= $\frac{V}{v}$

= $\frac{9000cm^3}{30cm^3}$ = 300

अत: सो बाकसमा 300 ओटा साबुनका बट्टाहरू अटाउँछन् ।

उदाहरण 5

दिएको चित्रमा देखाएको ठोसको आयतन कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

दिएको ठोसका दुईओटा षट्मुखाकार भागहरू छन् ।

तेर्सो भागको आयतन= 8x4x2 = 64 cm^3

र ठाडो भागको आयतन = 60 cm^3

अत: जम्मा आयतन = 64 cm^3+60 cm^3 = 124cm^3

अभ्यास

1. निम्न नाप भएका षट्मुखाहरूको आयतन निकाल्नुहोस् ।

	लम्बाइ	चौडाइ	उचाइ
(क)	8cm	6cm	4cm
(ख)	7cm	6cm	4cm
(ग)	9cm	7cm	5cm
(घ)	18cm	14cm	9cm
(ङ)	24cm	20cm	15cm
(च)	20cm	15cm	10cm
(छ)	100cm	50cm	40.5cm

2. निम्न भुजा भएका घनहरूको आयतन निकाल्नुहोस् ।

   (क) 4 cm (ख) 5cm (ग) 6cm

   (घ) 1.5m (ङ) 7ft (च) 10 Inch

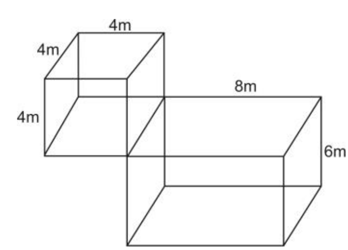
3. एउटा 15cm लम्बाइ, 12cm चौडाइ र 8cm उचाइ भएको षट्मुखाको भित्र 4cm लम्बाइ, 3cm चौडाइर 2cm उचाइ भएका कति ओटा षट्मुखाहरू अटाउँछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. एउटा 10 cm भुजा भएको घन भित्र 5cm भुजा भएको कति ओटा घनहरू अटाउँछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा 1.5m भुजा भएको घनाकार पानी ट्याङ्कीमा जम्मा कति लिटर पानी अटाउँछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

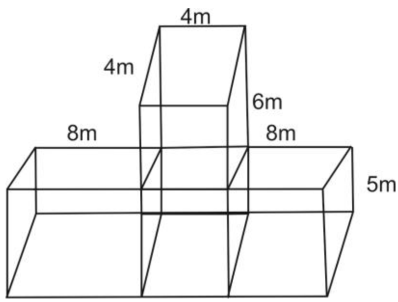
6. भित्री लम्बाइ 15cm, चौडाइ12cm र उचाइ 8cm भएको काठको बाकसभित्र लम्बाइ 3cm, चौडाइ 2cm र उचाइ 1.5 cm भएका कतिओटा बिस्कुटका बट्टाहरू अटाउँछन् । ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा घनाकार ठोसको आयतन $216m^3$ भए त्यसको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



8. एउटा षट्मुखाको आयतन $12900m^3$ र आधारको क्षेत्रफल $150m^2$ भए त्यसको उचाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्

9. निम्न ठोसहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तरहरू

1 (क) 192 cm^3 (ख) 168 cm^3 (ग) 315 cm^3 (घ) 2268 cm^3

(ङ) 7200cm^3 (च) 3000 cm^3 (छ) 202500 cm^3

2 (क) 64cm^3 (ख) 125 cm^3 (ग) 216 cm^3 (घ) 3.375 m^3

(ङ) 343ft^3 (च) 1000 घन इन्च

(3) 60 ओटा (4) 8 ओटा (5) 3375 लिटर (6) 160 ओटा

(7) 6 मिटर (8) 86 मिटर (9) (क) 256 m^3 (ख) 496 cm^3

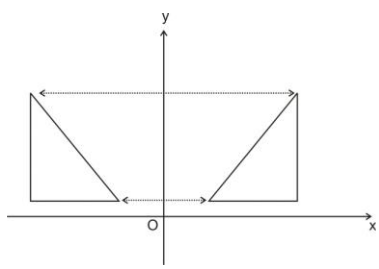
पाठ ८

स्थानान्तरण (Transformation)

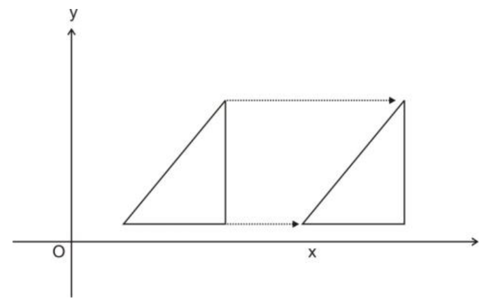
8.0 पुनरावलोकन

हामीहरूले अघिल्ला कक्षाहरूमा परावर्तन, विस्थापन र परिक्रमणको बारेमा सामान्य अध्ययन गरिसकेका छौँ । जस्तै निम्न चित्रहरूमा परावर्तन, विस्थापन र परिक्रणका नमुनाहरू देखाइएको छ । यिनीहरूको बारेमा आपसमा छलफल गर्नुहोस् ।

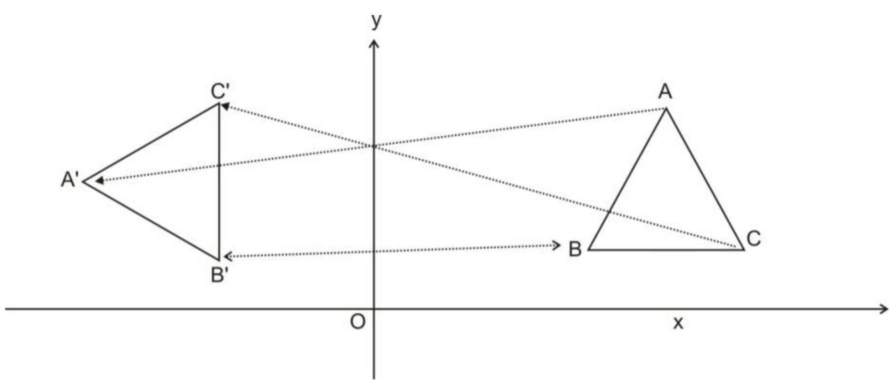
(क)



(ख)



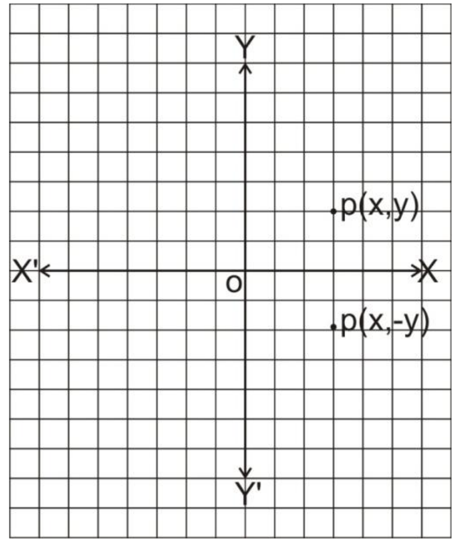
(ग)



8.1 परावर्तन (Reflection)

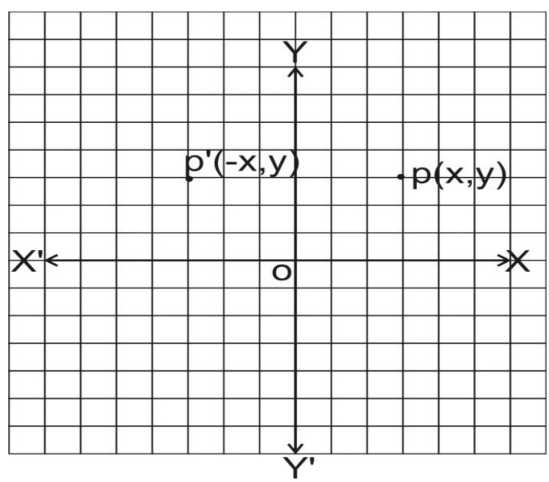
माथि चित्र (क) मा दुईओटा त्रिभुजहरू y – अक्षमा एक-अर्काको परावर्तित आकृति बनेका छन् । यस अध्यायमा हामीहरू यस्तै परावर्तनको बारेमा निर्देशाङ्क ज्यामितिको मद्दतले अध्ययन गर्नेछौँ ।

(क) कुनै बिन्दु (x, y) को $x-$अक्षमा परावर्तन गर्ने तरिका



मानौँ, कुनै बिन्दु $P(x, y)$ छ । निर्देशाङ्क ज्यामिति अनुसार यो बिन्दु पहिलो चर्तुथाशंमा पर्दछ । यसको निर्देशाङ्कहरू (x, y) छन् । जसको अर्थ यो बिन्दु $Y-$अक्षबाट x इकाइ दाँया र $X-$ अक्षबाट y इकाइ माथि पर्दछ । यदि यो बिन्दु $P(x, y)$ $X-$ अक्षमा परावर्तित भयो भने यसको परावर्तित आकृति $P'(x, -y)$ हुन्छ, जुनबिन्दु चौथो चतुर्थाशंमा पर्दछ । $P'(x, -y)$ को अर्थ P' बिन्दु $Y-$ अक्षदेखि x इकाइ दाँया नै पर्दछ तर $X-$अक्षदेखि y इकाइ तलतिर पर्दछ । यसबाट प्रष्ट हुन्छ कि $P(x, y)$ र यसको परावर्तित आकृति $P'(x, -y)$ $X-$अक्षबाट बराबर दुरीमा पर्दछन्, अर्थात दुवै बिन्दुहरू एउटै ठाडो रेखामा $X-$अक्षभन्दा ठिक माथि र तल पर्दछन् । यसलाई बिन्दु $P(x, y)$ को $X-$ अक्षमा परावर्तन (Reflection on $X-$ axis) भनिन्छ ।

(ख) बिन्दु $P(x, y)$को $Y-$अक्षमा परावर्तन गर्ने तरिका



कुनै बिन्दु $P(x, y)$लाई $Y-$अक्षमा परावर्तन गर्दा यसको प्रतिविम्ब (परावर्तित आकृति) $P(-x, y)$ हुन्छ । $P'(-x, y)$ दोस्रो चर्तुथाशंमा पर्दछ । यसको निर्देशाङ्कहरू $(-x, y)$ छन् जसको अर्थ यो बिन्दु $Y-$ अक्षदेखि x इकाइ बाँया र $X-$ अक्षदेखि र y इकाइ माथि पर्दछ । दुवै बिन्दुहरूको Y - अक्षदेखीको दुरी बराबर हुन्छ र दुवै बिन्दुहरू एउटै तेर्सो रेखामा पर्दछन् । यसलाई बिन्दु $P(x, y)$ को $Y-$अक्षमा परावर्तन (Reflection on $Y-$ axis) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

बिन्दु $P(6,4)$ को $x-$अक्षमा परावर्तन गरी प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

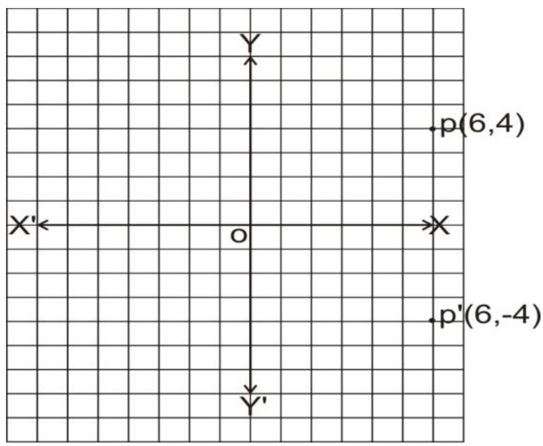
समाधान

यहाँ $P(x,y) = P(6,4) \therefore x = 6$ and $y = 4$

अब $P(x,y)$ को $x-$ अक्षमा परावर्तन गराउदा प्रतिविम्ब $P'(x',y')$ भए

$P'(x',y') = P'(x,-y)$ हुन्छ । अत:$x' = x = 6$ र $y' = -y = -4$

अत: $P(6,4)$ को प्रतिविम्ब $P'(6,-4)$ हुन्छ ।

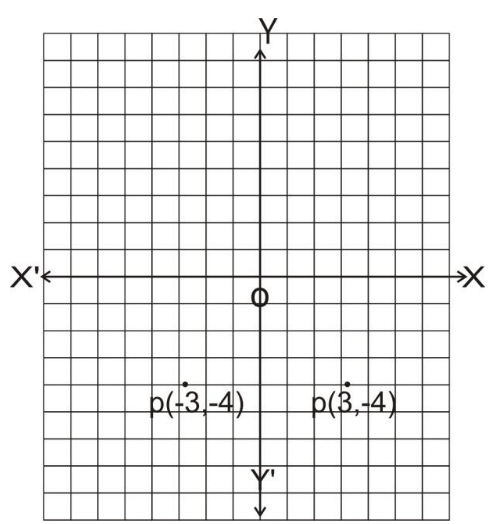


उदाहरण 2

बिन्दु $P(3,-4)$ को $y-$अक्षमा परावर्तित प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

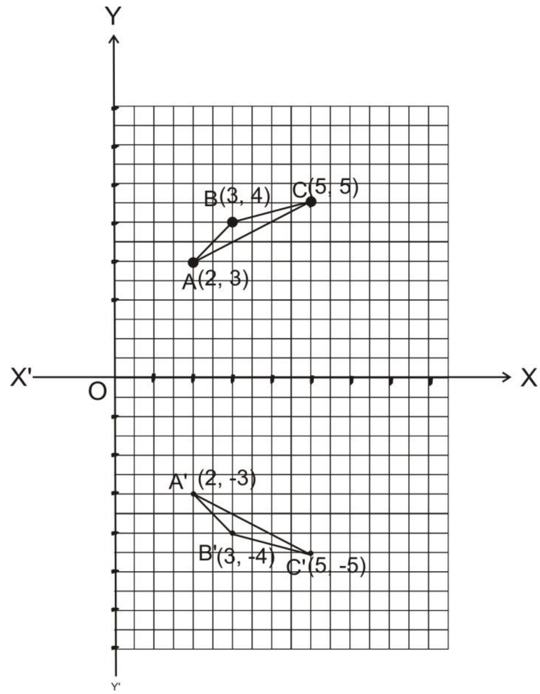
समाधान

हामीलाई थाहा छ, बिन्दु $P(x,y)$ को $y-$ अक्षमा परावर्तित प्रतिविम्ब $P'(-x,y)$ हुन्छ । अत: बिन्दु $P(3,-4)$ को $y-$ अक्षमा परावर्तिच प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क $P'(-3,-4)$ हुन्छ ।



उदाहरण 3

शीर्षबिन्दुहरू $A(2,3)$, $B(3,4)$, र $C(5,5)$ भएको त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् र यसलाई $x-$ अक्षमा परावर्तन गराई प्रतिविम्बको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा देखाएको छ । अब हामीलाई थाहा भए अनुसार शीर्षबिन्दुहरू $A(2,3), B(3,4)$, र

$C(5, 5)$ का $x-$ अक्षमा प्रतिविम्बहरू क्रमशः $A'(2, 3)$, $B'(3,4)$ र $C'(5,-5)$ हुन्छन् । अतः त्रिभुज ABC को प्रतिविम्ब त्रिभुज $A'B'C'$ हो जसलाइए लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

$\therefore \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

जहाँ $A(2,3) \rightarrow A'(2,3)$

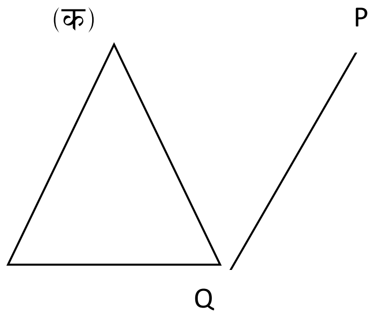
$B(3,4) \rightarrow B'(3,-4)$

र $C(5,5) \rightarrow C'(5,-5)$

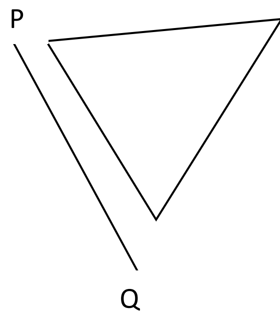
अभ्यास

1. दिएका ज्यामितीय चित्रहरूलाई परावर्तन अक्ष PQ मा परावर्तन गरी प्रतिविम्ब चित्र देखाउनुहोस् ।

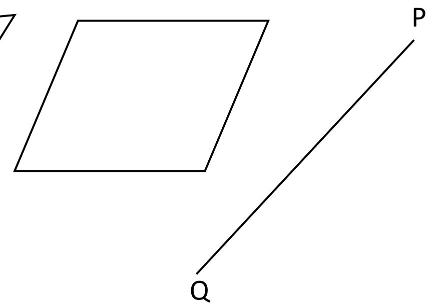
(क)



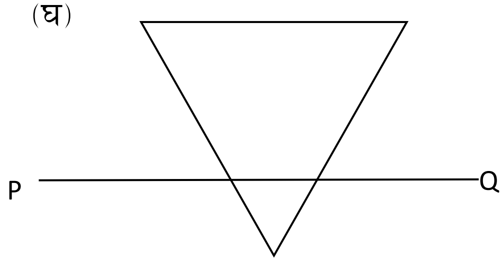
(ख)



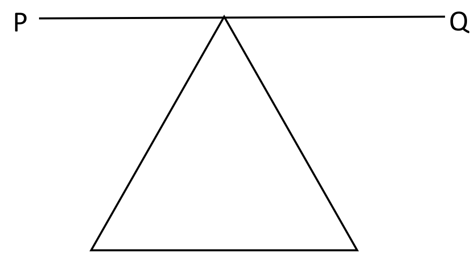
(ग)



(घ)



(ङ)



2. तल दिएका बिन्दुहरूलाई x –अक्षमा परावर्तत गरी प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $(2, 4)$ (ख) $(4, 5)$ (ग) $(-3, 4)$

(घ) $(-4, 6)$ (ङ) $(-2, -3)$ (च) $(-4, -6)$

(छ) $(4, -6)$ (ज $(5, -9)$ (झ) $(8, -10)$

(ञ) $(4, -4)$ (ट) $(-6, -8)$

3. तल दिइएका बिन्दुहरूलाई y –अक्षमा परावर्तन गरी प्रतिविम्बका निर्देशाङ्क पनि लेख्नुहोस् ।

(क) $(4, 6)$ (ख) $(-5, 7)$ (ग) $(-4, -6)$

(घ) $(8, -10)$ (ङ) $(8, 10)$ (च) $(3, 6)$

4. त्रिभुज ABC लाई x – अक्षमा परावर्तान गरी प्रतिविम्ब त्रिभुज $A'B'C'$ का निर्देशाङ्कहरू लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् जहाँ A, B र C का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः$(2, 4), (5, 8)$ र $(7,3)$ छन् ।

5. शीर्षबिन्दु $A(0,3)$, $B(2,4)$ र $(5,7)$ र $D(0,6)$ बाट बन्ने चतुर्भुज ABCD लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । त्यसपछि ABCD लाई $y-$ अक्षनमा परावर्तन गरी प्रतिविम्ब $A'B'C'D$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. शीर्षबिन्दुहरू $P(2,2), Q(2,6)$ र $R(6,6)$ बाट बन्ने त्रिभुज PQR लाई पहिले $x-$अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् र त्यसपछि प्रतिविम्बलाई $y-$ अक्षमा परावर्तन गराई अन्तिम प्रतिविम्बलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् र यसका शीर्षबिन्दुहरू पनि निकाल्नुहोस् ।

उत्तरहरू :

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) $(2,-4)$ (ख) $(4,-5)$ (ग) $(-3,-4)$
   (घ) $(-4,-6)$ (ङ) $(-2,3)$ (च) $(-4,6)$
   (छ) $(4,6)$ (ज$(5,-9)$ (झ) $(8,10)$
   (ञ) $(4,4)$ (ट) $(-6,8)$

3. (क) $(4,6)$ (ख) $(5,7)$ (ग) $(4,-6,)$
   (घ) $(-8,-10)$ (ङ) $(-8,10)$ (च) $(-3,6)$

4. -6 .शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8.2 परिक्रमण (Rotation)

कुनै ज्यामितीय बिन्दु अथवा चित्रलाई कुनै दिएको बिन्दुको वरिपरि दिएको दिशामा र दिएको कोणमा घुमाउने त्रिक्रयालाई परिक्रमण (Rotation) भनिन्छ । यसरी घुमाएर प्राप्त हुने स्थानान्तरणलाई परिक्रमण स्थानान्तरण (rotational transformation) भनिन्छ । कुनै पनि ज्यामितीय चित्रलाई परिक्रमण गर्नलाई तिनओटा अवस्थाहरू चाहिन्छन् । ती सर्तहरू हुन्:

(1) परिक्रमणको दिशा (Direction of rotation)

(2) परिक्रमणको कोण (Angle of rotation)र

(3) परिक्रमणको केन्द्र (center of rotation)

परिक्रमणको दिशा दुई प्रकारको हुन्छः

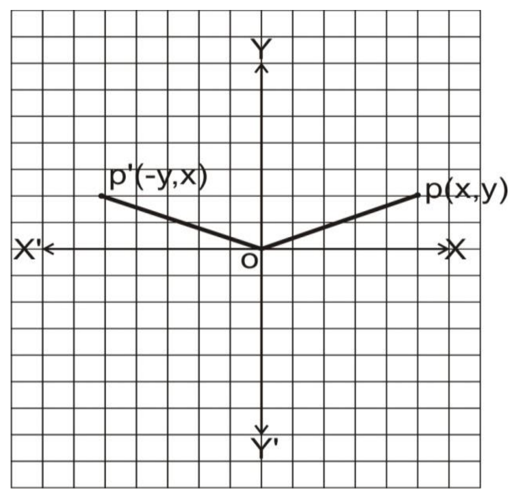
(1) धनात्मक दिशा

(2) ऋणात्मक दिशा

घडीको सुई घुम्ने दिशाको विपरीत दिशालाई धनात्मक र घडीको सुई घुम्ने दिशालाई ऋणात्मक दिशा भनिन्छ । प्रायः जसो परिक्रमणको केन्द्रको रूपमा उद्‌गम बिन्दु (Origin) लाई लिने गरिन्छ ।

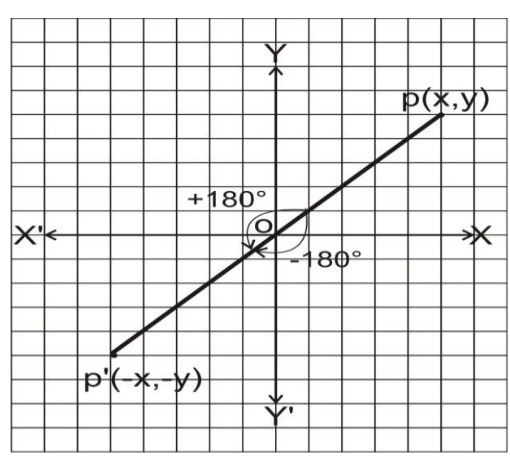
(क) उद्‌गम बिन्दु देखि $(+90°)$ मा परिक्रमण

मानौँ $P(x, y)$ बिन्दुलाई उद्‌गम बिन्दुको धनात्मक दिशामा 90° मा घुमाउनु छ । अब OP लाई जोड्नुहोस् र बिन्दु 'O' मा 90° को कोण खिच्नुहोस् । $OP = OP'$ हुने गरी बिन्दु P' पत्ता लगाउनुहोस् । अब लेखाचित्रमा हेरेर बिन्दु P' को निर्देशाङ्क पढ्नुहोस् । हामीले $P(x, y)$ बिन्दु $P'(-y, x)$ मा परिणत भएको पाउनेछौँ । अतः कुनै बिन्दु $P(x, y)$ लाई उद्‌गम बिन्दुको चारैतिर धनात्मक 90° मा परिक्रमण गर्दा प्रतिविम्ब बिन्दु $P'(-y, x)$ प्राप्त हुन्छ । अतः $P(x, y) \rightarrow P'(-y, x)$ यसरी नै $P(x, y)$लाई उद्‌गम बिन्दु $O(0,0)$ को परिपरि ऋणात्मक दिशामा 90° घुमाउँदा प्रतिविम्ब बिन्दु $P'(y', x)$ प्राप्त हुन्छ । अतः $(-90°)$ परित्रक्रणमा $P(x, y) \rightarrow P'(y, -x)$ हुन्छ ।



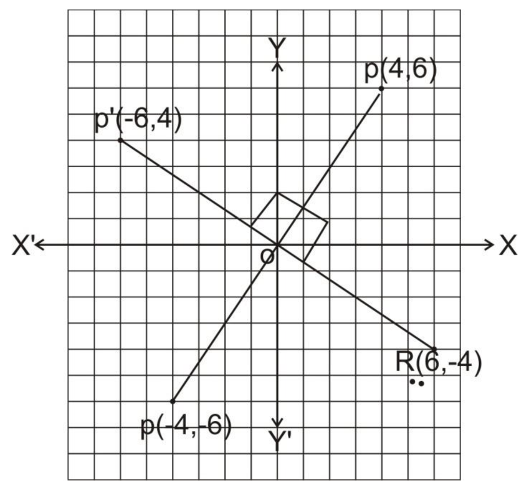
(ख) उद्‌गम बिन्दुको वरिपरि 180° मा धनात्मक परिक्रमण

लेखाचित्रमा कुनै बिन्दु $P(x, y)$ लिनुहोस् । अब OP लाई जोड्नुहोस् र बिन्दु O मा 180° को कोण खिच्नुहोस् र अब $OP = OP'$ हुने गरी बिन्दु P' भेट्टाउनुहोस् । लेखाचित्रमा हेर्नुहोस् र P' को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् । तपाईले P' को निर्देशाङ्क $(-x, -y)$ पाउनु हुनेछ । स्मरण रहोस् कि बिन्दु $P(x, y)$ लाई $O(0,0)$ को वरिपरि ऋणात्मक दिशामा 180° मा घुमाउँदा पनि प्रतिबिम्ब बिन्दु $P'(-x, -y)$ नै हुन्छ । अतः



180° को धनात्मक धनात्मक अथवा ऋणात्मक परिक्रमणमा $P(x,y)$ को प्रतिविम्ब P'अर्थात $P(x,y) \rightarrow P'(-x,-y)$

उदाहरण–1



बिन्दु P(4,6) लाई O(0,0) वरिपरि धनात्मक र ऋणात्मक दिशामा 90° मा परिक्रमण गराई प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । सोही बिन्दुलाई 180° मा पनि परिक्रमण गराउनुहोस् ।

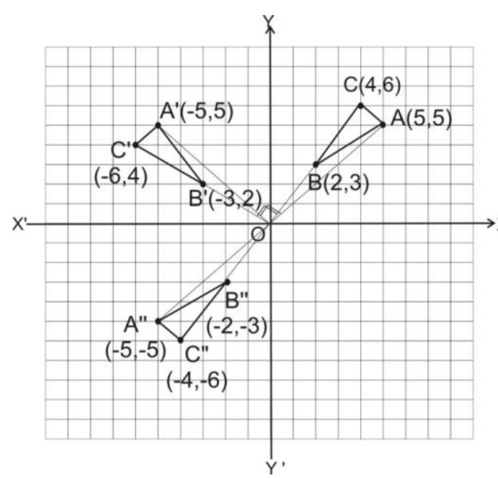
समाधान

P $(4,6)$ लाई धनात्मक $(+90°)$ मा $O(0,0)$ चारैतिर घुमाउँदा P(4,6) को प्रतिविम्ब $P'(6,-4)$ को हुन्छ । यसरी नै $P(4,6)$ लाई ऋणात्मक $(-90°)$ मा घुमाउँदा $P(4,6)$ कोप्रतिबिम्ब $R(6,-4)$ हुन्छ । यसरी नै P(4,6) लाई O(0,0) को वरिपरि 180° मा घुमाउँदा यसको प्रतिविम्ब $P'(-4,-6)$ हुन्छ । यि सबै प्रतिविम्बहरूलाई सँगको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

उदाहरण–2

शीर्षबिन्दुहरू A(5,5), B(2,3) र C(4,6) भएको त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् र सो त्रिभुजहरूलाई O(0,0) बाट धनात्मक दिशामा 90° र 180° मा परिक्रमण गराउनुहोस् । यसरी प्राप्त प्रतिविम्बहरूको शीर्षबिन्दुहरू पनि त्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



शीर्षबिन्दुहरू A(5,5), B(2,3) र C(4,6) भएको ABC लाई लेखाचित्रमा देखाएको छ । यसलाई धनात्मक 90° मा परिक्रमण गर्दा शीर्षबिन्दुहरू A(5,5), B(2,3) र C(4,6) का प्रतिविम्बहरू क्रमशः $A'(-5,5)$, $B'(-3,2)$ र $C'(-6,4)$ हुन्छन् । यसरी बन्ने त्रिभुज $A'B'C'$ लाई पनि लेखाचित्रमा देखाइएको छ । यसरी नै त्रिभुज ABC लाई O(0,0) वरिपरि 180° मा परिक्रमण गराउँदा शीर्षबिन्दुहरू A(5,5), B(2,3) र C(4,6) का प्रतिविम्बहरू

क्रमश: $A''(-5,-5)$, $B''(-2,-3)$ र $C''(-4,-6)$ हुन्छन् । यसरी बनेको प्रतिविम्ब त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

अभ्यास

1. निम्नलिखित बिन्दुहरूलाई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा $(+90°)$ र $(-90°)$ र $180°$ मा $O(0,0)$ वरिपरि परिक्रमण गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् र प्रतिबिम्बका निर्देशाङ्कहरू पनि लेख्नुहोस् ।

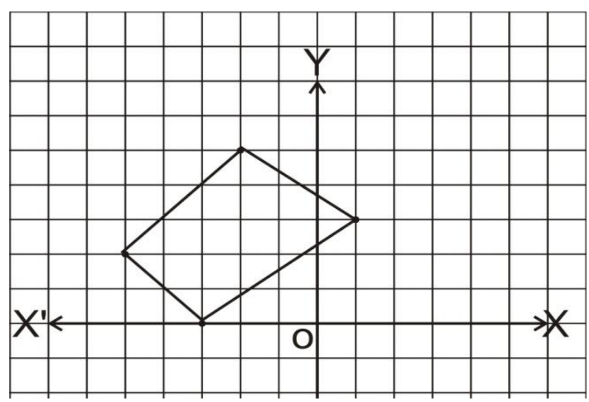
   (क) $(2,3)$ (ख) $(4,3)$ (ग) $(5,6)$ (घ) $(-3,5)$ (ङ) $(-6,-8)$ (च) $(5,-7)$

   (छ) $(9,0)$ (ज$(0,5)$ (झ) $(-8,-8)$ (ञ) $(10,10)$

2. शीर्षबिन्दुहरू $A(-4,0), B(-4,-4)$, $C(0,-4)$ र $D(0,0)$ भएको वर्गलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् र त्यसपछि उद्गम बिन्दु $O(0,0)$ वरिपरि $(+90°)$, $(-90°)$ र $180°$ मा परिक्रमण गराई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा चित्रण गर्नुहोस् ।

3. निम्नलिखित ज्यामितीय आकृतिहरूलाई $O(0,0)$ वरिपरि $(+90°)$ र $(-90°)$ र $180°$ मा परिक्रमण गरी छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. (क) बिन्दु $(8,-8)$ (ख) बिन्दुहरू $A(1,2), B(4,5,)$ र $(7,9)$ बाट बन्ने त्रिभुज ABC (ग) शीर्षबिन्दुहरू $P(2,4), Q(5,6), R(3,9)$ र $S(8,5)$ बाट बन्ने चर्तुभुज PQRS (घ) $P(4,5)$ र $Q(5,-6)$ जोड्ने रेखा PQ. सँगैको लेखाचित्रमा देखाएको आकृतिको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाई सो आकृतिलाई $O(0,0)$ बाट $(+90°)$ र $(-90°)$ र $180°$ मा परिक्रमण गराउनुहोस् र छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।



उत्तरहरू

1.	बिन्दु प्रतिविम्ब $(+90°)$	प्रतिविम्ब$(-90°)$	प्रतिविम्ब$(180°)$	
(क)	$(2,3)$ $(-3,2)$	$(3,-2)$	$(-2,-3)$	
(ख)	$(4,3)$ $(-3,4)$	$(3,-4)$	$(-4,-3)$	
(ग)	$(5,6)$ $(-6,5)$	$(6,-5)$	$(-5,-6)$	
(घ)	$(-3,5)$	$(-5,-3)$	$(5,3)$	$(3,-5)$
(ङ)	$(-6,-8)$	$(8,-6)$	$(-8,6)$ $(6,8)$	
(च)	$(5,-7)$	$(7,5)$	$(-7,-5)$ $(-5,7)$	
(छ)	$(9,0)$ $(0,9)$	$(0,-9)$	$(-9,0)$	
(ज)	$(0,5)(-5,0)$	$(5,0)$	$(0,-5)$	
(झ)	$(-8,-8)$	$(8,-8)$	$(-8,8)$	$(8,8)$
(ञ)	$(10,10)$	$(-10,10)$ $(10,-10)$ $(-10,-10)$		

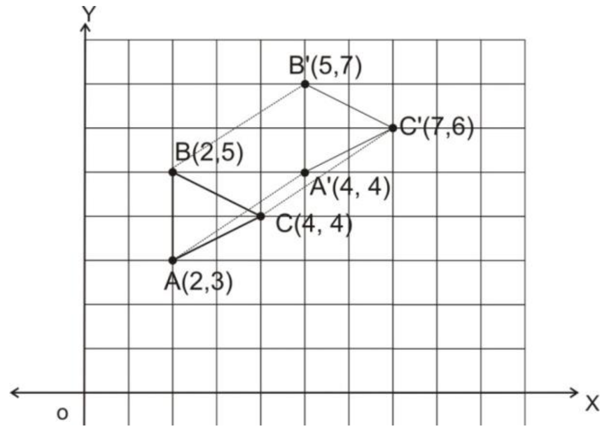
2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8.3 विस्थापन(Displacement)

कुनै पनि ज्यामितीय बिन्दु अथवा आकृतिलाई प्रारम्भिक अवस्थाबाट नघुमाई सोझै समानान्तर दिशामा निश्चित दुरीसम्म तल, माथि, दायाँ, अथवा बायाँतिर सार्ने स्थानान्तरलाई विस्थापन (Diplacement) भनिन्छ ।यस स्थानान्तरण अन्तरगत ज्यामितीय आकृतिलाई दिएको निश्चित दिशा र दुरीसम्म नघुमाईकन सार्ने काम गरिन्छ । यस कार्यका लागि निश्चित दिशा र विस्थापन दुरी दिएको हुनुपर्दछ । कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्कहरू दायाँ र माथि सार्दा (+) र बायाँ तल सार्दा (–) लेख्ने चलन छ ।

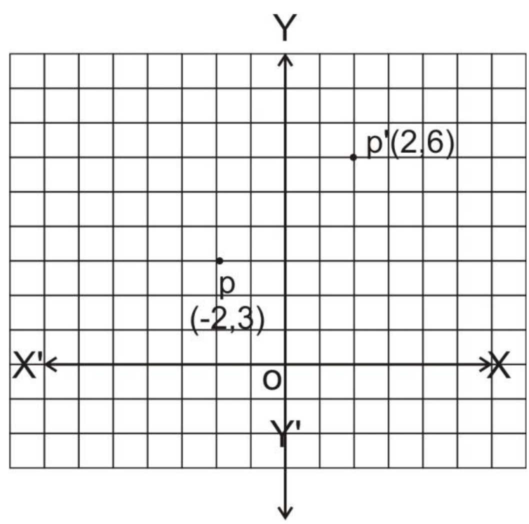
उदाहरण 1

शीर्षबिन्दुहरू A(2,3), B(2,5) र C(4,4) भएको त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा चित्रण गर्नुहोस । त्यसपछि यसलाई 3 इकाइदायाँ र 2इकाइ माथि विस्थापन गरी प्रतिविम्ब त्रिभुज A′B′C प्रस्तुत गर्नुहोस् र यसको शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

त्रिभुज ABC लाई लेखाचित्रमा देखाएको छ । ΔABC लाई 3 इकाइदायाँ र 2 माथि विस्थापन गरी बनेको प्रतिविम्ब त्रिभुज A′B′C′ पनि लेखाचित्रमा देखाएको छ । प्रतिविम्बका शीर्षबिन्दुहरू A′B′ र C′ का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (5,5), (5,7) र (7,6) छन् ।



उदाहरण 2

एउटा बिन्दु P(−2,3)लाई 4 इकाइ दायाँ र त्यसपछि 3 इकाइ माथि विस्थापन गर्दा प्रतिबिम्ब बिन्दुको निर्देशाङ्क कति हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् र सो बिन्दुलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दिएको बिन्दु $P(-2,3)$ लाई 4 इकाइ दायाँ र त्यसपछि 3 इकाइ माथि सार्दा बन्ने प्रतिविम्ब बिन्दु $P'(2,6)$हुन्छ, जसलाई लेखाचित्रमा दखाइएको छ ।

अभ्यास

1. निम्नलिखित बिन्दुहरूलाई 3 इकाइदायाँ सारेपछि 2 इकाइ माथि विस्थापन गर्नुहोस् । साथै प्रतिविम्बका निर्देशाङ्क लेख ।

   (क) $A(1,0)$ (ख) $B(2,3)$ (ग) $C(-4,3)$ (घ) $D(-4,-5)$

   (ङ) $E(5,5)$ (च) $F(-8,-6)$ (छ) $G(4,-4)$ (ज) $H(0,-8)$

   (झ) $O(0,0)$ (ञ) $P(0,6)$ (ट) $Q(-5,0)$ (ठ) $P(-1,-8)$

2. शीर्षबिन्दुहरू $P(-4,0), Q(-3,2)$ र $R(-5,6)$ भएको PQR त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा चित्रण गरी 5 इकाइदायाँ र 3 इकाइमाथि विस्थापन गरी प्रतिविम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. एउटा बिन्दु $A(-4,0)$ छ । यसलाई 6 इकाइ दायाँ विस्थापन गरी बिन्दु B पत्ता लगाउनुहोस् । फेरि बिन्दु B लाई 5 इकाइ माथि सार्नुहोस् र बिन्दु C पत्ता गगाउनुहोस् । यसरी नै बिन्दु C लाई 7 इकाई बायाँ बिस्थापन गरी प्राप्त बिन्दुलाई D नाम दिनुहोस् । यसरी बन्ने चर्तुभुज ABCD कस्तो चर्तुभुज हुन्छ ? नाम लेख्नुहोस् ।

4. $P(-4,-4)$ लाई कति इकाइ दायाँ र कति इकाइ माथि विस्थापन गर्दा बिन्दु $P'(5,6)$ मा पुगिन्छ ? लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

उत्तरहरू

1. (क) $(4,2)$ (ख) $(5,5)$ (ग) $(-1,5)$ (घ) $(-1,-3)$ (ङ) $(8,7)$ (च) $(-5,-4)$

   (छ) $(7,-2)$ (ज) $(3,-6)$ (झ) $(3,2)$ (ञ) $(3,8)$ (ट) $(-2,2)$ (ठ) $(2,-6)$

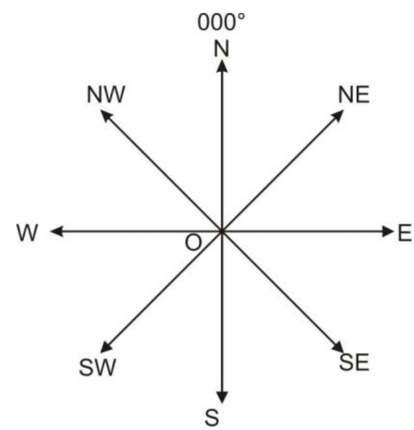
2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । समलम्ब चर्तुभुज बन्दछ ।
4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ ९

दिशास्थिति र स्केल ड्रइङ
(Bearing and Scale Drawing)

9.0 पुनरावलोकन (Revision)

दिएको चित्रमा केही प्रमुख दिशाहरू देखाइएको छ । यो चित्र हेरेर निम्न प्रश्नहरूको उत्तरको लागि आपसमा छलफल गर्नुहोस् ।



(क) चित्रमा बिन्दु O बाट बाहिर तिर देखाएको रेखाहरूले के जनाउँछ ?

(ख) यि दिशाहरूको नाम के के हुन् ?

(ग) यि दिशाहरू मध्येको प्रमुख चारओटा दिशाहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

(घ) यि मध्ये कुन दिशालाई आधारभुत दिशा मानीन्छ ? र किन ?

(ङ) कम्पासले कुनै ठाउँको दिशा सङ्केत गर्दा कुन दिशालाई आधार बनाउँछ ?

(च) उत्तर दिशा देखाउने रेखा ON लाई आधार मानेर दिशाहरू NE, E, SE, S, SW, W र NW ले घडि घुम्ने दिशामा ON सँग बनाएको कोणहरूको मान डिग्रीमा नापेर तीन अङ्कमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

9.1 दिशास्थिति (Bearing)

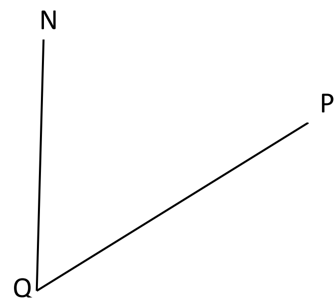
माथिको चित्रमा OE ले ON सँग घडी घुम्ने दिशामा बनाएको कोण 90° छ । यो कोणलाई 90° लेख्यो भने यसलाई E को O देखिएको दिशास्थिति (Bearing or compass bearing) भनिन्छ । यसरी कुनै ठाउँलाई उत्तरी दिशा देखाउने रेखाको कुनै बिन्दु O सँग जोड्ने रेखाले उत्तरी दिशासँग घडी घुम्ने दिशामा बनाएको कोणलाई तीन अङ्कमा प्रस्तुत गर्‍यो भने त्यस प्रकारको मापनलाई सो ठाउँको बिन्दु O देखिको दिशास्थिति भनिन्छ । यसमा उत्तर दिशा देखाउने रेखा ON लाई आधार रेखा र बिन्दु O लाई प्रसँग बिन्दु (Point of reference) भनिन्छ । माथिको चित्रमा SE को O देखिको दिशा घडी घुम्ने दिशामा मापन गर्दा 135° छ । यसलाई SE को O देखिको दिशा स्थिति (bearing) भनिन्छ । त्यस्तै गरी SW को O देखिको दिशास्थिति 225° छ ।

उदाहरण 1

दिएको चित्रमा बिन्दु P को बिन्दु Q देखिको दिशास्थिति कति हुन्छ ? कोणमापकले नापेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

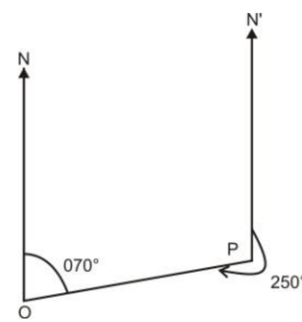
समाधान

कोणमापकले नाप्दा $\angle NQP = 54°$ आउँछ । अत: बिन्दु P को बिन्दु Q देखिको दिशास्थिति 54° छ ।



उदाहरण–2

दिएको चित्रमा बिन्दु O बाट बिन्दु P को दिशास्थिति 70° भए P बाट O को दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

चित्रमा $ON||PN'$ र $\angle NOP = 70°$

अत:$\angle N'PO = 180° - 70°$ क्रमागत भित्री कोण)

$= 110°$

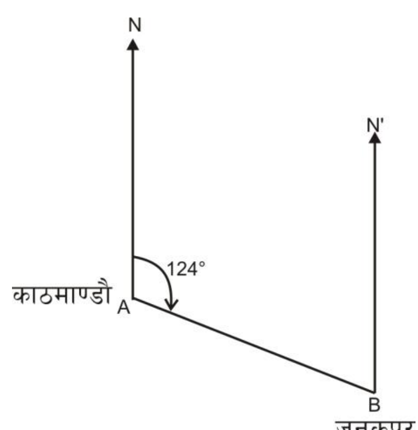
अब घडी घुम्ने दिशामा बनेको

कोण $\angle N'PO = 360° - 110° = 250°$

अत:बिन्दु P देखि O को दिशास्थिति= 250° हुन्छ ।

उदाहरण 3

दिएको चित्रमा काठमाण्डौं देखि जनकपुरको स्थिति देखाएको छ । जनकपुर देखि काठमाण्डौंको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

दिएको अनुसार, AN||BN र

$\angle NAB = 124°$ छ ।

$\angle ABN' = 180° - \angle NAB = 180° - 124°$

$= 56°$ (क्रमागत भित्री कोण योग)

अतः घडी घुम्ने दिशाको $\angle N'BA = 360° - 56°$

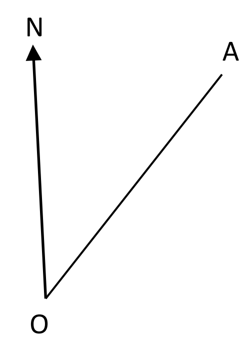
$= 304°$

$\therefore$ जनकपुर देखि काठमाडौँको दिशाथिति $= 304°$ हुन्छ ।

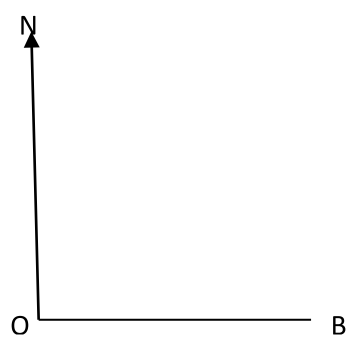
अभ्यास

1. तल दिएका चित्रहरूमा देखाएका बिन्दुहरूको बिन्दु O बाट दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

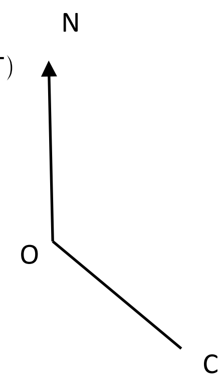
(क)



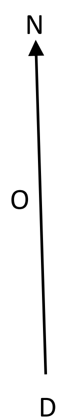
(ख)



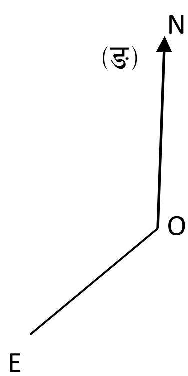
(ग)



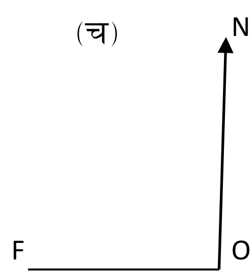
(घ)



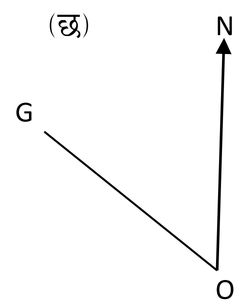
(ङ)



(च)

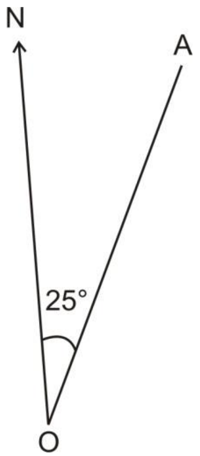


(छ)

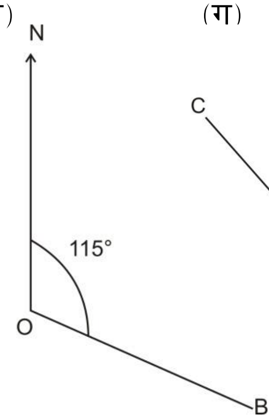


2. तल दिएका चित्रहरूमा उल्लिखित बिन्दुहरूको दिएको बिन्दु O बाट दिशास्थिति लेख्नुहोस् ।

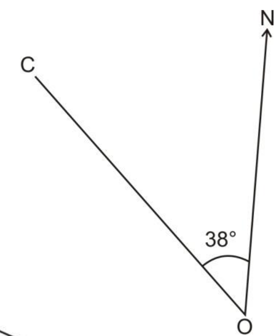
(क)



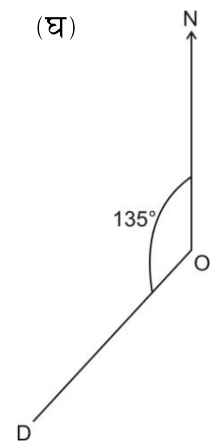
(ख)



(ग)

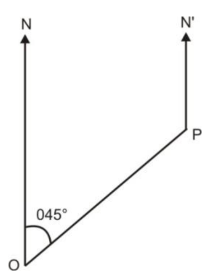


(घ)

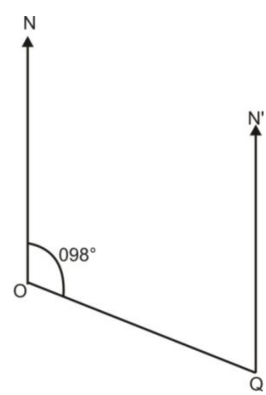


3. तल दिएका चित्रहरूमा उल्लेखित बिन्दुहरूको बिन्दु O देखिको दिशास्थिति देखाइएको छ । अब ती बिन्दुहरूबाट बिन्दु O को दिशास्थिति निकाल्नुहोस् ।

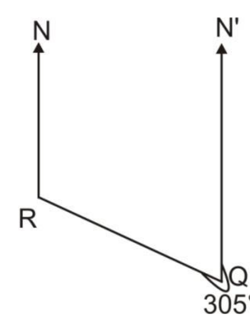
(क)



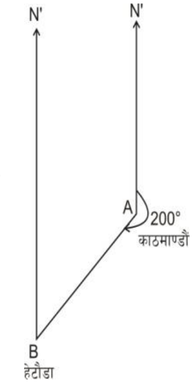
(ख)



(ग)



4. तल दिएको चित्रमा काठमाण्डौ देखि हेटौँडाको दिशास्थिति दिएको छ । अब हेटौँडा देखि काठमाडौँको दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।



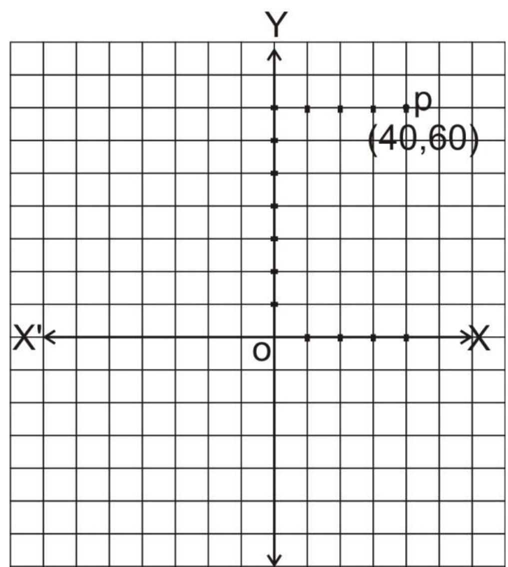
5. दुईओटा जहाजहरूको काठमाण्डौं देखिको दिशास्थिति 80° र 270° भए ती जहाजहरू काठमाडौंबाट कुन दिशामा छन् ? चित्रमा देखाउनुहोस् ।

6. यदि काठमाडौंदेखि महेन्द्रनगरको दिशास्थिति 250° भए महेन्द्रनगरदेखि काठमाडौंको दिशास्थिति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू

1. (क) देखि (छ) सम्म कोणमापकले नापेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
2. (क) 025°(ख) 115° (ग)322° (घ) 225°
3. (क)225° (ग)278° (घ) 125°
4. 020°
5. चित्र बनाएर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
6. 070°

9.2 स्केल ड्रइङ(Scale drawing)



चित्रमा लेखाचित्रको एउटा सानो टुक्रा देखाएको छ । यो लेखाचित्रमा x – अक्षको दायाँतिर चारओटा साना वर्गहरू छन् र y – अक्षको माथितिर ६ ओटा साना वर्गहरू छन् । यो लेखाचित्रको पहिलो चर्तुथाशङ्मा बिन्दु P(40,60) लाई देखाउनुपर्‍यो भने कसरी र कहाँ राख्नुपर्ला ? यो बिन्दुलाई ग्राफमा देखाउन सर्वप्रगम हामीले ग्राफको स्केल निर्धारण गर्नुपर्छ । स्केल निर्धारण गर्दा बिन्दु (40,60) लाई ठाउँ पुग्ने गरी निर्धारण गर्नुपर्दछ । दिएको ग्राफमा बिन्दु P(40,60) लाई देखाउन हामीले एउटा सानो वर्ग = 10 इकाइ लिनुपर्दछ । यसो गर्दा बिन्दु P(40,60) चार इकाइ दायाँ र 6 इकाइ माथि पर्दछ । अर्थात यो माथिको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यसरी लामो दुरीलाई सानो नक्सा अथवा ग्राफमा समायोजन गर्न अटाउन सक्ने गरी स्केल निर्धारण गर्ने तरिका या प्रक्रियालाई स्केल ड्रइङ (scale drawing) भनिन्छ । यस्त गरी दुईओटा भिन्न ठाउँहरूको बिचको दुरी धेरै लामो हुने हुँदा यसलाई सानो नक्सामा

देखाउन सकिँदैन । यसलाई नक्सामा देखाउन लामो दुरीलाई प्रतिनिधित्व गर्ने गरी समानुपातिक रूपमा सानो दुरीको स्केल तयार गर्नुपर्दछ । जस्तै काठमान्डौ देखि चितवन सम्मको दुरी मानौँ 250 km छ । अब यो वास्तविक दुरी नेपालको नक्सामा देखाउन सकिदैन । यसका लागि सानो इकाइको उचित दुरीको स्केल निर्धारण गरी नक्सामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । जस्तै 125 Km = 1cm मानेर स्केल बनायो भने250Km =2cm हुन जान्छ जुन दुरी नेपालको सानो नक्सा पनि राम्ररी देखाउन सकिन्छ । यसरी लामो भौगोलिक दुरीहरूलाई नक्सामा देखाउन अथवा प्रतिनिधित्व गर्नका लागि तयार पारिने सानो इकाइको समानुपातिक दुरीको स्केल निर्धारण गर्ने प्रक्रियालाई स्केल ड्रईङ(Scale drawing) भनिन्छ । यसरी वास्तविक भौगोलिक दुरीलाई सानो दुरीमा घटाउन अथवा सानो नक्साको दुरीलाई ठुलो वास्तविक दुरीमा परिणत गर्न चाहिने स्केललाई स्केल गुणाङ्क (Scale factor) भनिन्छ । अर्को शब्दमा स्केल गुणाङ्क भनेको सानो इकाइको दुरी र वास्तविक दुरीको अनुपात हो । जस्तै 1cm = 250 Km भए स्केल गुणाङ्क 1:25000000 हुन्छ ।

उदाहरण 1

2.5 km = 1cm को स्केल प्रयोग गरी तयार गरेको एउटा नक्सामा दुई ठाउँबिचको दुरी 10cm भए ती दुई ठाउँको वास्तविक दुरी कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

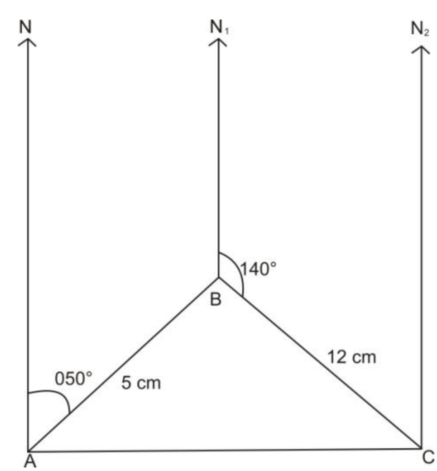
समाधान

यहाँ 1cm बराबरको वास्तविक दुरी 2.5 km छ । अतः 10cm बराबरको वास्तविक दुरी = (2.5x10) km = 25 km

अतः ती दुई ठाउँको वास्तविक दुरी = 25km हुन्छ ।

उदाहरण 2

एउटा विमान विमानस्थल A बाट 050° को दिशास्थितिमा रहेको विमास्थल B पुग्छ र त्यहाँबाट फेरी दिशास्थिति 140°मा रहेको विमानस्थल C मा अवतरण गर्दछ । यदि विमान स्थल A देखि B को दुरी 5000 km र B देखि C को दुरी 12000 km भए A देखि C को दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् । साथै A देखि C को दिशास्थिति पनि पत्ता लगाउनुहोस् । (स्केल 1cm= 1000 km)



समाधान

प्रश्नानुसार,

$\angle NAB = 050°$ र

$\angle N_1BC = 140°$

फेरी AB= 5000km = 5cm

र BC= 12000km = 12cn

($\because$ 1000 km = 1cmलिदा)

अतः नापेर हेर्दा,

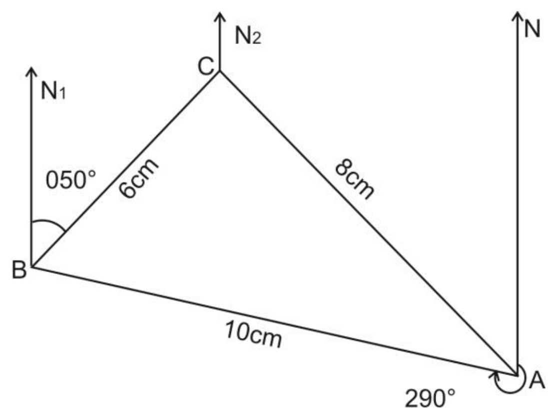
AC=13cm र $\angle NAC = 110°$

$\therefore$A देखि C को दुरी = 13x1000=13000 km

र A देखि C को दिशास्थिती 110°हुन्छ ।

उदाहरण 3

एउटा ठाउँ A देखि B कोदिशास्थिति 290°र B देखि C को दिशास्थिति 050°छ । यदि A देखि B को दूरी 1000km र B देखि C को दुरी 600km भए C देखि A को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् । साथै A देखि C को दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् । (स्केल 1cm = 100km)



समाधान

प्रश्नानुसार,

AB = 10cm र BC = 6cm

नापेर हेर्दा,

CA = 8cm हुन्छ ।

अतः A देखि C को दुरी

= 8 x 1000 = 8000 km हुन्छ ।

फेरिनापेर हेर्दा $\angle NAN_2 = 40°$

अतः A देखि C को दिशास्थिति = 360°-40°

= 310°हुन्छ

अभ्यास

1. निम्न नक्साङ्कित दुरी भएका ठाउँहरूको बिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् । (एकेल अनुपात 1:10000 से.मी. मा)

   (क) 3cm (ख) 4.5cm (ग) 3.5cm (घ) 2.5cm

   (ङ) 8cm (च) 10cm

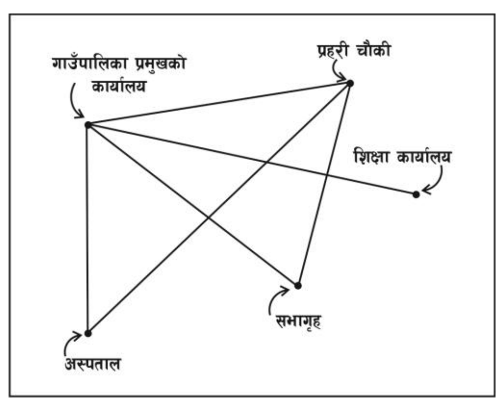
2. पृथ्वीको नक्सामा कुनै देशको क्षेत्रफल 1.21 वर्ग से.मी. छ । यदि सो नक्सामा 0.1 वर्ग से.मी.= 15000 वर्ग कि.मी. को स्केल प्रयोग भएको छ भने उक्त देशको वास्तविक क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. कुनै विद्यालय A बाट विद्यालय B को दिशास्थिती 035° र दुरी 300m छ । त्यस्तै विद्यालय B देखि विद्यालय C सम्मको दिशास्थिति 125° र दुरी 400 m छ । अब विद्यालय A देखि C सम्म्को दुरी र दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् । (स्केल 1cm = 100m)

4. एउटा शहर P देखि अर्को शहर Q सम्मको दिशास्थिति 45° र दुरी 900km छ । त्यसैगरी शहर Q देखि तस्रो सहर R सम्मको दिशास्थिति 135° र दुरी 1200km भए R देखि P को दुरी र दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् । (स्केल 1cm = 100km)

5. एउटा विद्यालय A बाट ठिक 500m पूर्वमा अर्को विद्यालय B पर्दछ । विद्यालय B देखि 400m टाढा र 290° को दिशास्थितिमा रहेको अर्को विद्यालय C छ । अब 1cm = 10m को स्केल ड्रईङ गरी विद्यालय A देखि C को दिशास्थिति र वास्तविक दुरी पत्ता, लगाउनुहोस् ।

6. दिएको चित्रमा एउटा गाउँपालिकाको नक्सा दिएको छ जसको नक्साङ्कनमा 1cm=250km को स्केल ड्रईङ प्रयोग गरिएको छ । अब नक्सामा दिएका ठाउँहरूको गाउँपालिका प्रमुखको कार्यालय देखिको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् । साथै प्रहरी चौकीदेखि अस्पताल र सभागृहको वास्तविक दुरी पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तरहरू

1. (क) 300m (ख) 450m (ग) 350m (घ) 250m (ङ) 8m (च) 1km

2. 181500 वर्ग कि.मी. 3. 500m र 089° 4. 1500km र 098°

6. पत्ता लगाउनुहोस् र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ १० : समूह (Set)

10.0 पुनरावलोकन (Revision) :

समूहको परिभाषमा लगायत विभिन्न प्रकारहरू, समूहका सम्बन्धहरू र संयोजन र प्रतिच्छेदन निकाल्ने काम हामीहरूले अघिल्ला कक्षाहरूमा पढी सकेका छौं ।

उदाहरणका लागि तल केही समूहहरू दिएका छन् ।

U= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k}, A= {a,b,e,g,i,k} र B= {c,d,f,h,j}

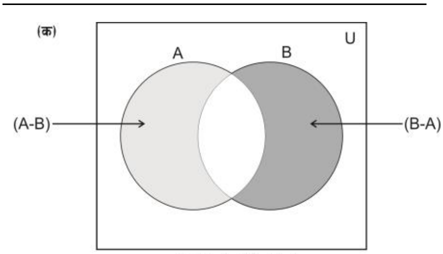
माथि दिएका समूहहरूमाU, A र B कस्ता समूह हुन् ?U लाई कस्तो समूह भनिन्छ ? A र B कस्ता समूह हुन् ?U, A र B को आपसी सम्बन्ध कस्तो छ ? A∪B र A∩B को मान कति कति हुन्छ ?

उपर्युक्त प्रश्नहरूको जवाफ (उत्तर)लेखेर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । यस कक्षामा हामीहरू माथिका कुराहरू बाहेक दुईओटा समूहहरूको फरक र एउटा समूहको पूरक समूह पत्ता लगाउने तरिका सिक्ने छौं । समूहरूहरूमा गरिने चारओटा क्रियाहरू (Set operations) मध्ये संयोजन (Union) र प्रतिच्छेदन (intersection) कक्षा 7 मा पढिसकिएको छ । संयोजन गर्दा दुवै समूहका सबै सदस्यहरूलाई नदोहोऱ्याईकन लिएर समूहको रूपमा लेख्नुपर्दछ । त्यसरी नै प्रतिच्छेदन निकाल्दादुवै समूहका साझा सदस्यहरू मात्र लिएर समूह तयार गरिन्छ ।

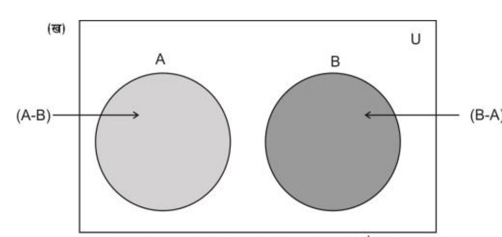
10.1 समूहहरूको फरक(Difference of Sets)

मानौं समूह A र समूह B सर्वव्यापी समूह U का उपसमूह हुन् । अर्ब समूह A मा मात्र पर्ने तर समूह B मा नपर्ने समूह A का सदस्यहरूको समूहलाई A र B को फरक(A difference B) भनिन्छ । यसलाई A-B लेखिन्छ र पढ्दा A र B को फरक अथवा A difference B भनेर पढिन्छ। यसरी नै समूह B मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई B र A को फरक अथवा B difference A भनिन्छ । यसलाई B-A लेखिन्छ र पढ्दा B र A कोफरक अथवा B difference A भनेर पढिन्छ । सङ्क्षेपमा $A-B = \{x/x \in A,\ x \notin B\}$र$B-A = \{x/x \in B,\ x \notin A\}$ लेखिन्छ। यसलाई समूह निर्माण विधि(Set Builder Method) भनिछ ।

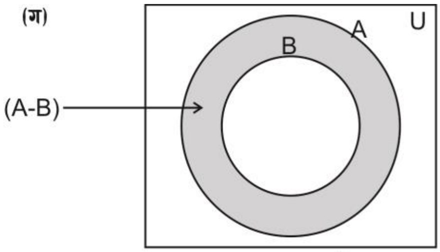
<u>भेन चित्रमा A फरक B र BफरकA</u>



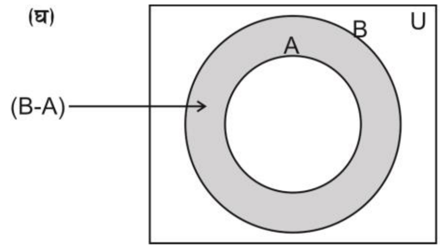
A र B प्रतिच्छेदित हुँदा



A र B अलग्गिदा अथवा प्रतिच्छेदित वा A∩B=∅ हुँदा



समूह B समूह A को उपसमूह हुँदा वा BCA हुँदा



समूह A समूह B को उपसमूह हुँदा वा ACB हुँदा

स्मरण रहोस्:- (A-B)∪(B-A) लाई सममितीय फरक (Symmetric diference) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि U= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} , A={1,2,3,4,5} र B = {4,5,6,7,8,9,10} भए A-B र B-A निकाल्नुहोस् । साथै भेन चित्रमा देखाउनुहोस् ।

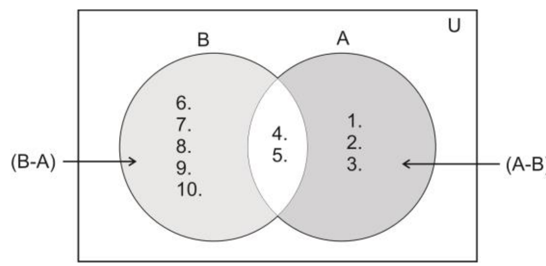
समाधान

A-B = {1,2,3,4,5} - {4,5,6,7,8,9,10}

= {1,2,3}

र B-A = {4,5,6,7,8,9} – {1,2,3,4,5}

= {6,7,8,9,10}



उदाहरण 2

यदि U= {x/x≤30, x धनात्मकपूर्ण सङ्ख्या हो ।}

A= {x/x 15 भन्दा ठुलो र 30 भन्दा सानो धनात्मक सङ्ख्या}

र B= {x/x 1 देखि 15 सम्मको धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या} भए A-B र B-A पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, U= {1,2,3,4, ...28,29,30}

A = {16, 17,18 .... 27,28,29}

र B= {1,2,3,4,..............13, 14, 15}

अत: A-B = {16,17,18, ... 27,28,29} – {1,2,3,4,......13,14,15}

= {16,17,18,.......27,28,29} = A

र B-A = {1,2,3,4,.........13,14,15} – {16,17,18, ...27,28,29}

= {1,2,3,4,........13,14,15} = B

उदाहरण 3

यदि U= {x:x भनेको 1 देखि 50 सम्मको धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या हो । }

A= {x:1≤x≤35, x∈ U}

B= {x:25≤x≤ 45, x∈U}

र C= {x:35≤x≤ 50, x ∈ U} भए पत्ता लगाउनुहोस्: (क) (A∪B)-C (ख) (A∩B)-B

(ग) (A∪C)-B (घ) (B∩C)-A (ङ) A∪ (B-C) (च) (B-C)∪(C-B)

समाधान

यहाँ, U= {1,2,3,4,.....46,47,48,49,50}

A= {1,2,3,4,.........32,34,35}

B= {25,26,27,............43,44,45}

C= {35,36,37, ...46,47,49,50}

अत: (क) (A∪B)-C

= ({1,2,3,4,....33,34,35} U {25,26,27,.......43,44,45} –

{35,36,37,.........46, 47,48,49,50})

= {1,2,3,4,...........43,44,45} – {35,36,......48,49,50}

= {1,2,3,4,..........32,33,34}

(ख) (A ∩ B)-B

= ({1,2,3............34,35} ∩{35,36,......49,50})- {25,26, ...44,45}

= {35} - {25,26,........44,45}

= { }

(ग) (A∪C)-B

= ({1,2,3,.........34,35} ∪ {35,36.........49,50}) – {25,26, ... 44,45}

= {1,2,3, ... 49, 50} – {25,26, ...44, 45}

= {1,2,3, ...23,24,46,47,49,50}

(घ) $(B \cap C)-A$

$= (\{25,26,..........44,45\} \cap \{35,36,.........49,50\}) – \{1,2,3,........34,35\}$

$= \{35,36, ...44,45\} - \{1,2,3,............34,35\}$

$= \{36,37, ... 44,45\}$

(ङ) $A \cup (B-C)$

$= \{1,2,3, ...34,35\} \cup (\{25,26, ... 44,45\}- \{35,36, ...49,50\})$

$= \{1,2,3, ... 34,35\} \cup \{25,26, ...33,34\}$

$= \{1,2,3,.......... 34,35\}$

$= A$

(च) $(B-C)\cup(C-B)$

$= (\{25,26,.......44,45\}-\{35,36,.........49,50\})\cup(\{35,36, ...49,50\})-(\{25,26, ...44,45\})$

$= \{25,26, ...33,34\} \cup \{46,47,48,49,50\}$

$= \{25,26,.................33,34,46,47,48,49,50\}$

अभ्यास

1. यदि U= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k},

   A= {a,c,e,f,g,i,k} र

   B= {b,d,i,j,k,h} भए निम्न समूहहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् । साथै भने चित्रमा पनि देखाउनुहोस् ।

   (क) $(A\cap B)$ (ख) $(B \cup A)$ (ग) A-B (घ) B-A

   (ङ) $(A-B)\cap(B-A)$ (च) $(A-B) \cap(B-A)$

2. यदि U= {x:x 1 देखि 30 सम्मको पूर्ण सख्या हो ।},

   A= {x:x1 देखि 30 सम्मको जोर सङ्ख्या हो ।}

   र C = {x:x1 देखि 30 सम्मको रुढ सङ्ख्या हो ।} भए निम्न समूहहरूको मान निकाली भेन चित्रमा देखाउनहोस् ।

   (क) $(A-B)\cup C$ (ख) $(B-A) \cap C$ (ग) (A-C) (घ) (B-C)
   (ङ) (A-B)-C

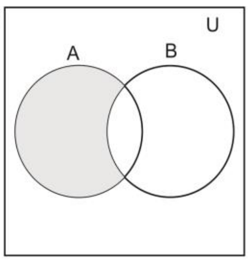
3. यदि A,B र C सर्वव्यापी समूह U का प्रतिच्छेदित समूहहरू भए निम्न समूहहरूलाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

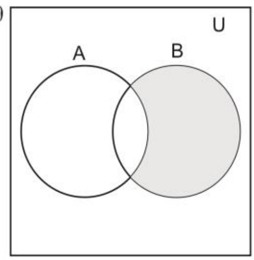
(क) A-B (ख) B-C (ग) C-A (घ) A-(B∪C)

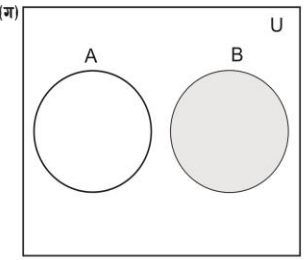
(ङ) A-(B∩C) (च) A∪(B∩C) (छ) (A∪C)-B (ज) (A∩B)-(B∩C)

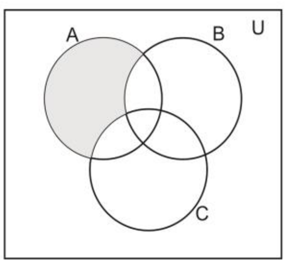
(झ) (A∪B)-(B∪C)

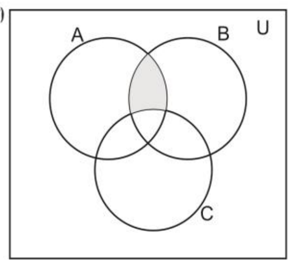
4. तल दिएका भेनचित्रहरूमा छाया पारेको भाग कुन समूह हो सङ्केतमा उत्तर लेख्नुहोस् ।

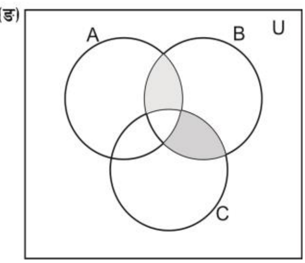
(क)


(ख)


(ग)


(घ)


(ङ)


(ङ)


उत्तरहरू

1. (क) {i,k} (ख) U (ग) {a,c,e,f,g} (घ) {b,d,j,h}

(ङ) {a,b,c,d,e,f,g,h,j} (च) { } र भेन चित्रहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) {1,2,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29}

(ख) {2} (ग) {1,9,15,21,25,27}

(घ) {4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30}

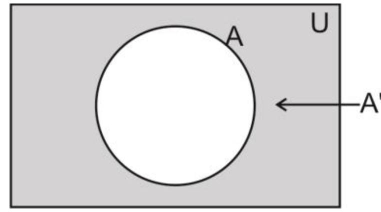
(ङ) {1,9,15,21,25,27} र भेन चित्रहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) A-B (ख) B-A (ग) B-A (घ) A-(B∪C) (ङ) (A∩B)-C

(च) (A∩B)∪(B∩C)-(A∩B∩C)

10.2 समूहहरूको पुरक (Complement of Sets)



मानौँ समूह A कुनै सर्वव्यापी समूह U को उपसमूह हो । यसो हुँदा समूह U मा समूह A मा भएका सबै सदस्यहरू लगायत केही थप सदस्यहरू हुन्छन् । जुन सदस्यहरू समूह A मा हुँदैनन् । यस्ता सर्वव्यापी समूहमा मात्र हुने र समूह A मा नहुने अतिरिक्त सदस्यहरूको समूहलाई समूह A को पुरक समूह (Complement of A) भनिन्छ । यसलाई A' अथवा $\bar{A}$अथवा A^cद्वारा जनाइन्छ । अर्को शब्दमा कुनै सर्वव्यापी समूह र त्यसको उपसमूहको फरक (difference) लाई त्यो उपसमूहको पूरक भनिन्छ । यसलाई सङ्केतमा लेख्दा सर्वव्यापी समूह U को उपसमूह A को पूरक A'= U-A हुन्छ । यहाँ स्मरण गर्ने करा के छ भने A र A' को संयोजन जहिले पनि U हुन्छ । अत: A र A' लाई एक अर्काको पूरक भनिन्छ । अर्थात् A को पूरक = A' र A' को पूरक = A हुन्छ ।

भेन चित्रमा A' चित्रमा देखाउने तरिका:

अत: के भन्न सकिन्छ भने दुईओटा समूहहरू A र B एक अर्काको पूरक हुनको लागि दुवैको संयोजन U हुनु पर्दछ । अर्थात् A∪B = U हुनुपर्दछ । त्यसो भएमा A'=B र B' = A हुन्छ । साथै A∩A' = ∅र B∩ $B' = \emptyset$ पनि हुन्छ ।

अत: संक्षेपमा,$\overline{A}$or A' = U-A = {x: ϵU, x∉A} हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि U= {1,2,3,............18,19,20}, A= {1,3,5,7,11,13,15,17,19} र B={2,4,6,8,10,12,14,16,18,20} भए निम्न समूहहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) A' (ख)B' (ग)A'∪B' (घ)A'∩B'

समाधान

यहाँ U= {1,2,3,..............18,19,20}

A= {1,3,5,7,11,13,15,17,19}

B= {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}

अत: (क) A' = U-A = {1,2,3...........18,19,20} - {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19}

= {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20} = B

(ख) B' = U-B= {1,2,3................18,19,20} – {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}

= {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19} =A

(ग) A'∪B' = {2,4,6,8,10,12,14,16,18,20} ∪ {1,3,5,7,9,11,13,15,17,19}

= {1,2,3,4.................18,19,20} = U

(घ) A'∩B' = {2,4,6,10,12,14,16,18,20} ∩ {1,3,5,7,9,11,15,17,19}

= { } = ∅ (रिक्त समूह)

उदाहरण 2

यदि U = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k}, A= {a,c,e,g,i,k} र B= {b,d,e,f,i,j} भए निम्न समूहहरू पत्ता लगाउनुहोस् र भेन चित्रमा पनि देखाउनुहोस् ।

(क) A' (ख) B' (ग) (A∪B)' (घ) (A∩B)' (ङ) A

समाधान

यहाँ, U= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k}, A= {a,c,e,g,i,k} र B= {b,d,e,f,i,j}

अत: (क) A' = U= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k} – {a,c,e,j,i,k} = {b,d,f,g,h}

(ख) B' = U-B = {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k} – {b,d,e,d,f,i,j}

= {a,c,g,h,k}

(ग) (A∪B)' = U-(A∪B)

= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k} – {a,c,e,j,i,k} U ({b,d,e,f,i,j})

= {a,b,e,d,e,f,g,h,i,j,k} – {a,b,e,f,i,j,k}

= {g,h}

(घ) (A∩B)' = U- (A∩B)

= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k} – ({a,c,e,j,i,k} U {b,d,e,f,i,j})

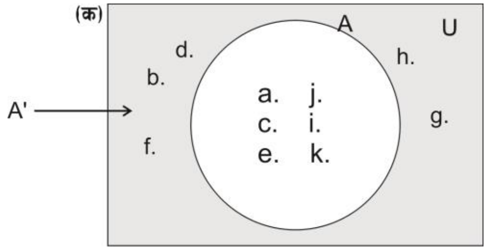
= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k} – {e,i,j}

= {a,b,c,d,f,g,h,k}

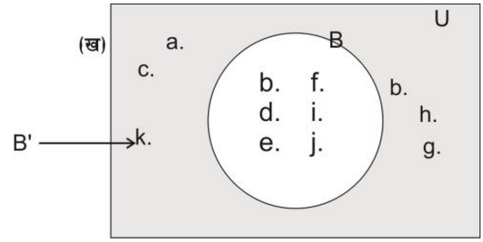
(ङ) $A \cap A'$ $= \{a,c,e,i,j,k\} \cap \{b,d,f,g,h\} = \{\ \}$

भेन चित्रमा

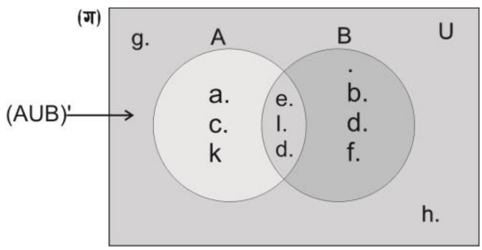
(क)



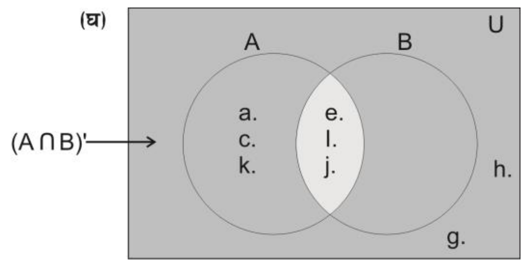
(ख)



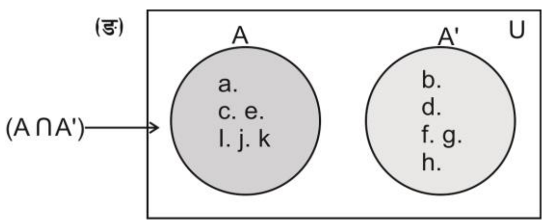
(ग)



(घ)



(ङ)



उदाहरण 3

यदि $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ र $A\{1,3,5,7,9\}$ भए निम्न समूहहरू निकाल्नुहोस् ।

(क) A' (ख) AUA' (ग) AA' (घ) A''

समाधान

यहाँ $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ र $A\{1,3,5,7,9\}$

अतः (क) A' $= U - A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} - \{1,3,5,7,9\}$

$= \{2,4,6,8,10\}$

(ख) AUA' $= \{1,3,5,7,9\} \cup \{2,4,6,8,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = U$

(ग) $A \cap A'$ $= \{1,3,5,7,9\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{\ \} = \emptyset$

(घ) A'' $= (A')' = \{2,4,6,8,10\}' = U - A'$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} - \{2,4,6,8,10\}$

= {1,3,5,7,9}= A

यसबाट प्रष्ट हुन्छः AUA' = U र A∩A' = ∅.

अभ्यास

1. यदि U= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p}, A= {i,k,o,n,p}

   र B={a,c,g,f,k,l,n,p} भए निम्न समूहहरू निकाल्नुहोस् र भेन चित्रमा पनि देखाउनुहोस् ।

   (क) A' (ख) B' (ग) (A')' (घ) (B')'

   (ङ) AUA' (च) BUB'

2. यदि U= {1,2,3................18,19,20}, A = {1,2,8,10,14,15} र

   B = {9,12,17,19,20} भए निम्न समूहहरू निकाल्नुहोस् ।

   (क) (AUB)' (ख) (A∩B)' (ग) (AUB)' ∪(A∩B)'

   (घ) U' (ङ) ∅′ (च) (AUB)' ∩(A∩B)'

3. तपाइँ पढ्ने कक्षामा विद्यार्थीहरूबाट निम्न समूहहरू बनाउनुहोस् ।

   (क) सबै विद्यार्थीहरूको समूह (ख) छात्रहरूको समूह र (ग) छात्राहरूको समूह । यि समूहहरू मध्ये कुन समूह सर्वव्यापक समूह र कुन समूहहरू यसका उपसमूह हुन् ? उपयुक्तसङ्केत सहित लेख्नुहोस् । यसपछि यी सबै समूहहरूका पूरक समूहहरू निकाल्नुहोस् ।

4. यदि U= {1 देखि 12 सम्मका पूर्णाङ्कहरूको समूह},

   P= {1 देखि 12 सम्मका जोर सङ्ख्याहरूको समूह}

   Q= {1 देखि 12 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह}

   R= {1 देखि 12 सम्मका रुढ सङ्ख्याहरूको समूह} भए निम्न समूहहरू पत्ता लगाई भेन चित्रमा देखाउनुहोस् ।

   (क) $\overline{P}$ (ख) $\overline{Q}$(ग) $\overline{R}$ (घ) $(\overline{PUR})'$ (ङ) $\overline{P \cap Q}$(च) $\overline{P - Q}$

   (छ) $\overline{\overline{R}}$ त्र(ज) $\overline{(R-P)UQ}$(झ) $\overline{U}$ (ञ) ∅'

   (ट)$\overline{(P \cap Q) \cap R}$ (ठ) P∩P' (ड) PUP'

5. कुनै एउटा निश्चित सदस्य भएको सर्वव्यापी समूह U र त्यसका दुईओटा उपसमूहहरू X र Y बनाउनुहोस् । त्यसपछि निम्न समूहहरूको मान निकाल्नुहोस् :

(क) $\overline{(XUY)}$ (ख) (X∩Y)' (ग) $\overline{(X-Y)}$

6. यदि U= {a,b,c,d,e,f,g,h}, A={a,c,f} र B= {d,g,h} भए (i) $\overline{(AUB)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ र (ii) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ हुन्छ भनी पुष्टि गर्नुहोस् ।

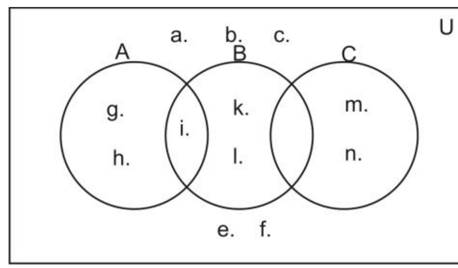
7. यदि U= {1,2,3,4,5,6,7,8,9}, A= {2,3,5}, B={4,7.8} र C= {6,9,10} भए A-(BUC) =(A-B)∩ (A-C) हुन्छ भनी पुष्टि गर्नुहोस् ।

8. दिएको भेन चित्रबाट निम्न समूहहरूको मान निकाल्नुहोस् ।

(क) U (ख) A (ग) B (घ) C

(ङ) A∩C (च) A∩ B ∩ C (छ) A-C

(ज) (A-C)' (झ) (AUBUC)'



उत्तरहरू

1. (क) A'= {a,b,c,d,e,f,g,h,j,l,m} (ख) B'= {b,m,o,d,i,j,h,e}

(ग) (A')' = {i,k,o,n,p} (घ) (B')' = {a,c,g,f,h,l,n,p}

(ङ) AUA'= {a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,k}

(च) (BUB)' = { a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p} भेन चित्र शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

2. (क) (AUB)' = {3,4,5,6,7,11,13,16,18} (ख) U

(ग) {3,4,5,6,7,11,13,16,18} (घ) ∅ (ङ) U (च) ∅

3. (क) सबै विद्यार्थीको समूह U (ख) नाम दिनुहोस् (ग) नाम दिनुहोस्

(क) U'= ∅(ख) छात्रहरूको समूहको पूरक = छात्राहरूको समूह

(ग) छात्राहरूको समूहको पूरक = छात्रहरूको समूह

4. (क)$\overline{P}$ = Q (ख)$\overline{Q}$ = P (ग)$\overline{R} = \{1,4,6,8,9,10,12\}$(घ){1,9}(ङ)U

(च)Q (छ)R (ज)P (झ)∅ (ञ)U

(ट) {1,4,6,8,10,12,9} (ठ)∅ (ड)U

भेन चित्रहरू शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

8. (क) U= {a,b,c,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n} (ख) A= {g,h,i}

(ग) B= {i,j,k,l} (घ) {j,m,n}

(ङ)∅ (च)∅ (छ)A (ज) {a,b,k,l,j,m,n,e,f}

(झ) {a,b,c,e,f}

10.3 समूहको गणनात्मकता (Cardinality of a set)

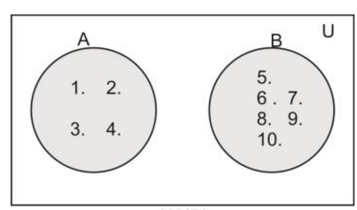
हामीहरूले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरे अनुसार सीमित समूहको सदस्य सङ्ख्या गन्न सकिन्छ र असिमित समूहरूको सदस्य सङ्ख्या गन्न सकिदैन । कुनै सीमित समूहको सदस्य सङ्ख्या गन्न सकिने अवस्थालाई त्यसको गणकता अथवा गणनात्मकता (Cardinality) भनिन्छ । कुनै सीमित समूहको जम्मा सदस्य सङ्ख्यालाई त्यसको गणकअथवा गणनात्मक सङ्ख्या (Cardinal number) भनिन्छ । कुनै सीमित समूह A को गणनात्मक सङ्ख्यालाई n(A) लेख्ने चलन छ । जस्तै A= {a,b,c} भए n(A) = 3 लेखिन्छ ।

10.4 दुईओटा समूहहरूको संयोजनको गणनात्मक सङ्ख्या (Cardinal number of union of two sets)

(क) समूहहरू अलग्गिदा (when sets are disjoint)

मानौं समूह A= {1,2,3,4} र समूह B= {5,6,7,8,9,10}

यहाँ, n(A) = 4 र n(B) = 6 छ ।



(AUB)

अब, A∪B= {1,2,3,4} U {5,6,7,8,9,10}

= {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

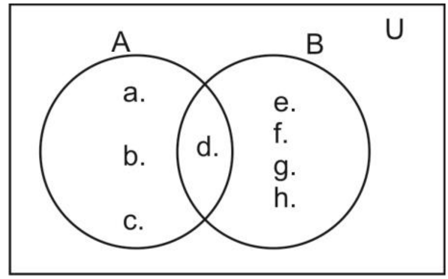
∴ n(AUB)= 10 = 4+6 =n(A)+n(B)

अतः अलग्गिएका समूहहरू A र B को संयोजनको गणनात्मक सङ्ख्या n(AUB) = n(A)+n(B) हुन्छ ।

(ख) खप्टिएका समूहहरूको गणनात्मक सङ्ख्या (cardinal number of overlapping sits)

मानौँ A= {a,b,c,d} र B= {d,e,f,g,h}

यहाँ n(A) = 4 र n(B)= 5 छ ।



∴ n(A) +n(B)= 9 =

अब AUB = {a,b,c,d} U {d,e,f,g,h}

= {a,b,c,d,e,f,g,h}

∴ n(AUB) = B

र A∩B = {d} छ । ∴n(A∩B) = 1

अत: n(AUB)= 8=9-1 = n(A)+n(B)-n(A∩B) हुन्छ ।

भेन चित्रबाट प्रष्ट हुन्छ कि:

n(AUB)= 8 र n(A) +n(B)= 4+5=9 छ ।

n(A)+n(B) को सङ्ख्या n(AUB) को सङ्ख्या भन्दा 1 ले बढी छ । किनभने n(A) +n(B) मा साझा सदस्य 'd' दुईपटक जोडीएको हुन्छ । यसरी बढी जोडीएको सङ्ख्या अर्थात n(A∩B) लाई n(A)+n(B) बाट घटायो भने n(AUB) आउाछ ।

अत: खप्टिएका समूहहरू A र B को संयोजनको गणनात्मक संख्या, n(AUB) = n(A)+n(B)-n(A∩B) हुन्छ ।

विशेष अवस्थाहरू

(क) यदि ACB भएमा n(AUB) = B(B) हुन्छ र BCA भएमा n(AUB)= n(A) हुन्छ ।

(ख) यदि AUB= U भए n(AUB)= n(U) हुन्छ र (AUB)C U भए n(AUB)+n $\overline{(AUB)}$ = n(U) हुन्छ ।

(ग) n(AUB)= n(BUA) र n(A∩B) = n(B∩A) हुन्छ ।

(घ) n(A) = n_0 (A) +n(A∩B) हुन्छ, जहाँ n_0 (A) भनेको A मा मात्र पर्ने सदस्यहरूको सङ्ख्या हो ।

त्यसरी नै n(B) = n_0(B)+n(A∩B) हुन्छ, जहाँ n_0 (B)भनेको B मात्र पर्ने सदस्यहरूका सङ्ख्या हो । यि सबै सूत्रहरू माथिको भेन चित्रबाट पुष्टि गर्न सकिन्छ । अत: माथिको भने चित्रको प्रयोग गरी उपर्युक्त सबै सूत्रहरू पुष्टि गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

यदि $A=\{a,b,c,d\}$ र $B=\{b,c,d,e,f\}$ भए निम्न गणनात्मक सङ्ख्याहरू निकाल्नुहोस् ।

(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$ (ग) $n(A\cap B)$(घ) $n(A\cup B)$ (ङ) $n_0(A)$ (च) $n_0(B)$

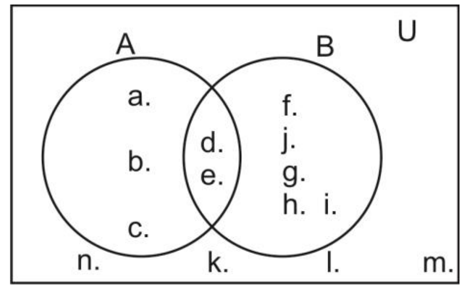
समाधान (क) $n(A) = 4$ (ख)$n(B)=5$

(ग) $n(A\cap B)=\{b,c,d\} \therefore n(A\cap B)=3$

(घ) $n(A\cup B) =n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 4+5-3= 6$

(ङ) $n_0(A) = n(A)-n(A\cap B) =4-3 = 1$

(च) $n_0 (B) = n(B)-n(A\cap B)= 5-3 = 2$



उदाहरण 2

दिएको भेन चित्रबाट निम्न गणात्मक सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $n(A)$ (ख) $n(B)$ (ग) $n(U)$ (घ) $n(A\cap B)$

(ङ) $n(A\cup B)$ (च) $n_0(A)$ (छ) $n_0(B)$

समाधान

(क) $n(A) = 5$ (क) $n(B) = 7$

(ग) $n(U) = 14$ (घ) $n(A\cap B) = 2$

(ङ) $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B) = 5+7-2 = 10$

(च) $n_0(A) = n(A)- n(A\cap B) =5-2 = 3$

(छ) $n_o(B) = n(B)-n(A\cap B) = 7-2 = 5$

उदाहरण 3

एउटा कार्यालयमा गरेको सर्वेक्षणमा सम्मिलित कर्मचारीहरूमध्ये 60 जनाले चिया मन पराउँछन्, 70 जनाले कफि मन पराउँछन् र 25 जनाले दुवै मन पराउँछन् । यदि 15 जना कर्मचारीले कुनै पनि मन पराउँदैनन् भने भेन चित्रमको मदतले निम्न कुराहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) चिया मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या

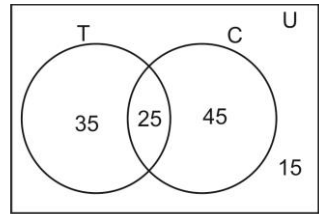
(ii) कफि मात्र मन पराउनेको सङ्ख्या

(iii) कम्तीमा एउटा मन पराउनेको सङ्ख्या

(iv) जम्मा कर्मचारीको सङ्ख्या ।

समाधान

मानौँ चिया र कफि मन पराउने कर्मचारीहरूको समूहहरू क्रमशः T र C छन् र जग्गा सङ्ख्या = n(U) छ ।



अतः प्रश्नानुसार, n(T)= 60 , n(C)= 70, n(T∩C) =25 र $n\overline{(T\cup C)}$ = 15, n_0(T)= ?, n_0(C)= ?

यो सबै सूचनालाई भेन चित्रमा देखाएको छ ।

(i) भेन चित्रबाट $n_0(T) = n(T)-n(T\cap C) = 60-25 = 35$

(ii) $n_0(C) = n(C)-n(T\cap C)= 70-25 = 45$

(iii) $n(T\cup C)= n(T)+n(C) – n(T\cap C) = 70+60-25 = 105$ र

(iv) $n(U) = n(T\cup C)+n\overline{(T\cup C)} = 105+15 = 120$

अतः जम्मा कर्मचारी सङ्ख्या = 120 जना

अभ्यास

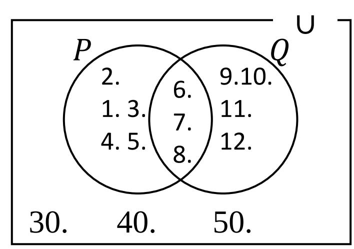
1. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ र $B = \{4,5,6,7,8\}$ भए निम्न गणनात्मक सङ्ख्याहरू निकाल्नुहोस् ।

   (क) n(A) (ख) n(B) (ग) $n(A\cap B)$ (घ) no(A) (ङ) no(B)

2. यदि $n(\cup) = 120$, $n(A) = 40$, $n(B) = 55$ र $n(A\cap B) = 15$ भए निम्न गणनात्मक सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) no(A) (ख) no(B) (ग) $n(A\cup B)$ (घ) $n(\overline{A\cup B})$

3. दिएको भेन चित्र हेरी निम्न गणनात्मक सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।



   (क) n(P) (ख) n(Q) (ग) $n(P\cap Q)$
   (घ) no(P) (ङ) no(Q)

   (च) $n(A\cup B)$ (छ) $n(\cup)$

4. एउटा गाउँको 200 परिवारमा गरेको सर्वेक्षणमा ग्यासमा खाना पकाउनेको सङ्ख्या 120 परिवार, हिटरमा खाना पकाउने परिवारको सङ्ख्या 145 र दुवैमा खाना पकाउने परिवारको सङ्ख्या 80 पाइयो । अब भेन चित्रको मद्दतले निम्न कुराहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) ग्यासमा मात्र खाना पकाउने परिवारको सङ्ख्या ।

   (ख) हिटरमा मात्र खाना पकाउने परिवारको सङ्ख्या ।

(ग) ग्यास र हिटरमध्ये कम्तीमा एउटामा खाना पकाउने परिवारको सङ्ख्या ।

(घ) दुवैमा खाना नपकाउने परिवारको सङ्ख्या ।

5. एउटा कक्षाका सम्पूर्ण विद्यार्थीहरू मध्ये 70 जनाले गणित पढ्छन् 60 जनाले विज्ञान पढ्छन् र 25 जनाले दुवै पढ्छन् भने सो कक्षामा जम्मा कति विद्यार्थीहरू छन् होला ? भेन चित्रको प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. एउटा गाउँमा 45% ले वुद्ध धर्म मान्दछन्, 65% ले हिन्दुधर्म मान्दछन् र 30% ले दुवै धर्म मान्दछन् । उपर्युक्त विवरणलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गरी निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) वुद्ध कर्म मात्र कति प्रतिशतले मान्दछन् ?

(ख) हिन्दु धर्महरू मध्ये कम्तीमा कति प्रतिशतले मान्दछन् ?

(ग) दुवै धर्महरू मध्ये कम्तीमा एउटा धर्म मान्नेहरू कति प्रतिशत छन् ?

(घ) दुवै धर्म नमान्नेहरू कति प्रतिशत छन् ?

7. एउटा परिक्षमा सम्मिलित 250 विद्यार्थीहरू मध्ये 160 जना गणितमा मन पराए, 130 जना अंग्रेजीमा मन पराए र 40 जना दुवैमा मन पराएनन् । भने भेन चित्र प्रयोग गरी निम्न प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) कम्तीमा एउटा विषय मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या ।

(ख) दवै विषयमा मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या ।

(ग) गणितमा मात्र मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या ।

(घ) अङ्ग्रेजीमा मात्र मन पराउने विद्यार्थीको सङ्ख्या ।

8. एउटा विद्यालयका विद्यार्थीहरू माझ गरिएको सर्वेक्षणमा 230 जनाले खेलमा भाग लिन्छन्, 240 जनाले संगीतमा भाग लिन्छन् र 150 जनाले दुवैमा भाग लिन्छन् । यदि 170 जनाले कुनैमा पनि भाग लिदैनन् भने त्यो विललयमा जम्मा कति विद्यार्थीहरू छन् ? भने चित्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू

1. (क) $n(A) = 5$ (ख) 5 (ग) 2 (घ) 3 (ङ) 3
2. (क) 25 (ख) 40 (ग) 80 (घ) 40
3. (क) 8 (ख) 7 (ग) 3 (घ) 5 (ङ) 4 (च) 12 (छ) 16
4. (क) 40 (ख) 65 (ग) 185 (घ) 15
5. 105
6. (क) 15% (ख) 35% (ग) 80% (घ) 20%
7. (क) 210 (ख) 80 (ग) 80 (घ) 50
8. 490

पाठ ११ पूर्ण सङ्ख्याहरू (Whole Numbers)

11. पुनरावलोकन(Rivision)

मानव जातिले सबैभन्दा पहिले विकास गरेको शिक्षा गणितलाई मानिन्छ र गणितमा पनि सबैभन्दा पहिले लगभग ढुङ्गे युग देखि नै सुरु भएको गणितीय क्रियामा गन्ने कार्य पर्दछ । वस्तुहरूलाई गन्ने कार्यमा प्रयोग गरिदै आएका सबैभन्दा पुराना सङ्ख्याहरूलाई प्राकृतिक सङ्ख्याहरू (Natural Numbers) भनिन्छ । प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूहमा 1,2,3,4,5 ... ... आदि सङ्ख्याहरू पर्दछन् । यी सङ्ख्याहरूको समूहमा जोड्ने र गुणन गर्ने क्रियाहरू राम्ररी परिभाषित थिए तर घटाउने र भाग गर्ने प्रक्रिया राम्ररी परिभाषित थिएन् । जस्तै बराबरबाट बराबर घटाउदा अर्थात बराबर सङ्ख्याहरूलाई आपसमा घटाउँदा कति बाँकी रहन्छ भनेर जनाउने कुनै सङ्ख्यात्मक सङ्केत थिएन् । यो कमिलाई पूरा गर्न सर्वप्रथम हिन्दु गणितज्ञहरूले प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूहमा 0सङ्केत थप्ने काम गरे जसलाई संस्कृतमा शून्य र अंग्रेजीमा (zero) भनिन्छ । यसरी 0 थपेपछि बनेको नयाँ समूहलाई पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह (Set of whole number) भनिन्छ र यसलाई W ले जनाइन्छ । अतः प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह $N = \{1, 2, 3, 4 \dots \dots \dots .\}$ हुन्छ र पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह $W = \{0, 1,2,3, 4, \dots \dots . .\}$ हुन्छ । पूर्ण सङ्ख्याहरूको यो समूहमा एक अङ्कमा जम्मा दशओटा सङ्ख्याहरू छन् । यिनै दशओटा सङ्ख्याहरूले अरु सम्पूर्ण सङ्ख्याहरूलाई लेख्न र तिनिहरूको हिसाबहरू गर्न सकिन्छ । यसरी दशओटा अङ्कहरू 0,1,2,3,4,5,6,7,8, र 9 लाई प्रयोग गरी अन्य सङ्ख्याहरूलाई लेख्ने र तत् सम्बन्धीहिसाबहरू गर्ने सङ्ख्यात्मक पद्धतीलाई दशमलब सङ्ख्याकन पद्धती (Decimal Numeration system or Numeral system or denary system) भनिन्छ । अब हामीहरू यो अध्यायमा यही दशमलब सङ्ख्याकन पद्धति र यस्तै अन्य पद्धतिको बारेमा अध्ययन गर्नेछौं ।

11.1 दशमलब सङ्ख्याकन पद्धति (Denary Syetem of numeration)

माथि भने जस्तै 0 देखि 9 सम्मका अङ्कहरू प्रयोग गरी गरिने सङ्ख्याकन पद्धतिलाई दशमलब सङ्ख्याकन पद्धति भनिन्छ । यस पद्धतिमा हरेक सङ्ख्यालाई 10 को विभिन्न घातको रूपमा प्रस्तुत गरिन्छ । यस पद्धति अन्तर्गत हरेक सङ्ख्याहरूको स्थानमान हुन्छ, जसअनुसार एक अर्काको सङ्ख्याको इकाइ स्थान, दुई अङ्कको सङ्ख्याको लागि दश स्थान, तीन अङ्कको सङ्ख्याको लागि सय स्थान, चार अङ्कको लागि हजार स्थान आदि हुन्छ । साथै इकाइस्थानको गुणाङ्कमा 10° दशको स्थानमा $10'$, सयको स्थानमा 10^2, हजारको स्थानमा 10^3 आदि हुन्छ । अब हामीहरू दशओटा अङ्कहरूमा आधारित सङ्ख्याहरू

(Denary numbers) लाई 10 को विभिन्न घातको रूपमा लेख्न सिक्नेछौँ, जसलाई ती सङ्ख्याहरूको विस्तारित रूप भनिन्छ ।

उदाहरण–1

44568_{10} लाई विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस्

समाधान

$44568_{10} = 40000 + 4000 + 500 + 60 + 8$

अथवा $44568_{10} = 4 \times 10000 + 4 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 8$

$= 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

दशस्थान	इकाइ स्थान
0000000000	
0000000000	00 00
0000000000	

3×10 4×1

उदाहरण 1

34_{10} लाई विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ $34_{10} = 30 + 4 = 3 \times 10 + 4 \times 1 = 3 \times 10' + 4 \times 10°$

1.2 पञ्चाधार संख्यात्मक पद्धति (Quinary numeral system)

दशमलब सङ्ख्याकन वा सङ्ख्यात्मक पद्धतिमा 0 देखि 9 सम्मका अङ्कहरू प्रयोग गरे जस्तै पञ्चाधार सङ्ख्यात्मक पद्धतिमा 0,1,2,3,4 गरी जम्मा 5 ओटा अङ्क अथवा सङ्ख्याहरू प्रयोग गरिन्छन् । यस पद्धतिमा हरेक सङ्ख्याको आफ्नै स्थानमा (Positional value) हुन्छ, जसअनुसार इकाइस्थान, पाँच स्थान, पच्चीस स्थान, एकसय पच्चीस स्थान इत्यादि । इकाइ स्थानको अङ्कको मान आफ्नै हुन्छ, अर्थात् इकाइस्थानको गुणाङ्क वा गुणक $5°$, पाच स्थानको $5'$, पच्चीस स्थानको 5^2, एक सय पच्चीस स्थानको गुणाङ्क5^3इत्यादि हुन्छ । अब हामीहरू पञ्चाधार सङ्ख्यात्मक पद्धति अनुसार विभिन्न सङ्ख्याहरूलाई स्थानमान अनुसार 5 को घातको रूपमा लेख्न सिक्ने छौ ।

उदाहरण 1

124_{10} लाई पञ्चाधार सङ्ख्यात्मक पद्धतिमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

हल : $124_{10} = 100 + 20 + 4$

$= 4 \times 25 + 4 \times 5 + 4 \times 1$

$= 4 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 444_5$

उदाहरण 2

3214_5 लाई विस्तारित रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

हल : $3214_5 = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

11.3 द्विआधार संख्यात्मक पद्धति (Bimnary Numeral System)

माथि वर्णन गरिएको दशमलब र पञ्चाधार सङ्ख्यात्मक पद्धति भए जस्तै द्विआधार सङ्ख्यात्मक पद्धति पनि प्रचलनमा छ । खासगरी कम्प्युटर सम्बन्धी हिसाबहरूमा द्विआधार सङ्ख्यात्मक पद्धति (Binary Numeral System) बढी प्रयोगमा आउँछ । यस पद्धतिमा जम्मा दुईओटा अङ्कहरू 0 र प्रयोग गरी सम्पूर्ण सङ्ख्याहरूलाई लेख्ने र तत्म्बन्धी हिसाबहरू गर्ने काम गरिन्छ । द्विआधार सङ्ख्यात्मक पद्धतिको आफ्नै स्थानमान तालिका छ । जसअनुसार इकाइ स्थान, दुईस्थान, चार स्थान, आठ स्थान, सोह्र स्थान, बत्तिस स्थान इत्यादि छन् । साथै इकाइ स्थानको गुणाङ्कमा 2^0, दुई स्थानमा2^1, चार स्थानमा 2^2, आठस्थानका 2^3 इत्यादि हुन्छन् । अब हामी द्विआधार सङ्ख्यात्मक पद्धतिमा विभिन्न सङ्ख्याहरूको विस्तारित रूप लेख्न सिक्ने छौं ।

उदाहरण 1

23 लाई द्विआधार पद्धतिको विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस् ।

समाधान

$23 = 16 + 4 + 2 + 1$

$= 2^4 + 0.2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

उदाहरण 2

$$10101101_2 = 1 \times 2^7 + 0 \times 6^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

11.4 दशमलब पद्धतिको पञ्चआधारमा रूपान्तरण
(Conversion of decimal system into quinery system)

दशमलब पद्धतिमा दिएको कुनै पनि सङ्ख्यालाई पञ्चआधारमा परिवर्तन गर्न सर्वप्रथम दिएको सङ्ख्यालाई 5 ले भाग गर्ने र भाग गर्दा भागफल शून्य नहुन्जेल सम्म भाग गरी रहनुपर्दछ । हरेक चोटि भाग गर्दा आएको शेषलाई दायाँतिरठाडो स्तम्भमा टिप्ने । भागफल 0 हुँदाको शेष अन्तिम शेष हुन्छ । यसरी प्राप्त शेषहरूलाई क्रमिक रूपमा इकाइ स्थानबाट लेख्नेजहाँ पहिलो शेष इकाइ स्थानमा र अन्तिम शेष अन्तिम स्थानमा पर्नुपर्दछ । यो प्रक्रिया तलको उदाहरणहरूमा प्रष्ट पारिएको छ ।

उदाहरण

तलका सङ्ख्याहरूलाई पञ्चआधारमा परिवर्तन गर्नुहोस् ।

(क) 602_{10}(ख) 1050

(क)

5	602	शेष
5	120	2
5	24	0
5	4	4
5	0	4

(5 ले भाग गर्दा)

अत: $602_{10} = 4402_5$(प्रथम शेषलाई इकाइस्थानमा राखेर क्रमिक रूपले अन्तिम शेषलाई स्थानमा राखिएको छ ।)

(ख) **समाधान**

5	1050	शेष
5	210	0
5	42	0
5	8	2
5	1	3
	0	1

अत:$1050 = 13200_5$ हुन्छ ।

(स्मरण रहोस् 10 आधारलाई नलेख्दा पनि हुन्छअर्थात $1050_{10} = 1050$ हुन्छ ।

11.5 पञ्आधार पद्धतिबाट दशमलबमा रूपान्तरण

(Conversion from quinary to Decinary system)

पञ्चआधारमा व्यक्त सङ्ख्यालाई दशमलब पद्धतिमा परिवर्तन गर्न सर्वप्रथम सो सङ्ख्यालाई 5 को घातको रूपमा विस्तार गर्ने र सबै पदलाई सरल गर्ने । यसरी प्राप्त सङ्ख्या दशमलब पद्धतिमा परिणत हुन्छ । यसको लागि निम्न उदाहरण हेर्नुहोस् ।

उदाहरण–13244_5 लाई दशमलब पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस्

हल $3244_5 = 3 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

$= 3 \times 125 + 2 \times 25 + 20 + 4 \times 1$

$= 375 + 50 + 20 + 4$

$= 425 + 24 \ = 449$ans.

11.6 दशमलब पद्धतिबाट द्विआधारमा रूपान्तरण

(Conversion of decimal numeral system into Binary)

दशमलब पद्धतिमा व्यक्त सङ्ख्यालाई द्विआधारमा परिवर्तन गर्न सो सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्नु पर्दछ । भाग गर्दा भागफल शून्य नहुन्जेल सम्म गर्नुपर्दछ । यसरी प्रत्येक पटक भाग गर्दा आउने शेषहरूलाई ठाडो स्तम्भमा टिपोट गर्ने र अन्तमा उत्तर लेख्दा प्रथम शेषलाई इकाइस्थानमा र अन्तिम शेषलाई अन्तिम स्थानमा पर्ने गरी क्रमिक रूपमा लेख्ने । यसको लागि निम्न उदाहरण हेर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दशमलब सङ्ख्या 224 लाई द्विआधारमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

हल : 224लाई तल अनुसार भाग गर्नुहोस् ।

2	224	शेष
2	112	0
2	56	0
2	28	0
2	14	0
2	7	0
2	3	1
2	1	1
	0	1

अत: $224 = 11100000_2$

11.7 द्विआधारपद्धतिलाई दशमलबमा रूपान्तरण

(Conversion of Binary numeral system into dicinary one)

द्विआधारमा व्यक्त सङ्ख्यालाई दशआधार वा दशमलबमा परिवर्तत गर्न सर्वप्रथम दिएको सङ्ख्यालाई द्विआधारमा 2 को घातको रूपमा लेख्ने र सबै पदलाई सरल गर्ने । यसो गर्दा आउने सङ्ख्या नै आवश्यक सङ्ख्या हुन्छ । तलको उदाहरण हेर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

111011_2 लाई दशमलब पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

हल: $111011_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59_{10}$

अभ्यास

1. निम्नलिखित सङ्ख्याहरू मध्ये एउटै आधार भएका सङ्ख्याहरू छुट्याई शिक्षकहरूलाई देखाउनुहोस् ।

   $1, 2, 4, 11, 15_{10}, 16, 18_{10}, 200_{10}, 413_5, 110_2, 11011, 11101_2, 912_{10}, 812, 444_5, 333, 1000_2$

2. तलका सङ्ख्याहरूलाई दशमलब पद्धतिबाट पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (क) 6 (ख) 8 (ग) 10 (घ) 35 (ङ) 412 (च) 200 (छ) 1000

3. तलका सङ्ख्याहरूलाई दशमलब पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (क) 444_5, (ख) 314_5, (ग) 410_5, (घ) 333_5, (ङ) 1112_5,

4. तलका सङ्ख्याहरूलाई दशमलब पद्धतिबाट द्विआधार पद्धतिमा परिवर्तन गर्नुहोस् ।

   (क) 111 (ख) 222 (ग) 310 (घ) 412 (ङ) 625 (च) 8 (छ) 64

5. तलका सङ्ख्याहरूलाई दशलब प्रणालीमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

   (क) 110_2, (ख) 111_2, (ग) 111011_2 (घ) 1111_2, (ङ) 1110110011_2,

उत्तरहरू

2. (क) 11_5, (ख) 13_5, (ग) 20_5 (घ) 120_5, (ङ) 3122_5, (च) 1300_5, (छ) 13000_5,

3. (क) 124 (ख) 84 (ग) 105 (घ) 93 (ङ) 157

4. (क) 1101111_2, (ख) 11011110_2, (ग) 100110110_2 (घ) 110011100_2,

   (ङ) 1001110001_2, (च) 1000_2, (छ) 1000000_2

5. (क) 6 (ख) 7 (ग) 59 (घ) 15 (ङ) 947

पाठ १२ पूर्णाङ्कहरू (Integers)

हामीहरूले अघिल्लो पाठमा पूर्णसङ्ख्याहरूको समूहको बारेमा पढी सक्यौं । $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\ldots.\}$ पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह भनिन्छ । यो समूहमा गुणन र जोड्ने काम राम्ररी परिभाषित छ अर्थात यो समूह कुनै पनि दुईओटा सदस्यहरूलाई जोड्दा र गुणन गर्दा आउने सङ्ख्या यसै समूहको सदस्य हुन्छ । तर घटाउने कार्य अथवा घटाउ क्रिया राम्ररी परिभाषित छैन । अर्थात पूर्णरूपमा परिभाषित छैन । किनभने सानो सङ्ख्याबाट ठुलो सङ्ख्या घटाउँदा आउने सङ्ख्या त्यो समूहमा थिएन । जस्तै $4 - 5 = ?$, $3 - 10 = ?$ यी प्रश्नहरूको सहि उत्तर $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots.\}$ मा पाइदैन । अतः पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूहमा घटाउने क्रियालाई पूर्ण परिभाषित गर्न यसमा ऋणात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरू अर्थात $-1, -2, -3, -4, -5, -6 \ldots\ldots\ldots\ldots.$ इत्यादि थप्ने काम गरियो । यसरी शून्य (0) सहित धनात्मक र ऋणात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरूलाई मिलाएर बनाएको नयाँ सङ्ख्याहरूको समूहलाई पूर्णाङ्कहरूको समूह (Set of integers) भनिन्छ । यसलाई I अथवा z ले सूचित गरिनछ र यसको मान $Z = \{0, \mp1, \mp2, \mp3, \mp4, \mp5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$ हुन्छ । यी पूर्णाङ्कहरूलाई सङ्ख्या रेखामा तल दिए अनुसार देखाइन्छ ।

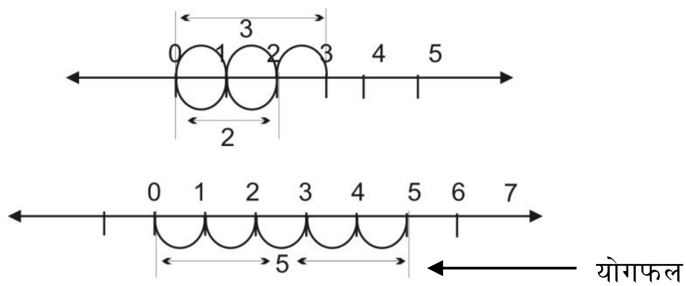
माथि देखाए जस्तै सङ्ख्या रेखाको ठिक बिचमा 0 पर्दछ र सबै धनात्मक पूर्णाङ्कहरू यसको दायाँ भागमा एक एकको फरकको बढ्दो क्रममा राखिएका छन् । यसरी नै सबै ऋणात्मक पूर्णाङ्कहरू 0 को बायाँतिर एक-एकको फरकमा घट्दो क्रममा राखिएका छन् । याद रहोस कि प्रत्येक दुईओटा क्रमागत पूर्णाङ्कहरूको फरक 1(इकाइ) हुन्छ । कुनै पनि दुईओटा क्रमागत पूर्णाङ्कहरूमा दायाँ पर्ने पूर्णाङ्क बायाँ पर्ने पूर्णाङ्क भन्दा 1 ले ठुलो हुन्छ । उदाहरणको लागि -3 भन्दा -2 एकले ठुलो छ ।

12.1 पूर्णाङ्कहरूको धनात्मक र ऋणात्मक चिह्न सम्बन्धी नियमहरू

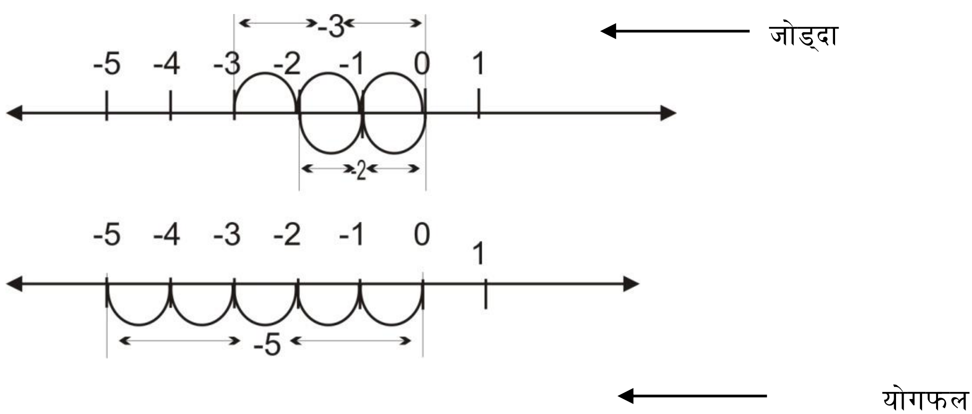
(Rules of Positive and negative sign of integers)

(क) पूर्णाङ्कहरूलाई जोड्दा

1. दुवै पूर्णाङ्कहरू धनात्मक भए योगफल पनि धनात्मक हुन्छ । जस्तै सङ्ख्या रेखामा $(+2)+(+3)=(+5)$ इकाइ दायाँ पुगिन्छ ।

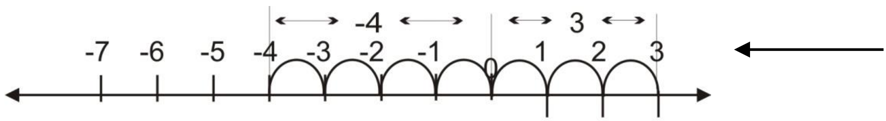


2. दुवै पूर्णाङ्कहरू ऋणात्मक भए योगफल पनि ऋणात्मक हुन्छ । जस्तै $(-2)+(-3)=(-5)$ इकाइबायाँ पुगिन्छ ।

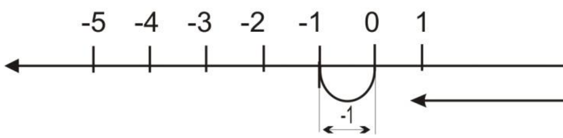


3. दुवै पूर्णाङ्कहरू फरक चिह्नका अर्थात एउटा धनात्मक र एउटा ऋणात्मक भए ठुलो पूर्णाङ्कको चिह्न बाँकी रहन्छ ।

जस्तैः$(-4) + 3 = -1$

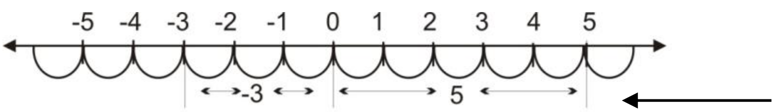


जोड्दा

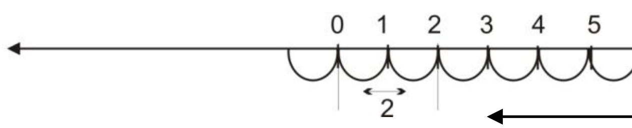


योगफल

अत : $3 - 4 = -1$ त्यस्तै $(-3) + (5) = +2$

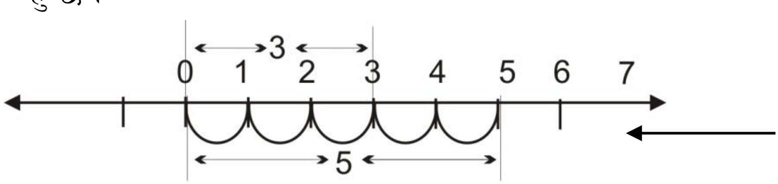


जोड्दा

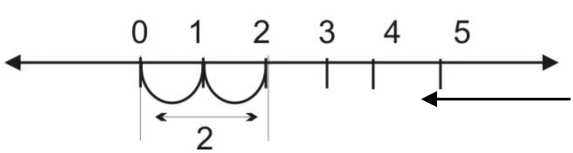


योगफल

(ख) **पूर्णाङ्कहरूलाई घटाउँदा** : (1) ठुलो धनात्मक पूर्णाङ्कबाट सानो धनात्मक घटाउँदा पूर्णाङ्क घटाउदा धनात्मक पूर्णाङ्क बाँकी रहन्छ । जस्तै $5 - 3 = 2$ हुन्छ ।



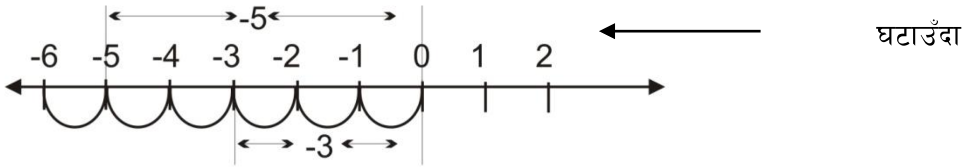
घटाउँदा

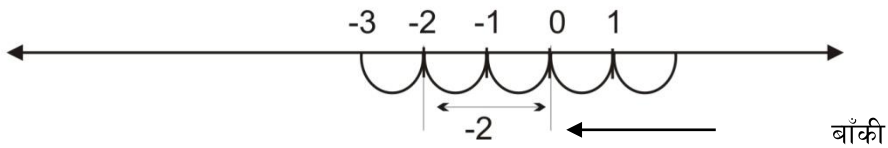


बाँकी

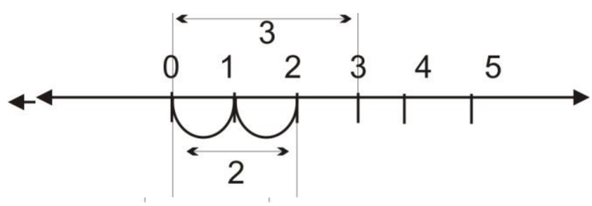
(2) ठुलो ऋणात्मक पूर्णाङ्कबाट सानो ऋणात्मक पूर्णाङ्क घटाउँदा ऋणात्मक बाँकी रहन्छ ।

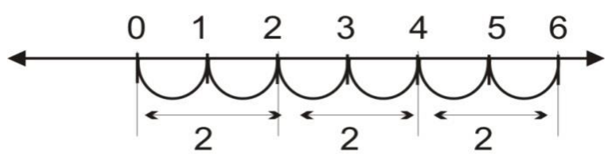
जस्तैः





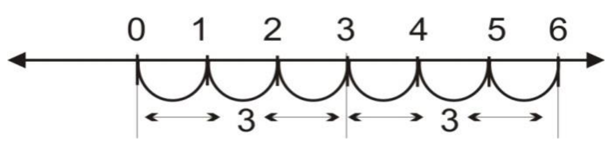
(ग) **पूर्णाङ्कहरूलाई गुणन गर्दा** :(1) धनात्मकलाई धनात्मक पूर्णाङ्कले गुणन गर्दा धनात्मक पूर्णाङ्क प्राप्त हुन्छ । जस्तैः$(+2) \times (+3) = +6$ हुन्छ किनभने 2×3 भनेको $3 + 3 = +2 \times 3 = 2 + 2 + 2$ हुन्छ ।





$(2 + 2 + 2) = 6$

अथवा

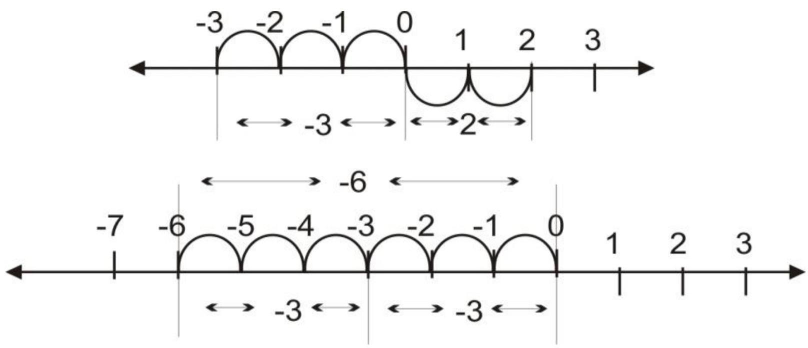


$(3 + 3 = 6)$

अतः $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$ हुन्छ ।

अर्थात् $(+) \times (+) = (+)$ हुन्छ ।

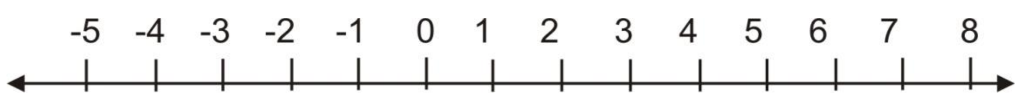
2. धनात्मक पूर्णाङ्कले ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई गुणन गर्दा गुणनफल ऋणात्मक हुन्छ । जस्तै : $2\times(-3)=-6$ हुन्छ किनकि : $2\times(-3)=(-3)+(-3)=-6$ हुन्छ, हामीलाई थाहा हुनुपर्ने कुरा के छ कि गुणन भनेको जोडको छोटकरी रूप हो ।



अतः $(-3)+(-3)=-6=2\times -3$

अर्थात $(+)\times(-)=(-)$ हुन्छ ।

3. ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कले गुणन गर्दा गुणनफल धनात्मक हुन्छ । जस्तै : $(-2)\times(-3)=+6$ हुन्छ । यसलाई बुझ्नको लागि निम्न सङ्ख्या रेखामा रहेका सङ्ख्याहरूलाई (-2)ले गुणन गर्दै जाऔँ ।



$-2\times 8=-16$

गुण्य(Multiplicand)

गुणाङ्क(Multiplier) $-2\times 7=-14$ गुणनफल(Product)

$-2\times 5=-10$

$-2\times 4=-8$

$-2\times 3=-6$

$-2\times 2=-4$

$-2\times 1=-2$

$-2\times 0=-0$

$-2 \times -1 = 2$ (किन ?)

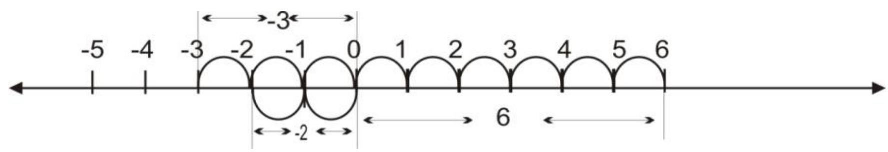
$-2 \times -2 = 4$ (किन ?)

$-2 \times -3 = 6$ (किन ?)

$-2 \times -4 = 8$ (किन ?)

$-2 \times -5 = 10$ (किन ?)

माथिको उदाहरणमा गुणन गर्ने सङ्ख्या (-2) नै छ । गुणन गरिएका सङ्ख्याहरू एकले घट्दै गएर दायाँबाट बाँयातिर जादैछन् र तिनीहरूका गुणनफलहरू दुई इकाइअर्थात दुई अङ्कले बढ्दै गएर बायाँबाट दायाँतिर जादैछन् । यसबाट ऋणात्मकलाई ऋणात्मकले गुणन गर्दा धनात्मक हुन्छ भन्ने कुरा प्रष्ट हुन्छ ।



अतः $(-2) \times (-3) = +6$

अर्थात $(-) \times (-) = (+)$

यसरी नै $(-6) - 4 = -6 + 4 = -2$

$(-4) - (-6) = -4 + 6 = 2$ हुन्छ इत्यादि ।

यसरी नै $(+) \div (+) = +, (-) \div (-) = (+), (-) \div (+) = (-)$ र $(+) \div (-) = (-)$ हुन्छ ।

12.2 पूर्णाङ्कहरूको जोडको नियमहरू (Laws of addition of integers)

पूर्णाङ्कहरूलाई जोड्ने, घटाउने, गुणन गर्ने र भाग गर्ने तरिका र सो सम्बन्धी क्रियाहरूका चिह्न सम्बन्धीनियमहरू हामीले थाहा पाइसक्यौँ । अब हामीहरू पूर्णाङ्कहरूका जोडका नियमहरू थाहा पाउने छौँ । यी नियमहरूलाई सबै पूर्णाङ्कहरूसँग आबद्ध गर्नका लागि हामीहरू a, b, c पूर्णाङ्कहरू मानेर नियमहरूलाई निम्नअनुसार लेख्छौ ।

(क) **स्ववर्गीय वा बन्दी नियम (Closer Law)**: यदी a र b कुनै दुईओटा पूर्णाङ्कहरू भए तिनीहरूको योगफल $(a + b)$ पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छ । यसलाई स्ववर्गीयको नियम या बन्दी नियम भनिन्छ ।

(ख) **विनियम अथवा क्रमविनियम नियम (Commutative law)**: कुनै दईओटा पूर्णाङ्कहरू a र b भए $a + b = b + a$ हुन्छ । यसलाई क्रमविनियम नियम(Commulative law) भनिन्छ ।

(ग) **सङ्घीय अथवा सहचार्य नियम (Associated law)**:यदी a, b र c कुनै पूर्णाङ्क भए $(a + b) + c = a + (b + c)$ हुन्छ । यसलाई संघिय वा सहचार्य नियम (associated law) भनिन्छ ।

(घ) **एकाइ नियम (Identity law)**: कनै पूर्णाङ्क a को लागि $a + 0 = 0 + a = a$ हुन्छ । यसलाई एकाई वा तत्समक वा एकात्मक नियम पनि भनिन्छ ।

(ङ) **प्रतिलोम वा विपरित परिमाणको नियमः (Inverse law)**: कुनै पनि पूर्णाङ्क a को लागि ऋणात्मक पूर्णाङ्क अर्थात पूर्णाङ्क अर्थात $-a$ हुन्छ, जहाँ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ हुन्छ यि नियमहरूलाई कुनै पनि पूर्णाङ्कहरू लिएर पुष्टि गर्न सकिन्छ ।

12.3 पूर्णाङ्कहरूको गुणनको नियमहरू (Laws of Multiplication of integers)

(क) **स्ववर्गीय वा वन्दी नियम (Closer law)**:

कुनै पनि पूर्णाङ्कहरू a र b भए $a \times b$ भए $a \times b$ र $b \times a$ पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छ । यसलाई आवद्धताको नियम वा बन्दी नियम (Closer law) भनिन्छ ।

(ख) **क्रमविनियम वा विनियम नियम (Commulative law)**:

कुनै पनि पूर्णाङ्कहरू a र b भए $a \times b = b \times a$ पनि पूर्णाङ्क नै हुन्छ । यसलाई क्रमविनीयम वा विनियम नियम (Cummultative law) भनिन्छ ।

(ग) **सङ्घीय वा सहचार्य नियम (Associated Law)**: कुनै पनि पूर्णाङ्कहरू a, b र c भए $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ हुन्छ । यसलाई सङ्घीय वा सहचार्य नियम (Asociative law) भनिन्छ ।

(घ) **एकाइ वा तत्समक नियम (Indentity Law)**: कुनै पनि पूर्णाङ्क a को लागि $a \times 1 = 1 \times a = a$ हुन्छ । यसलाई एकाई वा तत्समक नियम (Identity Law) भनिन्छ ।

(ङ) **पदविच्छेदनात्मक वा वितरणात्मक नियम (Distributive law)**:

कुनै पनि पूर्णाङ्कहरू a, b र c को लागि $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ यसलाई वितरणात्मक नियम (Distributive law) भनिन्छ । यसलाई वितरण वा विपरित पनि भनिन्छ ।

12.4 पूर्णाङ्कहरूको सरलीकरण(Simplification of integers)

गुणन, भाग, जोड र घटाउ सम्मिलित चारओटा संक्रियाहरू भएको पूर्णाङ्कहरूको सरलीकरण हामीहरूले अघिल्ला कक्षाहरूमा सिकिसकेका छौँ । जसको लागि सर्वप्रथम भागको काम त्यसपछि क्रमशः गुणन, जोड र घटाउको काम गर्नुपर्दछ । यस अध्यायमा हामीहरू मेलबन्द सहित सानो कोष्ठ, मझौला कोष्ठ र ठुलो कोष्ठ सम्मिलित पूर्णाङ्कहरूको सरलीकरण सिक्ने छौँ । यसका लागि सर्वप्रथम सानो कोष्ठभित्र सरल गरेपछि क्रमशः मझौला कोष्ठ र अन्तमा ठुलो कोष्ठको काम गर्नु पर्दछ । सबै कोष्ठ भित्र पनि सबभन्दा पहिले मेलबन्द, त्यसपछि भाग, अनि गुणन, जोड र घटाउको काम गर्नुपर्दछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् : $85 \div 5 + 17 \times 9 - 6$

हल : $85 \div 5 + 17 \times 9 - 6$

$= 17 + 17 \times 5 + 9 - 6$ (पहिलो काम भाग गरियो)

$= 17 + 85 \times 9 - 6$ (दोस्रो काम गुणन गरियो)

$= 111 - 6$ (तेस्रो काम जोडीयो)

$= 105$ ans (चौथा काम घटाइयो)

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् : $150 + [20 + [\{12 - (-7 + 9) \times 18 \div 3\}]$

हल : $150 + [20 + [\{12 - (-7 + 9) \times 18 \div 3\}]$

$= 150 + [20 + [\{12 - 2 \times 18 \div 3\}]$

$= 150 + [20 + [\{12 - 2 \times 18 \div 3\}]$

$= 150 + [20 + [\{12 - 2 \times 6\}]$

$= 150 + [20 + [\{12 - 12\}]$

$= 150 + [20 + [\{12 - 12\}]$

$= 150 + [20 + 0]$

$= 150 + 20$

$= 170$ans.

अभ्यास

1. **सरल गर्नुहोस् ।**

(क) $18 + [15 - \{15 \times 5 - (10 + 2) + 24 \div 6\}]$

(ख) $18[\{12 - 2(1 - 3)\} \div 4]$

(ग) $27 + [36 \div 2\{16 \div (24 - 8)\}]$

(घ) $150 \div 2\{28 - (3 \times 18 \div 2)\} - 37$

(ङ) $[20 \div 2\{50 - 9(-2 + 7)\}]$

(च) $10[162 - \{56 + 8(14 \div 2)\}]$

(छ) $22 \times 16 \div [12 - \{2(7 - 6 \div 2)\}]$

(ज) $100 \times 100 \div 25 - [36 - \{8 + (32 \div 4)\}]$

(झ) $136 \div 2 + 3[5\{11 + 11(3 - 6 - 4)\}]$

(ञ) $150 \div 15 - [24 \div 8 + 6\{9 - (11 - 2 \div 3)\}]$

(ट) $90 \div 5[900 \div 150\{46 - 25 - 10 + 30\}]$

2. तल शाब्दिक समस्याहरू दिइएका छन् । तिनीहरूलाई पूर्णाङ्कहरू प्रयोग गरी गणितीय अभिव्यञ्जकको रूपमा लेखेर सरल गर्नुहोस् ।

(क) 14 र 12 को 4 गुणालाई 125 बाट घटाउँदा कति बाँकी रहन्छ ?

(ख) 12 को 12 गुणालाई 12 को एक तिहाईले भाग गर्दा कति हुन्छ ?

(ग) 20 को 5 गुणाबाट 5 घटाएर आएको सङ्ख्यालाई 57 को एक तिहाईले भाग गर्दा कति हुन्छ ?

(घ) 512 को एक चौथाईमा 512 जोडेर आएको सङ्ख्याबाट 512 को 16 भागको एक भाग घटाएर आएको सङ्ख्याबाट 96 घटाउँदा कति हुन्छ ?

उत्तरहरू

(क) −19 (ख) 14 (ग) 45 (घ) 38 (ङ) 2 (च) 500

(छ) 88 (ज) 88 (झ) 398 (ञ) −29 (ट) 3

2. (क) 21 (ख) 38 (ग) 5 (घ) 512

पाठ १३

सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत
(Scientific Notation of Numbers)

पुनरावलोकन (Review)

कुनै दुई पूर्णाङ्कहरू लिऔं । जस्तै 5 र -2 । तिनीहरू बिचका चार गणितीय क्रियाहरू गरौं । उत्तरलाई नजिकैको साथीको उत्तरसँग तुलना गरेर निश्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गरौँ ।

$5+(-2) = ?$ $5-(-2) = ?$ $5\times -2 = ?$ $5 \div (-2) = ?$

यसरी पूर्णाङ्कका नियमानुसार कुनै छुट्टै पूर्णाङ्कहरू गुणा गर्दा जोड्दा र घटाउदा फेरि पूर्णाङ्क नै हुन्छ तर एउटा पूर्णाङ्कलाई अर्को पूर्णाङ्कले भाग गर्दा पूर्णाङ्क नहुनपनि सक्छ । त्यसकारण अरु थप सङ्ख्याहरूको आवश्कता महशुस भयो र दशमलव सङ्ख्या वा भिन्नको आविस्कार गरियो । ती सङ्ख्याहरूलाई आनुपातिक सङ्ख्याहरू भनिन्छ । माथिको प्रश्नमा अनुपातिक सङ्ख्या हो ।

यदि कुनै पनि सङ्ख्यालाई $\frac{p}{q}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई अनुपाति सङ्ख्या (rational number) भनिन्छ -जहाँ p र q दुवै पूर्णाङ्कहरू हुन् र $q \neq 0$ छ) । यसलाई Q ले जनाइन्छ ।

आनुपातिक सङ्ख्याहरूका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरीसक्यौं । यस अर्न्तगत हामी अब सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतको बारेमा जानकारी लिन्छौं ।

सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific Notation of Numbers)

तलका प्रश्नहरूको तौल अनुमान गरि लेखौँ र साथीहरूसँग छलफल गरौं ।

एउटा कुखुरा अन्डाको तौल कति होला ?

एउटा साधारण खसीको तौल कति होला ?

एउटा हात्तीको तौल कति होला ?

पृथ्वीको तौल कति छ ?

एउटा हाइड्रोजन प्रोटोनको तौल कति हुन्छ ?

माथिको नापलाई कुन कुन तरिकाले लेख्न सकिन्छ लेख ।

फेरि तलका उदाहरणहरू हेरौँ ।

$7 = 7\times 1 = 6 \times 10^{\circ}$ हुन्छ ।

$17 = 1.7\times 10 = 1.7\times 10^1$

$170 = 17\times 10 = 1.7\times 100 = 1.6 \text{ x } 10^2$

$170000 = 1700 \times 100 = 170 \text{ x}1000 = 17\times 10000 = 1.7\times 100000 = 1.7\times 10^5$

त्यसैगरी, $5 = 5\times 1 = 5\times 10^0$

$0.5 = \frac{5}{10} = 5\times 10^{-1}$

$0.05 = \frac{5}{100} = \frac{5}{10^2} = 5\times 10^{-2}$

$0.00051 = \frac{51}{100000} = 5.1 \times 10^{-4}$

सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।

$\boxed{N \times 10^n}$

जहाँ, N भनेको दशमलब भन्दा बाँया 1 ओटा मात्र अङ्क भएको संख्या हो भने n भनेको 10 लाई कति पटक गुणा गरियो भन्ने सङ्ख्या हो ।

जस्तै, माथिको उदाहरणमापृथ्वीको तौल 5,972,000,000,000,000,000,000,000 कि. ग्रा छ ।

हाइड्रोज प्रोटोनको तौल 0.000,000,000,000,000,000,000,000,001, 073 kg हुन्छ ।

पृथ्वीको तौल र हाइड्रोजन प्रोटोनको तौललाई कसरी लेख्न सकिन्छ ?हेरौं ?

पृथ्वीको तौल = 5, 972, 000 ,000, 000, 000, 000, 000, 000 kg

$= 5.972 \times 1{,}000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000$

$= 5.972\times 10^{24}$ हुन्छ ।

त्यसैगरी, हाइड्रोजन प्रोटोनको तौल = 0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,673 kg

$= \frac{1673}{1000000000000000000000000000000}$

$= \frac{1.673\times 10^3}{10^{30}}$ [1.673×1000 = 1873]

$= 1.673 \times 10^{3-30} = 1.673 \times 10^{-27}$हुन्छ ।

यसरी कुनै पनि सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या र 10 को घाताङ्कको गुणनको रूपमा व्यक्त गरिन्छ भने उक्त तरिकालाई सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केत भनिन्छ । यदी सङ्ख्याहरू ज्यादै ठुलो वा ज्यादै सानो भएमा सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतका रूपमा लेख्नु प्रभावकारी हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएका सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) 3241.93 (ख) 0.000797

समाधान

(क) $3241.93 = 3241.93\times1 = 3241.93\times 10^0$

$3241.93\times10^0 = 324.193\times 10^1$ (दशमलबलाइ एक अङ्क अगाडि सार्दा)

$324.193\times 10^1 = 32.4193\times 10^2$ (दशमलबलाइ एक अङ्क अगाडि सार्दा)

$32.4193\times 10^2 = 3.24193 \times 10^3$ (दशमलबलाइ एक अङ्क अगाडि सार्दा)

$3241.93 = 3.24193 \times 10^3$ हुन्छ ।

(ख) $0.000797 = 0.000797\times1 = 0.00657\times10^0$

$0.000797\times10^0 = 00.00797\times10^{-1}$ (दशमलबलाई एक अङ्कपछाडि सार्दा)

$00.00797\times10^{-1} = 000.0797\times10^{-2}$ (दशमलबलाई एक अङ्कपछाडि सार्दा)

$000.0797\times10^{-2} = 0000.797\times10^{-3}$ (दशमलबलाई एक अङ्कपछाडि सार्दा)

$0000.797\times10^{-2} = 00007.97\times10^{-4}$ (दशमलबलाई एक अङ्कपछाडि सार्दा)

$\therefore 0.000797 = 7.97 \times 10^{-4}$

उदाहरण 2

तलका सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) 345 (ख) 590000 (ग) 0.00037

समाधान

(क) $345 = 3.45\times 100 = 3.45 \times10^2$

(ख) $590000 = 5.9 \times 100000 = 5.9\times 10^5$

(ग) $0.00037 = \frac{37}{1000}$ (भिन्नमा लैजादा)

$= \frac{3.7}{10000}$

$\therefore 0.000037 = 3.7 \times10^{-5}$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलब पद्धतिमा लेख्नुहोस् ।

(क) 6.3×10^3 (ख) 5.066×10^6

(ग) 6.9×10^{-5} (घ) 1.433×10^{-5}

समाधान

(क) $6.3 \times 10^3 = 6.3 \times 1000 = 6300.0 = 6300$

(ख) $5.066 \times 10^6 = 5.066 \times 1000000$

$= 5066000.000 = 50660000$

(ग) $6.9 \times 10^{-5} = \dfrac{6.9}{100000} = 0.000069$

(घ) $3.579 \times 10^{-4} = \dfrac{3.579}{10000} = 0.0003579$

अभ्यास

1. **तलका दशमलब सङ्ख्याहरूलाई वैज्ञानीक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।**

(क) 32 (ख) 4500 (ग) 0.000062

(घ) 101000 (ङ) 0.010 (च) 45.01

(छ) 11000000 (ज) 0.00000123 (झ) 1725.6

2. **तलका वैज्ञानीक सङ्केतहरूलाई दशमलब सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।**

(क) 1.10×10^3 (ख) 2.30×10^4 (ग) 5.76×10^0

(घ) 9.16×10^{-2} (ङ) 1.4×10^{-4} (च) 2.321×10^{-6}

(छ) 5.555×10^6 (ज) 8.0057×10^7 (झ) 1.73254×10^8

3. एउटा डोजरको तौल लगभग 11,9000 kg छ भने उक्त तौललाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख्नुहोस् ।

4. आर्गनडको परमाणुको अर्धव्यास 9.8×10^{-11} मिटर भए यसको यसलाई दशमलब पद्धतिमा लेख्नुहोस् ।

5. 299,800,000 मिटर प्रति सेकेन्डले प्रकाशको हावामा गति जनाउछ भने त्यसको वैज्ञानीक सङ्केत कति हुन्छ ?

6. एक महिनामा $6.4\text{x } 10^6$seconds हुन्छ भने यसको दशमलव मान कति हुन्छ ?

वैज्ञानिक सङ्केत भएका सङ्ख्याहरूको सरलीकरण

(Simplification of Numbers with Scientific Notations)

(क) वैज्ञानिक सङ्केत भएका सङ्ख्याहरूको जोड र घटाऊ (Addition and Subtraction)

तलका उदाहरण अध्ययन गरौँ ।

एउटा कारको तौल 1.4×10^3 kg छ र उक्त कार बोक्ने कन्टेनरको तौल 5.6×10^4 kg छ भने कारसहितको कन्टेनरको तौल कति होला ?

यहाँ, कारको तौल $= 1.4 \times 10^3$ kg

कन्टेनरको तौल $= 5.6 \times 10^4$ kg

जम्मा तौल = ?

यहाँ दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर छैन तसर्थ यिनीहरूलाई जोड्न मिल्दैन र दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर बनाउनुपर्ने हुन्छ ।

अथवा, यदि दुवै पदको घाताङ्क बराबर छैन भने सङ्ख्याका वैज्ञानिक सङ्केतहरू जोड्न र घटाउन मिल्दैन ।

तसर्थ, दुवैको घाताङ्क बराबर बनाऔं ।

कारको तौल $= 1.4 \times 10^3 \text{ kg} = 0.14 \times 10^4$ kg

कन्टेनरको तौल $= 5.6 \times 10^4$ kg

जम्मा तौल $= (0.14 \times 10^4 + 5.6 \times 10^4)$kg

$= (0.14 + 5.6) \times 10^4$ kg

$= 5.74 \times 10^4$ kg

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् ।

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$ (ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

समाधान

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

यहाँ दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर छैन तसर्थ यिनीहरूलाई जोड्न मिल्दैन र दुवै पदमा 10 को घाताङ्क बराबर बनाउनुपर्ने हुन्छ । अथवा, यदि दुबै पदको

घाताङ्क बराबर छैन भने सङ्ख्याका वैज्ञानिक सङ्केतहरू जोड्न र घटाउन मिल्दैन ।

यहाँ, $3.4 \times 10^2 = 0.34 \times 10^3$ हुन्छ ।

$3.4 \times 10^2 \quad = 4.57 \times 10^3$

$= 0.34 \times 10^3 + 4.57 \times 10^3$

$= (0.34 + 4.57) \times 10^3$

$= 4.91 \times 10^3$

(ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2 .4 \times 10^{-3}$

$= (4.54 - 2.4) \times 10^{-3}$ [दुवैमा समान घाताङ्क–3 भएकाले]

$= 2.14 \times 10^{-3}$

अभ्यास

1. **सरल गर : उत्तर वैज्ञानीक सङ्केतमा लेख्जुहोस् ।**

   (क) $(1.2 \text{ x } 10^5) + (5.35 \text{ x } 10^6)$ (ख) $6.91 \text{ x } 10^{-2} + 2.4 \text{ x } 10^{-3}$

   (ग) $9.70 \text{ x } 10^6 + 8.3 \text{ x } 10^5$ (घ) $3.67 \text{ x } 10^2 - 1.6 \text{ x } 10^1$

   (ङ) $8.41 \text{ x } 10^{-5} - 7.00 \text{ x } 10^{-6}$ (च) $1.33 \text{ x } 10^5 - 4.9 \text{ x } 10^4$

2. एउटा डोजरको तौल 5.4×10^3 kg छ उक्त डोजर बोक्ने कन्टेनरको तौल 8.6×10^3 kg छ भने डोजर सहितको कन्टेनरको तौल कति होला ?

3. एउटा कमिलाको 2.5×10^{-5} kg र अर्को कमिलाको तौल 3.2×10^{-5} kg रहेछ भने दुवै कमिलाको तौल कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. तीनओटा आकाशिय पिन्डहरूमध्ये पहिलो र तेस्रोको बिचको दुरी 5.3×10^4 km र दोस्रो र तेस्रोको बिचको दुरी 1.3×10^5 km भएमा पहिलो र दोस्रोको बिचको दुरी कति होला?

5. एउटा ट्याङ्कीमा $3.2 \text{ x } 10^4$लिटर पानी छ र दोस्रो ट्याङ्कीमा $1.3 \text{ x } 10^3$लिटर पानी छ भने दुवै ट्याङ्कीमा गरी जम्मा कति पानी होला ?

6. $2.7 \text{ x } 10^9$ km पार गर्नुपर्ने एउटा रकेटले $1.35 \text{ x } 10^9$ दुरी पार गरिसक्यो भने अब कति दुरी पार गर्न बाँकी रह्यो ?

(ख) वैज्ञानिक सङ्केत भएका सङ्ख्याहरूको गुणन र भाग

(Multiplication and Division ofNumberswith Scientific Notations)

बिजीय अभिव्यञ्जकको गुणा र भाग गरे झैँ सङ्ख्याहरूको वैज्ञानिक सङ्केतलाई पनि गुणन र भाग गर्न सकिन्छ । यसकालागि तलको तलका उदाहरण हेरौँ ।

उदाहरण 1

गुणन गर्नुहोस् ।

$(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

समाधान

यहाँ, $(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

$= 2.00 \times 4.12 \times 10^{3+4}$

$= 8.24 \times 10^7$

उदाहरण 2

भाग गर्नुहोस् ।

$(2.25 \text{ x } 10^{11}) \div (1.5 \text{ x } 10^8)$

समाधान

यहाँ, $(2.25 \text{ x } 10^{11}) \div (1.5 \text{ x } 10^8) = \dfrac{2.25 \text{ x } 10^{11}}{1.5 \text{ x } 10^8}$

$= \dfrac{2.25}{1.5} \times 10^{11-8}$

$= 1.5 \times 10^3$

अभ्यास

1. सरल गर र उत्तर वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(क) $(4.3 \times 10^8) \times (2.0 \times 10^6)$

(ख) $(6.0 \times 10^3) \times (1.\times 10^{-2})$

(ग) $(1.5 \times 10^{-2}) \times (8.0 \times 10^{-1})$

(घ) $(5.23 \times 10^{11}) \times (3.0 \times 10^{-10})$

(ङ) $(1.2 \times 10^8) \times (1.2 \times 10^{-5}$

(च $(1.4 \times 10^9) \times (0.5 \times 10^{-2})$

2. सरल गरी उत्तर वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(क) $\dfrac{4.2 \times 10^8}{1.4 \times 10^5}$

(ख) $\dfrac{8.4 \times 10^9}{4.2 \times 10^{-2}}$

(ग) $\dfrac{1.44 \times 10^{12}}{1.2 \times 10^2}$

(घ) $\dfrac{25.5 \times 10^{-6}}{1.5 \times 10^{-8}}$

(ङ) $\frac{1.2 \times 10^{8}}{1.2 \times 10^{-5}}$ (घ) $\frac{12.1 \times 10^{-10}}{5.5 \times 10^{-14}}$

4. 1.2×10^{-3} घन मिटर आयतन भएका 1.1×10^{2} ओटा कन्टेनरको जम्मा आयतन कति होला?

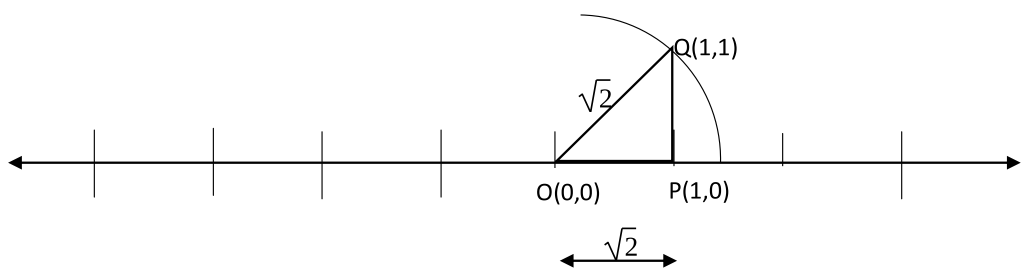
5. 9.6×10^{6} लिटर पेट्रोललाई 1.6×10^{3} लिटरका कतिओटा बराबर ट्याङ्कीमा राख्न सकिएला ?

पाठ १४ : अनानुपातिक सङ्ख्याहरू
(Irrational Numbers)

कुनैपनि वस्तुको विकासक्रमलाई हेर्दा आवश्यकताको आधारमा मात्र विकास भएको पाइन्छ । त्यस्तै गरि सङ्ख्याहरूको विकासक्रमको लामो समयसम्म कुनै दुई सङ्ख्याहरू बिचका चार क्रियाहरू गर्दा अनुपातिक सङ्ख्याहरू नै पर्याप्त थिए । जस्तै कुनै दुई सङ्ख्याहरू जोड्दा, घटाउँदा, गुणन गर्दा वा भाग गर्दा अनुपातिक सङ्ख्या नै हुन्छ । त्यसैक्रममा 2 को वर्गमूल पत्ता लगाउन, $x^2 - 2 = 0$ मा x को मान पत्ता लगाउन आनुपातिक सङ्ख्याहरूबाट सम्भव भएन र अन्त्य नहुने वा पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्याहरूको आवश्यकता देखियो । साथै एक एकाइ भुजा भएको वर्गको बिकर्णको लम्बाइ पत्ता लगाउनका लागी नयाँ सङ्ख्याहरूको आगमन आवश्यक देखियो र आगमन भयो । जसलाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । जस्तै, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ वृत्तको परिधि र ब्यासको अनुपात, आदि ।

एउटा अनानुपातिक सङ्ख्यालाई सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ कि सकिदैन होला?

तलको उदाहरणको अवलोकन गरौं ।



बिन्दु O लाईउद्गम विन्दु मानेर P (1,0) र Q (1,1) लिऔ । OQ जोडौं । त्यसपछि OQ को दुरी निर्देशाङ्क ज्यामीतीद्वारा पत्ता लगाऔं ।

यहाँ $OQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ हुन्छ ।

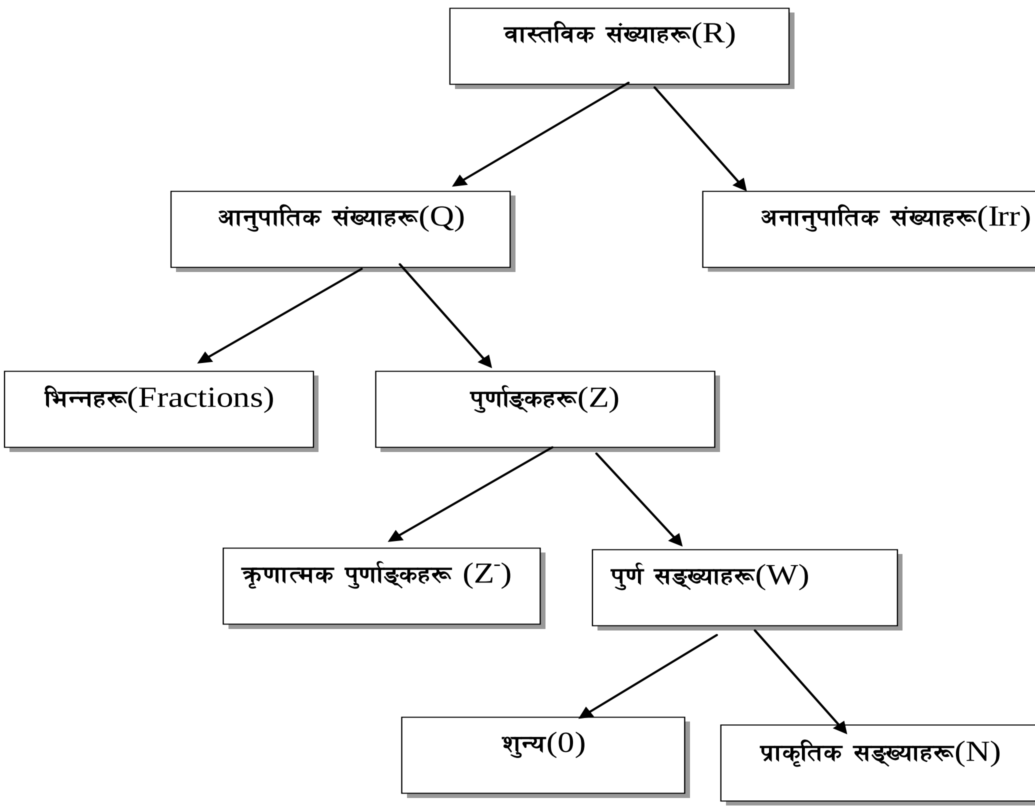
अब, OQ बराबरको अर्धव्यास लिई O लाई केन्द्र मानेर एउटा अर्धवृत्त खिचौं । र त्यस अर्धवृत्तको परिधिले सङ्ख्या रेखालाई काटेको ठाँउमा $\sqrt{2}$ पर्छ (कसरी ?) ।

14.1. वास्तविक सङ्ख्याहरूको परिचय (Introduction to Real Numbers)

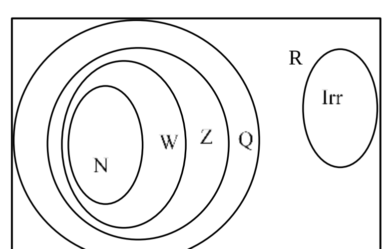
अनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Q) र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Irr) को संयोजन समूह लाई वास्तविक सङ्ख्याको समूह भनिन्छ। यसलाई R ले जनाइन्छ र $R = Q \cup Irr$ हुन्छ।

अर्थात, कुनै पनि सङ्ख्यालाई सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ भने उक्त सङ्ख्यालाई वास्तविक सङ्ख्या भनिन्छ।

वास्तविक सङ्ख्याहरूलाई निन्नानुसार प्रवाह चित्र (Flow Chart) बाट देखाउन सकिन्छ।



वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई भने चित्रमा निन्नानुसार देखाउन सकिन्छ:



जहाँ, N = प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह, W = पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह, Z =पूर्णाङ्कहरूबमे समूह, Q = आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह, Irr = अनानुपातिक

सङ्ख्याहरूको समूह र R = वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह हो ।

दशमलब र अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Decimal and Irrational numbers)

भिन्नलाई दशमलबमा रुपान्तरण गर्दा कस्ता कस्ता दशमलब सङ्ख्याहरू पाइन्छ तलका उदाहरणबाट हेरौँ ।

$\frac{6}{2} = 3.0$, $\frac{5}{2} = 2.5$, $\frac{37}{16} = 2.3125$, $\frac{1}{3} = 0.33333333....$ $\frac{22}{7} = 3.142857...$

दिइएका दशमलब सङ्ख्याहरूमा कुन कुन अन्त्य हुने, कुन दोहोरिने वा पुनरावृत्ति हुने र कुन अन्त्य नहुने र पुनरावृत्ति नहुने दशमलब सङ्ख्या हुन् साथीहरूबिच छलफल गरी लेखौँ ।

माथिको उदाहरणमा पहिलो तीनओटा दशमलब सङ्ख्याहरूअन्त्य हुने,दशमलब सङ्ख्याहरू हुन् भने चोथो $\frac{1}{3}$ दोहोरिने दशमलब सङ्ख्या हो । र पाँचौ सङ्ख्या$\frac{22}{7}$ अन्त्य नहुने र पुनरावृत्ति नहुने दशमलब सङ्ख्या हो ।

तसर्थ, $\frac{6}{2}, \frac{5}{2}, \frac{37}{16}$ र $\frac{1}{3}$ आनुपातिकसङ्ख्याहरू हुन् भने $\frac{22}{7}$ अनानुपातिकसङ्ख्या हो ।

दोहोरीने वा पुनरावृत्ती हुने दशमलब सङ्ख्यालाई उक्त सङ्ख्या माथि बार ($\overline{\ \ }$) लगाएर लेखिन्छ ।

जस्तै, $\frac{1}{3} = 0.33333333... = 0.\overline{3}$, $0.414141 = 0.\overline{41}$लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

तल दिइएका सङ्ख्याहरू कुन अनुपातिक हुन् र कुन अनानुपातिक हुन् लेख ।

(क) 0.35 (ख) $\sqrt{2}$ (ग) $\sqrt{7}$ (घ) $\frac{3}{8}$ (ङ) 1.414213 ... (च) 0.414141…

उत्तर

(क) 0.35 अनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएकोमा दशमलब)

(ख) $\sqrt{2}$ अनानुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)

(ग) $\sqrt{7}$ अनानुपातिक सङ्ख्या (निश्चित मान नभएको वर्गमूल)

(घ) $\frac{3}{8}$ अनुपातिक सङ्ख्या (अन्त्य भएको दशमलब)

(ङ) 1.414213 ...अनानुपातिक सङ्ख्या (नदोहोरिएको र अन्त्य नभएको दशमलव)

(च) 0.414141.. अनुपातिक सङ्ख्या (दोहोरिएको दशमलव)

उदाहरण 2

तलका दशमलबहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $0.\overline{3}$ (ख) $0.\overline{41}$

समाधान

(क)

मानौँ $x = 0.33....$ (i)

(i) लाई 10 ले गुणा गर्दा

$10x = 3.33......$(ii)

अब (ii) बाट (i) घटाउदा

$10x – x = 3.33 – 0.33$

अथवा $9x = 3.0$

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(ख)

मानौँ, $x = 0.4141$

$x = 0.4141$ — (i)

(i) लाई 100 ले गुणा गर्दा

$100x = 41.4141$-------------------(ii)

अब (ii) बाट (i) घटाउँदा

$100x – x = 41.4141 - 0.4141$

$99x = 41$

Or, $x = \frac{41}{99}$

अभ्यास

1. तलका दशमलब सङ्ख्याहरू कुन अनानुपातिक हुन् र कुन अनुपातिक हुन् र किन ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) 1.732... (ख) 3.57 (ग) 3.141312

(घ) 4.32131...... (ङ) π (च) 4.95

(छ) $\sqrt{2}$ (ज) $\sqrt{6}$

2. तलका दशमलबहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ॥

(क) $0.\overline{27}$ (ख) $3.\overline{3}$ (ग) $2.\overline{23}$ (घ) $2.\overline{9}$

(ङ) $6.\overline{3}$ (च) $8.\overline{3}$ (छ) $4.\overline{31}$ (ज) $0.\overline{6}$

3. भेनचित्रको प्रयोग गरीवास्तविक सङ्ख्या, पूर्णाङ्क तथा अनानुपातिक सङ्ख्याको सम्बन्ध देखाउनुहोस् ।

4. Q, R, Irr को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

सर्डको परिचय (Introduction to Surd)

1 देखी 20 सम्मका सङ्ख्याहरू लिनुहोस् । कुन कुन सङ्ख्याको वर्गमूल पत्ता लगाउन सकिन्छ र कुन सङ्ख्याका पत्ता लगाउन सकिदैन?खोजौं । कुन सङ्ख्याको वर्गमूल पूर्ण सङ्ख्या हुन्छ र कुन सङ्ख्याको वर्गमूल पूर्ण सङ्ख्या हुदैन ? पत्ता लगाऔं र छलफल गरौं ।

कुनै पनि सङ्ख्याको पूर्ण वर्ग पत्ता लगाउन सकिँदैन र उक्त सङ्ख्याको वर्गमूलको मान पूर्णाङ्कमा हुदैन र मूल चिह्न सहित लेखिन्छ भने त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई सर्ड (Surd) भनिन्छ । जस्तै, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ आदि ।

उदाहरण 1.

तलका कुन कुन सङ्ख्याहरू सर्ड(surd) हुन् ? लेख्नुहोस् ।

(क) $\sqrt{4}$ (ख) $\sqrt{3}$ (ग) $\sqrt{25}$ (घ) $\sqrt{13}$ (ङ) $\sqrt{12}$

समाधान : यहाँ,

(क) $\sqrt{4}$ यो सर्ड होइन ।

(ख) $\sqrt{3}$ यो सर्ड हो ।

(ग) $\sqrt{25}$ यो सर्ड होइन ।

(घ) $\sqrt{13}$ यो सर्ड हो ।

(ङ) $\sqrt{12}$ यो सर्ड हो ।

नोट : सबै सर्डहरू अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

अनुपातीकरण (Rationalization)

$\sqrt{5}$ कस्तो सङ्ख्या हो ? यसको मानमा कुनै फरक नपर्ने गरी हरको मूल चिह्न $\sqrt{\ }$ कसरी हटाउन सकिएला ? विचार गरौं र लेखौं ।

कुनै पनि मूल चिह्न समावेश भएको सङ्ख्यालाई त्यसैको पुनः गुण गर्दा मूल चिह्न हट्छ । जस्तै, $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ हुन्छ ।

कुनै पनि सर्डको हरमा भएको मूल चिह्नलाई उक्त सर्डको मानमा घटबढ नहुने गरी हटाउने प्रक्रियालाईअनुपातीकरण (Rationalization) भनिन्छ । हरमा रहेको मूल चिह्न बराबरको सङ्ख्याले अंश र हर दुवैलाई गुणा गरेर हरबाट मूल चिह्न हटाइन्छ ।

उदाहरण 2

तलका सङ्ख्याहरूको अनुपातिकरण गर्नुहोस् ।

(क) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (ख) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

समाधान

यहाँ, (क) (यहाँ हरमा $\sqrt{5}$ छ र $\sqrt{5}$ लाई हटाउन हर र अंश दुवैमा $\sqrt{5}$ ले गुणा गर्ने)

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\times\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(ख) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

यहाँ, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (हर अंश दुवैमा $\sqrt{3}$ ले गुणा गर्ने)

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{2\times3}}{3}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}$

मूल चिह्न ($\sqrt{\ }$) समावेश भएका सरल (जोड, घटाउ र गुणन)

एउटै सङ्ख्यामा मूल चिह्न भएमा अभिव्यञ्जकहरूलाई विजिय अभिव्यञ्जकहरू जस्तै जोड र घटाउ गर्न सकिन्छ । जस्तै,

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस् :

(क) $4\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (ख) $7\sqrt{2}+3\sqrt{8}-4\sqrt{18}$

समाधान : यहाँ,

$4\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$= (4+1)\sqrt{3}+(3+1)\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{3}+4\sqrt{2}$

(ख) $7\sqrt{2}+3\sqrt{8}-4\sqrt{18}$

$= 7\sqrt{2}+3\times2\sqrt{2}-4\times3\sqrt{2}$

$= 7\sqrt{2}+6\sqrt{2}-12\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

उदाहरण 4

गुणन गर्नुहोस्:

(क) $(3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}+2)$

समाधान

यहाँ, $(3\sqrt{5}-2)(3\sqrt{5}+2)$

$= (3\sqrt{5})^2-2^2$

$= 9\times5-4 = 41$

अभ्यास

1. तलका सङ्ख्याहरूको हरको अनुपातिकरण गर्नुहोस् ।

(क) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$ (ख) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ (ग) $\frac{12}{\sqrt{6}}$ (घ) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(ङ) $\frac{21}{\sqrt{7}}$ (च) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ (छ) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (ज) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. सरल गर्नुहोस्

(क) $2\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$ (ख) $4\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

(ग) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{50}$ (घ) $7\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - 4\sqrt{18}$

(ङ) $2\sqrt{20} + 3\sqrt{45}$ (च) $\sqrt{20} + \sqrt{48} - 3\sqrt{3}$

(छ) $\sqrt{75} - \sqrt{27}$ (ज) $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{50}$

3. गुणनगर्नुहोस् ।

(क) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{2})(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})$ (ख) $(5\sqrt{2} - \sqrt{2})(5\sqrt{2} + \sqrt{2})$

(ग) $(2\sqrt{5} - 1)((2\sqrt{5} + 1)$ (घ) $\sqrt{2}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right)$

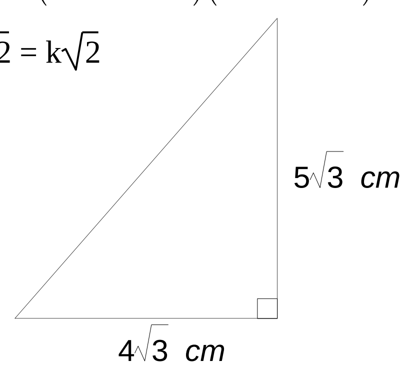
(ङ) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})(\sqrt{75} + \sqrt{28})$ (च) $\left(\sqrt{75} + \sqrt{27}\right)\left(\sqrt{75} - \sqrt{27}\right)$

4. k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।$2\sqrt{72} - \sqrt{32} = k\sqrt{2}$

5. दिइएको त्रिभुजको

(क) क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) कर्णको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



पाठ १९ अनुपात र समानुपात (Ratio and Proportion)

तलका वाक्यहरूलाई पढेर र मिल्ने वाक्यहरूलाई एक ठाँऊमा लेख्नुहोस् ।

(क) सुजनसँग रु. 550 छ ।

(ख) काठमाडौँदेखि पोखराको भाडा रु. 600 लाग्छ ।

(ग) पार्वतीको तौल 60 kg छ ।

(घ) हर्केले रु.500 तिर्नुपर्ने छ ।

(ङ) काठमाडौँ देखि धनगढीको भाडा रु. 1800 लाग्छ ।

(च) विकासको तौल 40 kg छ ।

माथिका वाक्यहरूमा (ख) र (ङ) हेर दुवै भाडा दर हुन् । जसमा काठमाडौँबाट पोखरा र धनगढीको भाडादर दिइएको छ । पोखरा र धरानको भाडादर क्रमशः रु. 600 र रु. 1800 छ ।

पोखरा र धरानको भाडा अनुपात $\frac{600}{1800} = \frac{1}{3}$ छ । यसलाई 1:3 लेखिन्छ ।

त्यस्तै अन्य एउटै गुणभएका परिमाणहरू के के हुन् पत्ता लगाई अनुपात निकाल्नुहोस् ।

> एउटै गुण भएका फरक फरक दुईओटा परिमाणमा एउटालाई अर्कोको भागफलको रूपमा व्यक्त गर्ने तरिकालाई अनुपात (Ratio) भनिन्छ । जस्तै प्रमिलाको उचाइ 5 फिट छ र रमिलाको उचाइ 4 फिट छ भने उनीहरूको उचाइको अनुपात 5:4 भयो । अनुपातलाई न्यूनतम (लघुत्तम) भिन्नमा लेखिन्छ ।

पार्वती र सोनामको उचाइको अनुपात 4:5 छ पार्वतीको उचाइ 40 इन्च भए सोनामको उचाइ कति होला ?

पेम्बाको उचाइ : सोनामको उचाइ = 4:5

अथवा, $\frac{40}{x} = \frac{4}{5}$

अथवा, $4 \times x = 40 \times 5$

अथवा, $x = \frac{40 \times 5}{4} = 50$ inch.

सोनामको उचाइ 50 inch इन्च ।

यसरी कुनै अनुपात र एउटा परिमाण थाहा छ भने अर्को परिमाण पनि पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरण 1

तलका परिमाणहरूलाई अनुपातमा रूपान्तरण गर ।

(क) 200 cm र 200 m

(ख) 4 kg र 5000 gm

समाधान

(क) यहाँ, 200 cm र 200 m दुबैमा एउटै एकाई छैन, तसर्थ 200cm =2 m हुन्छ ।

अतः अनुपात 200 cm : 200 m = 2 m: 200m = 1:100

(ख) 4 kg र 5000 gm

यसमा पहिलो परिमाण = 4 kg

दोस्रो परिमाण= 5000 gm = 5kg

अतः अनुपात= 4:5

उदाहरण 2

रुद्र र अजीतले एउटा वस्तुमा 8:13 को अनुपातमा लगानी गरे । यदी रुद्रले रु. 4800 लगानी गरेभने भने अजीतले कति लगानी गरे होलान्?

समाधान

यहाँ,

रुद्र र अजीतको लगानीको अनुपात 8:13

रुद्को लगानी = रु.4800

अजीतको लगानी = ?

अब, 8:13 = 4800 : x

अथवा, $\frac{8}{13} = \frac{4800}{x}$

अथवा, X = 600 × 13 = रु. 9100

अजीतको लगानी रु. रु. 9100

उदाहरण 3

रितु, चिरन र बिनय ले एउटा व्यवसायमा 2:3:4को अनुपातमा लगानी गरे । यदि उनीहरूले रु. 45,00,000 जम्मा गरेछन् भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ लगानी गरेका रहेछन् ?

समाधान

यहाँ जम्मा रकम =रु.45,00,000

र अनुपातलाई x मान्दा प्रत्येकको लगानी $2x$, $3x$ र $4x$ हुन्छ ।

अब, प्रश्नअनुसार $2x, + 3x + 4x$ = रु.45,000,000

अथवा, $9x = 45,00,000$

अथवा, x = = रु.5,00,000

त्यसकारण, रितुको लगानी	$= 2x = 2 \times$ रु. 5,00,000 = रु.10,00,000
चिरनको लगानी	$= 3x = 3\times$ रु. 5,00,000 = रु. 15,00,000
विनयको लगानी	$= 4x = 4 \times$ रु. 5,00,000 = रु. 20,00,000

अभ्यास

1. तलका प्रत्येक अवस्थामा पहिलो र दोस्रो परिमाणको अनुपातमा लेखि न्यूनतम भिन्नका रूपमा लेख्नुहोस् ।

   (क) 5 hrs र 1 hrs
   (ख) 3 ft र 9 ft
   (ग) 750 gram र 1.5 kg
   (घ) 20 cm र 25 cm
   (ङ) 375 ml र 1l
   (च) Rs. 75 र 750 paisa

2. (क) एउटा विद्यालयको को शिक्षक र विद्यार्थी अनुपात 1:28 छ । यदि उक्त विद्यालयमा जम्मा 12 जना शिक्षक भए विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

   (ख) 1:5000 को स्केलमा खिचिएको नक्सामा दुई ठाऊँ बिचको दुरी 4 cm छ भने उक्त स्थानहरू बिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

   (ग) एउटा परिवारमा यातायात र सञ्चारको खर्चको अनुपात 4:5 छ । यदि यातायातमा मासिक रु. 6750 खर्च हुन्छ भने सञ्चारमा कति खर्च चाहिएला ?

3. (क) दुई सङ्ख्याहरू 3:4 को अनुपातमा रहेका छन् । यदि दुवै सङ्ख्यामा 3 जोड्दा 2:3 को अनुपातमा हुन्छन भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) एनजिला र एन्जलले रु. 2400 लाई 3 :5 को अनुपातमा बाढ्दा दुवैले कति कति रुपैया पाउलान् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) क्रमश : 5, 7 र 8 वर्षका बालिकाहरूलाई रु. 500 उनीहरूको उमेरको अनुपातमा बाँड्दा प्रत्येकले कति कति रुपैया उलान् ?

(ख) कृष्ण, भरत र रामहरिले 5:6:7 को अनुपातमा लगानी गरी एउटा कृषि फर्म सञ्चालन गरे । एक वर्ष पछि उनीहरूले रु. 72,00,000 आम्दानी गरे भने प्रत्येकले कति कति रकम आम्दानी गरे होलान् ?

(ग) फूर्वाले भन्दा सोनामले तेब्बर र सोनामले भन्दा डोल्माले दोब्बर रकम जम्मा गर्दा रु. 84,52,100 जम्मा भयो भने प्रत्येकले कति कति रकम जम्मा गरे होलान् ?

समानुपात (Proportion)

आस्था अनौपचारकि विद्यालयको कक्षा छमा 12 जना पुरुष र 15 जना महिला अध्ययनरत छन् । त्यस्तै कक्षा सातमा 8 जना पुरुष र 10 जना महिला अध्ययनरत् भने दुईओटा कक्षामा कति कति अनुपातमा पुरुष र महिला अध्ययनरत रहेछन् ? पत्ता लगाऔं ।

दुवै कक्षामा पुरुष र महिला बिचको अनुपात कस्तो छ, बराबर छ की छैन हेरौँ ।

कुनै दुई अनुपातलाई न्यनतम भिन्नमा लेख्दा अनुपात बराबर हुन्छ भने त्यस्ता अनुपातहरूलाई समानुपात भनिन्छ । यदि a:b = c:d छ भने a:b र c:d समानुपात हुन्छन् र a, b, c र d समानुपातिक हुन्छन् ।

माथिको उदाहरणमा $\frac{12}{15}$ र $\frac{8}{10}$ समानुपातिक छन् ।

यसलाई 12 :15 = 8 :10लेखिन्छ ।

जसमा बाहिरका दुई पदलाई Extremes भनिन्छ । जस्तै : 12 र 10

भित्रका दुई पदलाई Means भनिन्छ । जस्तै : 15 र 8

Extremes र means को छुट्टाछुट्टै गुणनफल निकालेर हेरौं । परिमाणका बरेमा छलफल गरौं ।

अर्थात, $\frac{a}{d} / \frac{b}{c}$समानुपातमा छन् यो $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$हुन्छ ।

अथवा, $a \times d = b \times c$ हुन्छ ।

यसलाई प्रयोग गरेर समानुपातमा रहेका तीनओटा पद दिएमा बाँकी पद पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

उदाहरण 1

समानुपातमा रहेका पदहरूमध्ये दोस्रो, तेस्रो र चौथो पद क्रमशः **8, 12** र **16** भए पहिलो पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद x मानौं ।

x, 8, 12 र 16 समानुपातकि छन् तसर्थ, $\frac{x}{8} = \frac{12}{16}$ हुन्छ ।

अथवा, $16x = 96$

अथवा, $x = \frac{96}{16} = 6$

तसर्थ पहिलो पद = 6

उदाहरण 2

5 घण्टामा **190 km** दुरी पार गर्ने एउटा मालबाहक सवारी लाई सोहि गतीमा **950 km** दुरी पार गर्न कति समय लाग्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

950 km दुरी पार गर्न लाग्ले समय xघण्टा मानौं ।

अब $\frac{5}{190} = \frac{x}{950}$ हुन्छ ।

अथवा, $190x = 5 \times 950$

अथवा, $x = \frac{5 \times 950}{190} = 25$ हुन्छ ।

$\therefore$ 950 km दुरी पार गर्न 25 घन्टा लाग्छ ।

अभ्यास

1. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा छन् वा छैनन् जाँचेर लेख्नुहोस् ।

(क) 5, 8, 10, 16
(ख) 6, 8, 14, 16
(ग) 5m, 3m, 25m, 15m
(घ) 3ft, 8ft, 12ft, 32ft

2. x को मान पत्तालगाउनुहोस् ।

(क) $x:5 = 10:25$
(ख) $3:7 = 21:x$

(ग) 10:x = 2:11 (घ) 25:15 = x:3

3. तलका समानुपातमा भएका सङ्ख्याहरूमा थाहा नभएका पद पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) x, 3, 6, 9 (ख) 3, a, 9, 21

(ग) 48, 15, 32, y (घ) 7, 9, z, 18

4. (क) हरिसिद्धी प्रा. वि. मा सिसाकलम र कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थीको अनुपात 5:6 छ । यदि सिसाकलम प्रयोग गर्ने 40 जना विद्यार्थी भए कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 7 मिनेटमा 21 kg मकै पिस्ने घट्टलाई 15kg मकै पिस्न कति समय लाग्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) कोपीलाको गणित र विज्ञानको प्राप्ताङ्कको अनुपात 8:10 छ । यदि उसको विज्ञानको प्राप्ताङ्क 80 भए गणितको प्राप्ताङ्क कति होला ?

(घ) रु.180 मा 12ओटाा कापी पाइन्छ भने रु. 225 मा कतिओटा कापी पाइन्छ ?

5. (क) 3:5 को अनुपातलाई 5:6 बनाउन पर्दा दुवै अङ्कमा कति कति जोड्नुपर्ला ?

(ख) राजकुमारीले नैतिक शिक्षा र व्यवसायिक शिक्षा; अङ्ग्रेजी र विज्ञानमा समानुपातीक अङ्क प्राप्त गरिन् । यदि ती विषयहरूमा क्रमशः 25, 30, 75 र x प्राप्त गरिन् भने x को मान कति होला ?

(ग) चन्द्रमा र पृथ्वीको गुरुत्वाकर्षणको अनुपात 1:6 छ । पृथ्वीमा 90 N तौल भएका वस्तुको तौल चन्द्रमामा कति होला ?पत्तालगाउन’होस् ।

(घ) चिनी र दुधको अनुपात 4:9 एउटा मिठाईमा दुध 360 gm भएमा चिनीको भाग कति होला ?

6. परीक्षामा सम्मिलित 153 जना विद्यार्थीहरू गणित, विज्ञान, अङ्ग्रेजी र सामाजिक मध्ये क्रमशः तिनओटा बिषयमा A ग्रेड हासिल गर्नेको अनुपात 2:4:5 छ र 21 जनाले सामाजीकमा A हासिल गरे भने गणित, विज्ञान र अग्रेजीमा कति कति जनाले A ग्रेड हरिल गरे होलान् ?पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्रतिशत (Percentage)

तलका भिन्नलाई अवलोकन गरौं ।

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}$ आदि

माथीका भिन्नहरूमा क्रमशः हेर्दा ½ लाई दुई भागमा एक भाग भन्ने जनाउदछ र त्यस्तै हर र अंशमा 50 ले गुणा गर्दा $\frac{1\times50}{2\times50} = \frac{50}{100}$ हुन्छ ।तसर्थ यसलाई 100 भागमा 50 भाग भनिन्छ । सयकडा 50 हो अर्थात 50%हो ।

त्यसैगरि, $\frac{1}{5} = \frac{20}{100}$ यसलाइ 100 भागमा 50 भाग भनिन्छ र यो 20% हो ।

त्यस्तै भनेको 100 भागमा 60 भाग रहेछ यसलाई कति प्रतिशत भनिन्छ ?

0.45 भनेको 45%प्रतिशत भयो भने 0.73 कति प्रतिशत होला?

यहाँ, $\frac{50}{100} \times 100\ \% = 50\ \%$ हुन्छ ।

नोट : भिन्न वा दशमलबलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर्न 100 ले गुणा गरी % चिह्न राख्ने ।

तलका प्रश्नहरूबारे साथीहरूको समूह निर्माण गरि छलफल गरौं ।

समूह (क)	समूह (ख)
100 को 20 % =?	50 को 40%=?
100 को 40%=?	125 को 20% =?
320 को 20% =?	250 को 10% =?
500 को 20% =?	500 को 5% =?
1000 को 20 =?	1000 को 2.5% =?

माथिको तालिकाबाट के थाहा हुन्छ भने प्रतिशत निरपेक्ष मान हैन ।यो परिमाणअनुसार फरक फरक हुन्छ ।

दिइएको प्रतिशत बराबर सङ्ख्या पत्ता लगाउने (to find the number of given percentage)

उदाहरण 1

रु. 56,000 मासिक आम्दानी भएको बासुदेबले 20%खानामा, 30%शिक्षामा, 20%अन्यमा खर्च गर्ने भए भने जम्मा कति रकम बचत र्ग होला ?

समाधान

यहाँ, जम्मा मासिक आम्दानी = रु.56,000

खानामा खर्च = 56,000 को20% = $\frac{56000 \times 20}{100}$ = रु.11,200

शिक्षामा खर्च = 56,000 को 30% = $\frac{56000 \times 30}{100}$ = रु. 16800

अन्य खर्च = 56000 को 20% = $\frac{56000 \times 20}{100}$

= रु. 11,200

जम्मा खर्च = 11200 + 16800 + 11200 = रु. 39,200 जना

बचत रकमा = रु. 56000 – रु. 39200 = रु. 16,800

अर्को तरिका, जम्मा खर्च= 20% + 30% + 20% = 70%

बचत= 100% - 70% = 30%

अब, बचत रकम = 56000 को 30% = $\frac{56000 \times 30}{100}$ = रु. 16800

उदाहरण 2

दिइएको तालिकामा एउटा पसलमा विभिन्न सामाग्रीको मुल्यसूची दिइएको छ । 2 लिटर तेल, 2 kg दाल, 25 kg चामल किन्नका लागि जम्मा कति रुपैयाँ आवश्यक पर्छ होला ?

सामान	मूल्य
तेल (1 लि)	रु. 150
घ्यु (1 kg)	रु. 475
दाल (1 kg)	रु. 120
चामल (25kg)	रु. 1925
छुट प्रतिशत =	10%

समाधान

यहाँ, जम्मा किन्नपर्ने सामान को मूल्य

तेल (2लि) =रु. 300

दाल (2 kg) =रु. 240

चामल (25kg) =रु. 1925

जम्मा मूल्य =रु. 2465

छुट प्रतिशत = 10%

अब, छुट रकम = 2465 को 10%

$$= \frac{2465 \times 10}{100}$$

= रु. 246.50

जम्मा आवश्यक रुपैयाँ= रु. 2465- छुट

= रु. 2465- रु. 246.50

= रु. 2218.50

(नोटः यसलाई छुट्टाछुट्टै सामानको छुट घटाएर पनि गर्न सकिन्छ ।)

दिइएको सङ्ख्याको प्रतिशत निकाल्ने (To find the Percentage of Given Number)

उदाहरण 3

गत वर्षको एक जना सिकर्मीको ज्याला रु.**1200** थियो । अहिले उक्त ज्याला बढेर रु. **1500** भयो भने एकजना सिकर्मीको ज्याला कति कति प्रतिशतले बढ्यो ?

समाधान

यहाँ, गत वर्षको सिकर्मीको ज्याला = रु. 1200

अहिले सिकर्मीको ज्याला = रु. 1500

बढेको ज्याला = रु 1500 - रु. 1200 = रु. 300

बढेको प्रतिशत = ?

अब, बढेको प्रतिशत = x मान्दा

रु.1200 कोx% = रु.300

अथवा, $\frac{1200 \times x}{100} = 300$

अथवा, 1200 x = 30,000

$$\therefore x = \frac{30000}{1200} = 25$$

तसर्थ उक्त सिकर्मीको ज्याला 25%ले बृद्धि भयो ।

(नोटः प्रतिशत निकाल्दा पुरानो परिमाणको सापेक्षमा निकालिन्छ ।

जस्तै : सिकर्मीको ज्याला रु. 1200 को निकालीयो रु. 1500 को होइन ।)

अभ्यास

1. तलका भिन्न वा दशमलबलाई प्रतिशतमा रूपान्तरण गर :

(क) $\frac{2}{5}$ (ख) 0.34 (ग) $\frac{3}{10}$ (घ) 0.59 (ङ) $\frac{17}{40}$

2. दिइएका प्रतिशतलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर :

(क)20% (ख) 70% (ग) 45.5% (घ) 91% (ङ) 53%

3. मान पत्तालगाउन'होस् :

(क) 350 को 10% (ख)190 को 90% (ग) 380 को 12.5%

(घ) 720 को 20%

4. कति परिमाणको

(क) 15%ले रु 225 फिट हुन्छ ? (ख) 21%ले 42 लिटर हुन्छ ?

(ग) 25%ले 12.5 दिन हुन्छ ? (घ) 12%ले 72केजी हुन्छ ?

5. बजारमा एउटा च्याङ्ग्राको मूल्य रु. 25,000 थियो जसमा 12%छुट थियो भने कति रूपिया छुट रहेछ ? छुट पछि उक्त च्याङ्ग्रो किन्न कति तिर्नु पर्ला ?

6. मासिक रु. 18,500 आम्दानी भएको एकजना कर्मचारीको 13% रकम बच्चाको शिक्षामा खर्च हुन्छ भने कति रकम तिर्नुपर्ला ?

7. एउटा कक्षामा 75 विद्यार्थीहरूका 8% अनुपस्थित भए भने कति जना उपस्थित भए ?

8. रु.800 पर्ने एउटा पस्मिनाको रु.750 तिर्नुपर्छ भने कति प्रतिशत छुट भयो?

9. बार्षिक बृद्धि दर 1.5%भएको एउटा सहरको जनसङ्ख्या 2,666,200 छ र भने एक वर्षपछि उक्त जनसङ्ख्या कतिले बढ्ला ?पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. रु. 17,000 आम्दानीको 10%आयकर तिर्नुपर्दा करपछिको कति रकम बाँकी रहन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. तलको तालिकामा विभिन्न वस्तुहरूको मूल्य र छुटपछिको मूल्य दिइएको छ ।

वस्तु	मूल्य (रु.)	छुटपछिको मूल्य (रु.)
झोला	350	315
सर्ट	500	420
जुत्ता	950	900

पाइन्ट	800	720
ज्याकेट	1250	1100
किताब	600	500

माथीको तालिका प्रयोग गरी तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्तालगाउनुहोस् ।

(क) झोला (ख) सर्ट (ग) जुत्ता

(घ) पाइन्ट (ङ) ज्याकेट (च) किताब

12. बिमलाले रु. 4500 मूल्य भएको मोबाइल सेटलाई रु. 4200 मा किनिन् । सम्पन्नले उक्त मोबाइल सेटलाई 7% छुटमा किनिन् भने कसलाइ सस्तो पर्यो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

पाठ १६ नाफा र नोक्सान (Profit and Loss)

तलका प्रश्नहरूमा छलफल गरौ :

(क) एउटा साडिलाई रु. 2450 मा किनेर रु. 2700 मा बेच्दा कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

(ख) एउटा समानलाई रु. 50 मा किनेर रु. 40 मा बेच्नु पर्यो भने कति नाफा वा घाटा हुन्छ ?

प्रश्न नं. (क) मा नाफा भयो किनकी यसमा विक्रय मूल्य धेरै छ ।

त्यसकारण नाफा भनेको बिक्रय मूल्य र क्रय मूल्यको फरक हो ।

अर्थात नाफा (Profit) = विक्रय मूल्य (Selling price) - क्रय मूल्य (Cost price)

पहिलोमा

क्रय मूल्य = रु.2450, बिक्रय मूल्य = रु.2700

नाफा =रु.2700 – रु.2450 = रु. 250

$$\text{नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$= \frac{250}{2450} \times 100\%$$

$$= 10.2\%$$

$\therefore$ नाफा10.2% प्रतिशत भयो ।

दोस्रोमा

नोक्सान = रु. 10

क्रय मूल्य = रु. 50

अब, $\therefore$ नोक्सान प्रतिशत $= \dfrac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

नोक्सान प्रतिशत$=\dfrac{10}{50} \times 100\%$

= 20% भयो ।

उदाहरण 1

नाफा वा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

क) क्रय मूल्य = रु. 3300 बिक्रय मूल्य = रु.3960

ख) क्रय मूल्य = रु. 15,000 बिक्रय मूल्य = रु.14,100

समाधान

क) यहाँ,

क्रय मूल्य = रु. 3300

बिक्रय मूल्य = रु.3960

क्रय मूल्य भन्दा बिक्रय मूल्य धेरै भयो । तसर्थ नाफा भयो

नाफा = बिक्रय मूल्य – क्रय मूल्य = 3960 - 3300 = 660

$$\text{अतः नाफा प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$= \frac{660}{3300} \times 100\% = 20\%$$

अतः नाफा प्रतिशत = 20%

ख) यहाँ,

क्रय मूल्य = रु. 15,000

बिक्रय मूल्य = रु.14,100

क्रय मूल्य भन्दा बिक्रय मूल्य कम भयो । तसर्थ नोक्सान भयो ।

नोक्सान = क्रय मूल्य – बिक्रय मूल्य = 15000 - 14100 =900

$$\text{अतः नोक्सान प्रतिशत} = \frac{\text{वास्तविक नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$$

$$= \frac{900}{15000} \times 100\% = 6\%$$

अतः नोक्सान प्रतिशत = 6%

उदाहरण 2

रु.**3450** मा किनेको एउटा बाख्रा **2** महिना पछि बेच्दा रु.**1450** नोक्सान भयो भने उक्त बाख्राको विक्रय मूल्य पत्तालगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 3450

नोक्सान (L) = रु. 150

बिक्रय मूल्य (S.P.) = ?

हामीलाई थाहा छ, नोक्सान (L) = C.P. - S.P.

रु. 1450= रु. 3450 - S.P.

अथवा S.P. = रु. (3450 - 1450) = रु. 2,000

बिक्रय मूल्य (S.P.) = रु 2,000

उदाहरण 3

विन्दुले रु. **1500** मा **100** ओटा अन्डाहरू ल्याइन् । जसमा **4** ओटा फुटेछन् । बाँकी अन्डाहरूलाई उनले प्रति अण्डा रु.**16** का दरले बेच्दा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

समाधान

यहाँ,100 ओटा अन्डाको क्रय मूल्य (C.P.) = रु. 1500

फुटेका अन्डा सङ्ख्या = 4

ठिक अवस्थामा भएका अन्डा= 50 - 4 = 46

एउटा अन्डाको बिक्रय मूल्य = रु. 16

96 ओटा अन्डाको बिक्रय मूल्य = 96 × 16 = रु. 1536

यहाँ क्रयमूल्य भन्दा बिक्रय मूल्य धेरै भयो । यसकारण उनलाई नाफा भयो ।

अतः नाफा = S.P. - C.P.

= रु. 1536 - रु.1500 = रु.36

अब, नाफा प्रतिशत = $\dfrac{\text{वास्तविक नाफा}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

$$= \frac{36}{1500} \times 100\% = 2.4\%$$

नाफा प्रतिशत = 2.4%

अतः उनलाई 2.4% नाफा भयो ।

अभ्यास

1. तलका आँकडाहरू प्रयोग गरेर नाफा प्रतिशत वा नोक्सान प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् ।

क्रय मूल्य (रु.)	विक्रय मूल्य (रु.)
(क) 300	330
(ख) 5000	4500
(ग) 7000	7700
(घ) 10,000	9,990

(ङ) रु. 1450 मा किनेको बाख्रालाई एउटा रु. 1740 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो ?

2. (क) कमलाले एउटा साडी रु 1350 मा बेच्दा रु 150 नाफा भयो भने उक्त साडीको क्रय मूल्य कति होला ?

ख) रु. 760 मा किनेको एउटा क्याल्कुलेटर बेच्दा रु. 50 नोक्सान भयो भने उक्त क्याल्कुलेटरको बिक्रय मूल्य कति रहेछ ? पत्तालगाउनुहोस् ।

ग) रु. 15000 को रिक्सालाई10% नाफा लिनलाई कतिमा बेच्नु पर्ला ?

3. (क) रु. 83000 मा किनेको रागोलाई रु. 94300 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान हुन्छ ?

ख) रु. 1,58,500 मा किनेको एउटा मोटरसाइकल बेच्दा 8% घाटा भयो भने उक्त मोटरसाइकलको विक्रय मूल्य पत्तालगाउनुहोस् ।

4. बबिताले 50 ओटा बल्ब रु.2500 मा किनीन् जसमा 8 ओटा बल्ब फुटेका रहेछन् । बाँकी बल्बहरूलाई उनले प्रति गोटा रु 62 मा बेच्दा कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?(4.16%)

5. किसानले 500 ओटा कुखुरा किनेकोमा 75 ओटा चिसोले मरे । बाँकी कुखुरा प्रति एकको रु. 400 मा बेच्दा उनले 2.5% नाफा पारे भने कुखुराको जम्मा क्रयमूल्य कति रहेछ ?

6. एकजना खाद्यन्न पसलेले रु. 70 प्रति केजीको 80 केजी र रु. 80 प्रति केजी को 70 केजी चामल मिलाएर प्रति केजी रु. 78 मा बिक्री गरेभने उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला?

7. एन्जलले दुईओटा क्याल्कुलेटर प्रत्येकको रु. 1000 मा किने । उक्त किताकहरू बिक्री गर्दा उनलाई क्रमशः एउटा क्याल्कुलेटरमा 25 % नाफा र अर्को क्याल्कुलेटरमा 25 % नोक्सान भयो भने जम्मा उनलाई कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

छुट (Discount) र कर (Value Added Tax)

छुट (Discount)

दिइएको बिलको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तरको बारेमा छलफल गरौं।

(क) किताबको अङ्कित मुल्य कति छ ?

(ख) छुट कति प्रतिशत रहेछ ?

(ग) कति रकम छुट पाइयो ?

(घ) विपनाले उक्त शब्दकोशलाई कति रकम तिरीन् ?

माथिका प्रश्नहरूका उत्तरहरू बारेमा समूहमा छलफल गरी निस्कर्ष पत्ता लगाउने ।

कखरा स्टेशनरी, पोखरा				
नामः अनुष्का अवाले				
क्र.सं	सामानको नाम	मूल्य(रु)	परिणाम	जम्मा रकम
१.	गणित शब्दकोश	४५०	२	९००
छुट . १० % ले हुने रकम				९०
जम्मा रकम				८१०
अक्षरुपी रु. आठसय दश मात्र ।				

व्यापारीले सामानको मूल्य निर्धारण गरी ग्राहकलाई बताउने मूल्यलाई अङ्कित मूल्य (marked price) भनिन्छ । कुनै वस्तुको अङ्कित मूल्य मा केही रकम कम गरी बिक्री गरिएको छ भने उक्त कम गरिएको रकमलाई छुट (Disount) भनिन्छ । छुट अङ्कित मूल्यको सापेक्षमा हुन्छ ।

अर्थात छुट रकम =अङ्कित मूल्य (M.P.) को छुट प्रतिशत

=M.P. × छुट प्रतिशत हुन्छ ।

अङ्कित मूल्यमा केहि छुट गरेर सामान किनिन्छ भने उक्त छुट पछिको मूल्यलाई वास्तविक मूल्य भनिन्छ । वास्तविक मूल्य (S.P.) = M.P. - छुट रकम हुन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा किताबको अङ्कित मूल्य रु. **950** छ । यदी उक्त किताबकिन्दा **12 %** छुट पाइन्छ भने किताबको वास्तविक मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहा,अङ्कित मूल्य (M.P.) = रु 950

छुट प्रतिशत = 12%

अब, छुट रकम = M.P. को 12%

= रु.950 को12 % $= \frac{950 \times 12}{100}$

= रु.114

त्यसकारण, बिक्रय मुल्य = अङ्कित मूल्य — छुट

= रु.950 - रु.114

= रु. 836

अभ्यास

1. तलका वस्तुहरूको वास्तविक मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

वस्तु	अङ्कित मूल्य (MP)	छुट
(क) टेबुल	रु. 1150	10%
(ख)कम्प्युटर	रु. 24,500	8%
(ग)घडी	रु. 3200	6%
(घ)क्यामेरा	रु. 15000	9%

2. रु. 210 अङ्कित मूल्य भएको किताबमा 10% छुट छ भने उक्त किताबलाई कति तिर्नुपर्ला ?

3. एउटा टि भीको अङ्कित मूल्य रु. 9500 छ । यदि पसलेले उक्त टीभीमा 8% छुटमा बिक्री गर्छ भने उक्त टि. भी किन्नकालागि कति रुपैया तिर्नुपर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. तलका वस्तुहरूको अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउन'होस् :

वस्तु	**छुट**	**छुटपछिको मूल्य वा वास्तविक मूल्य**
(क) च्याउ	6%	रु. 329 प्रति कि.ग्रा.
(ख) आलु	5 %	रु. 285 प्रति ढक
(ग) तेल	4%	रु. 240 प्रति लिटर
(घ) सुन्तला	5 %	रु. 475 प्रति 5kg

5. यदि 10% छुटमा किन्दा एउटा TV सेट लाई 18900 पर्‍यो भने उक्त TV सेटको अङ्कित मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. तलका वस्तुहरूको छुट प्रतिशत पत्ता लगाउनुहोस् :

वस्तु	अङ्कित मूल्य	छुटपछिको मूल्य
(क) LCD	रु. 7,000	रु. 6440
(ख) हिटर	रु. 1160	रु. 1044
(ग) सिरक (२ओटा)	रु. 6400	रु. 6080
(घ) मिक्स्चर	रु. 5950	रु. 5355

मूल्य अभिवृद्धि कर (Value Added Tax)

दिइएको बिलको अध्ययन गरौँ र बिलमा के पाउछौ, साथीहरूबिच छलफल गरौं ।

बिलमा हेर्दा,

मोबाइल सेटको अङ्कित मूल्य रु. 4500 छ ।

आचार्य सप्लायर्स, पोखरा				
नाम : **एन्जल आचार्य**				
क्र.सं	सामानको नाम	मूल्य (रु.)	परिणाम	जम्मा रकम (रु.)
१.	मोबाइल सेट	४५००	१	४५००
मु. अ.क १३%ले हुने रकम				५८५
जम्मा रकम				५०८५
अक्षरुपी रु. पाँचहजार पचासी मात्र ।				
बिक्रेता				

मू. अ . क = 13%

तिर्नुपर्ने रकम = रु. 5085

बढेको रकम = रु. 5085- रु. 4500 = रु.585

बढेको रकम प्रतिशत = $\frac{585}{4500} \times 100\%$ = 13%

कुनैपनि वस्तु तथा सेवा बिक्री गर्दा प्रत्येक चरणमा वृद्धि हुने मूल्यमा लाग्ने करलाई मूल्य अभिबृद्धि कर **(VAT)** भनिन्छ । आफूले किनेको वस्तुमा ढुवानी, बिमा, कमिसन आदि जोडेर सेवा शुल्क र छुट घटाएर मूल्य अभिवृद्धि कर (VAT) लाग्ने मूल्य कायम गरिन्छ । साथै छुट दिएको वस्तुमा छुट घटाएर आएको मूल्यमा मूल्य अभिवृद्धि कर(VAT) लाग्ने गर्दछ। मूल्य अभिवृद्धि कर वस्तुको बिक्रय मूल्यमा जोडिन्छ। मूल्य अभिवृद्धि कर जोडेपछिको मूल्यलाई वास्तबिक मूल्य भनिन्छ ।

म.ू अ.क. प्रतिशत= $\frac{\text{म.ू अ.क रकम}}{\text{बिक्रय मूल्य}} \times 100$

म.ू अ.क.रकम = वास्तविक मूल्य - बिक्रय मूल्य

उदाहरण 1

रु.6000 बजार मूल्य भएको एउटा इन्डक्सन हिटर किन्दा 8% छुट पाइन्छ र 13% मूल्य अभिबृद्धि कर (VAT) तिर्नुपर्छ भने उक्त इन्डक्सन हिटर्र कति रुपैया तिर्नुपर्ला ?पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, अङ्कित मूल्य (M.P) = रु. 6000

छुट = 8%

छुट रकम = रु.6000 को 8%=$\frac{6000 \times 8}{100}$ =रु. 480

त्यसकारण, छुट पछिको रकम = रु. 6000 - रु. 480 = रु.5520

VAT = 13%

अब VAT रकम = रु.5520 को 13% = रु. 717.6

अब इन्डक्सन हिटरको विक्रय मूल्य = रु. 5520 + रु. 717.6= रु. 6237.60

त्यसकारण, उक्त इन्डक्सन हिटरकिन्न रु. 6237.60 तिर्नुपर्छ ।

नोट : *छुटलाई* अङ्कित मूल्य(M.P) बाट घटाइन्छ भने, VAT लाई बिक्रय मूल्य (S.P.) मा जोडिन्छ ।

अभ्यास

1. तलका वस्तुहरू किन्दा तिर्नुपर्ने बिल रकम पत्ता लगाउनुहोस् । :

वस्तु	अङ्कित मूल्य	छुट	मु.अ.क.
(क) घडी	रु. 980	5%	13%
(ख) मोबाइल फोन	रु. 22500	10%	13%
(ग) हिटर	रु. 6800	12%	13%
(घ) कम्प्युटर सेट	रु. 22500	12%	13%

2. घनश्यामले रु. 1600 को अंकित मूल्य भएको सामन खरिद गर्दा 3% छुट लिइ 13% मू.अ.क तिर्नुपर्योभने जम्मा कति रुपैया तिर्नु पर्ला?

3. अंकित मूल्य रु. 2,00,000 भएको एउटा मोटरसाइकलमा फेसटिबल छुट 8%पछि 13% VAT जोड्दा कति रकम तिर्नुपर्छ ?

4. एउटा मोबाइलको क्रयमूल्य रु. 3000 छ उक्त टर्चको अङ्कित मूल्य क्रयमूल्यको 30% ले बढी छ । यदि पसलेले उक्त चर्टलाई 15% छुटमा बिक्री गरे भने
   (क) उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य कति होला ?
   (ख) क्रेताले कति रुपैंया छुट पायो होला?
   (ग) क्रेताले कति रुपैंया मा उक्त मोबाइल किने होला ?
   (घ) उक्त पसलेलाई उक्त मोबाइलबाट कति रुपैंया नाफा भयो होला?

पाठ १७

ऐकिक नियम (Unitary Method)

17.1 प्रत्यक्ष विचरण

तलको तालिकाको अध्ययन गरौं ।

तालिका 1

सिसाकलम सङ्ख्या	12	8	4	6	1
जम्मा मूल्य (रु.)	60	40	20	30	?

प्रश्नहरू :

(क) 12 ओटा सिसाकलम को मूल्य कति रुपिया पर्ने रहेछ?

(ख) 6 ओटा सिसाकलम को मूल्य कति रहेछ ?

(ग) 1 ओटा सिसाकलम को मूल्य कति पर्छ होला ?

(घ) सिसाकलम सङ्ख्या र मूल्य बिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

माथिको तालिकाबाट के थाहा पाउन सकिन्छ भने सिसाकलमको सङ्ख्या घट्दै जाँदा जम्मा मूल्य पनि घट्दै गएको छ र सिसाकलमको सङ्ख्या बढ्दा जम्मा मूल्य पनि बढेको पाइन्छ । त्यसलाई प्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

तसर्थ, दुईओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा भएको कमी (वा वृद्धि) ले अर्को चरमा पनि त्यही अनुपातमा कमी (वा वृद्धि) देखिन्छ भने ती चरहरूबिचको सम्बन्धलाई प्रत्यक्ष विचरण (Direct Variation) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

5 kg गोलभेडाको मूल्य रु. 750 पर्छ भने 8 kg गोलभेडाको मूल्य कति रुपैया पर्ला ?

समाधान

गोलभेडाको परिमाण र गोलभेडाको मूल्यबिच प्रत्यक्ष बिचरण छ । किनकी

बढी गोलभेडा भए बढी मूल्य, कम गोलभेडा भए कम मूल्य

5 kg गोलभेडाको मूल्य रु.750 पर्छ ।

1 kg गोलभेडाको मूल्य रु.$\frac{750}{5}$ = रु 150 पर्छ । ($\therefore$ प्रत्यक्ष विचरण भएकाले परिमाण घट्दा मूल्य पनि घट्छ ।
त्यसकारण 750 लाई 5 ले भाग गर्ने ।)

8 kg गोलभेडाको मूल्य रु. 150 × 8 = रु.1200 पर्दछ । ($\therefore$ प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण बढ्दा मूल्य पनि बढ्छ । त्यसकारण 75 लाई 6 ले गुणा गर्ने ।)

त्यसैले, 8 kg गोलभेडाको मूल्य रु.1200पर्छ ।

उदाहरण 2

7 लिटर पेट्रोलले 112 km यात्रा गर्न पुग्छ भने 12 लिटर पेट्रोलले कति km यात्रा गर्न पुग्ला ?

समाधान

यहाँ,

परिमाण (ℓ)	यात्रा दुरी (km)
7	112
12	x

यहाँ, यात्रा दुरी र परिमाणबिच प्रत्यक्ष विचरण भएकोले यसलाई अनुपातमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ ।

(प्रत्यक्ष विचरणमा परिमाण र यात्रा दुरी समान अनुपातमा घट्ने वा बढ्ने भएकोले अनुपातलाई पनि लेख्न सकिन्छ ।)

अथवा,$7x = 112 \times 12$

अथवा,$x = \dfrac{112\times12}{7} = 192$ km

त्यसकारण 12 लिटर पेट्रोलले 192 km यात्रा गर्न पुग्छ ।

उदाहरण 3

4 ओटा कापी र 5ओटा किताबको जम्मा मूल्य रु. 880 पर्छ यदि एउटा कापीको मूल्य रु. 60 भए, एउटा किताबको मूल्य कति होला ?

समाधान

यहाँ, 4 ओटा कापी र 5 ओटा किताबको जम्मा मूल्य = रु. 880

एउटा कापीको मूल्य = रु. 60

4 ओटा कापीको मूल्य = रु. 4 × 60 = रु. 240

अब, 5 ओटा किताबको मूल्य = जम्मा मूल्य - 4 ओटा कापीको मूल्य

= रु. 880 – रु. 240 = रु. 620

5 ओटा किताबको मूल्य =रु.640

1ओटा किताबको मूल्य = रु. $\frac{640}{5}$. = रु. 128 = रु. 128

अतः एउटा किताबको मूल्य रु.128 पर्छ ।

अभ्यास

1. 10 ओटा किताबको मूल्य रु. 1300 पर्दछ भने 4 ओटा किताबको कति रुपैयाँ पर्ला ?
2. यदि 4 दर्जन कापीको मूल्य रु. 576 पर्छ भने रु. 228 मा कतिओटा कापी पाइएलान् ?
3. एकजना धावकले 45 मिनेटमा 15 km दौड पूरा गर्न सक्दछ भने 20 km दुरी पार गर्न कति समय लाग्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. 7 ओटा गाई बाध्नको लागि 720 वर्ग फिट भकारो चाहिन्छ भने 4 ओटा गाईको लागि कति क्षेत्रफल चाहिन्छ होला ?
5. एउटा मालबाहक ट्रक 48 km प्रति घण्टाले गुड्दा पोखरादेखि काठमाडौँको दुरी 6 घण्टामा पूरा गर्दछ । यदि उक्त ट्रकको गति घटेर 36 km प्रति घण्टा भयो भने उक्त दुरी कति घण्टामा पार गर्ला ?
6. एक किलो पिठोको मूल्य रु. 28 हुँदा एउटा रोटीको तौल 486 ग्राम थियो । यदि पिठोको मूल्य रु. 32 प्रति के.जी. हुँदा रोटीको तौल कति होला ? (मानौं रोटीको मूल्य यथावत रहन्छ ।)
7. 3 ओटा कुर्सी र 4 ओटा टेवलको जम्मा मूल्य रु. 7,540 पर्छ । यदि एउटा कुर्सीको मूल्य रु. 220 पर्छ भने एउटा टेवलको मूल्य पत्ता लगाउन'होस् ।
8. 5 ओटा बाखा र 2 ओटा भेडाको मूल्य रु. 1,35,000 छ यदि एउटा भेडाको मूल्य रु. 17,500 भए एउटा बाखाको मूल्य कति होला ?

17.2 अप्रत्यक्ष विचरण

तलको तालिकाको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूको उत्तर खोजौँ ।

तालिका 2

खाना खाने मानिसको सङ्ख्या	2	4	8	1
खाना पुग्ने दिनको सङ्ख्या	8	4	2	?

प्रश्नहरू :

(क) 2 जनालाई कति दिन पुग्ने खाना रहेछ ?

(ख) 8 जनालाई कति दिन पुग्ने खाना रहेछ ?

(ग) 1 जनालाई कति दिनका लागि खाना पुग्ला ?

(घ) खाना खानेको सङ्ख्या र खाना पुग्नेदिन बिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

त्यस्तै, माथिको तालिकामा खाना खाने मानिसको संख्याबढाऊदै जाँदा जम्मा खाना पुग्ने दिनको सङ्ख्या घट्दै गएको पाइन्छ । तसर्थ खाना खाने मानिसको संख्या र खाना पुग्ने दिनको सङ्ख्या बिचको सम्बन्ध विपरीत छ । त्यसैले खाने मानिसको सङ्ख्या र खाना पुग्ने दिनको सङ्ख्या बिचको सम्बन्ध अप्रत्यक्ष विचरण भएको मानिन्छ ।

तसर्थः दुईओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा कमी (वा वृद्धि) हुदा अर्को चरमा त्यही अनुपातमा वृद्धि (वा कमी) आउँछ भने ती चरहरूबिचको सम्बन्धलाई अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation) भनिन्छ ।

माथीको छलफलबाट ऐकिक नियमलाइ निम्नानुसार परिभाषित गर्न सकिन्छ ।

कुनै एउटा एकाइ वस्तुको मान पत्ता लगाएर उस्तै खालका धेरै वा थोरै वस्तुको मान पत्ता लगाउने गणितीय विधिलाई ऐकिक नियम भनिन्छ ।

उदाहरण 1

20 जना कामदारलाई कुनै काम गर्न 24 दिन लाग्छ, भने 15जना कामदारलाई कति दिन लाग्ला ?

समाधान : यहाँ,

काम गर्ने दिन	जम्मा कामदार
24	20 जना
x	15 जना

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्या बिच अप्रत्यक्ष विचरण छ।

त्यसैले, थोरै दिन भए धेरै कामदार र धेरै दिन भए थोरै कामदार चाहिन्छ।

[अप्रत्यक्ष विचरण भएकोले पनि लेख्न सकिन्छ ।]

अथवा, $15x = 480$

अथवा, $x = \frac{480}{15} = 32$

अतः जम्मा काम गर्ने दिन = 32दिन

उदाहरण 2

10 दिनमा कुनै काम पूरा गर्न 10 जना कामदार चाहिन्छ । त्यही काम 15 दिनमा पूरा गर्न कतिजना थप कामदारको आवश्यकता पर्ला ?

समाधान

यहाँ, काम गर्ने दिन र कामदार सङ्ख्या हेर्दा

काम गर्ने दिन कम भए बढी कामदार चाहिन्छ ।

काम गर्ने दिन बढी भए कम कामदार चाहिन्छ ।

अव, 18 दिनमा कुनै काम 10जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

1 दिनमा कुनै काम 10×18जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

= 180 (अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन घट्दा कामदार सङ्ख्या बढ्छ । त्यसकारण 18 लाई 10 ले गुणा गर्ने ।)

15 दिनमा कुनै काम (अप्रत्यक्ष विचरण भएकाले दिन बढ्दा कामदार सङ्ख्या घट्छ । त्यसकारण 180 लाई 15 ले भाग गर्ने ।)

= 12 जनाले पूरा गर्न सक्छन् ।

अब, थप कामदार सङ्ख्या = 12 जना - 10 जना

= 2 जना

अभ्यास

1. 12 ओटा कक्षा कोठा भएको विद्यालयमा जम्मा 300 जना विद्यार्थी क्षमता थियो । यदि 375 जना विद्यार्थी भर्ना भए भने थप कतिओटा कक्षाकोठा चाहिएलान् ?
2. कुनै एउटा काम पूरा गर्न 20 जना कामदारलाई 15 दिन लाग्छ । उक्त काम 12 दिनमा सिध्याउनका लागि कतिजना कामदार थप्नुपर्ला ?

3. कुनै काम पूरा गर्न 12 जनालाई 14दिन लाग्छ । यदि कामदार थपेर 21जना बनाइयो भने उक्त काम कति दिनमा सकिएला ?

4. कुनै दानाले 10 ओटा भैंसीलाइ 18 दिनका लागि पुग्दछ । यदि 5 भैंसी थपीएमा कति दिनका लागि पुग्दछ होला ?

5. कुनै एउटा व्यारेकमा 200 जना सिपाहीलाई 30 दिनलाई पुग्ने रसद छ । उक्त रसद 40 दिनलाई पुऱ्याउनका लागि कति जना सिपाहीलाई अन्यत्र सार्नुपर्ला ?

6. एउटा मोटर साइकल 50 km प्रति घण्टाको दरले गुड्दा कुनै दुरी पार गर्न 7 घण्टा लाग्दछ । यदि उसलाई 5 घण्टामा उक्त दुरी पार गर्नु पऱ्यो भने उक्त मोटरसाइकलको गति कतिले बढाउनु पर्ला ?

पाठ १८ साधारण ब्याज (Simple interest)

तलको वाक्यको अध्ययन गरी प्रत्यकले दिइएका प्रश्नहरूका उत्तर खोजी गरैं ।

फूर्वाले रु. 2500 बैङ्कमा राख्दा वार्षिक 8% ब्याजका दरले 2 वर्ष पछि रु. 400 थपि जम्मा रु. 2900 प्राप्त गरे ।

फूर्वालेकति रकम बैङ्कमा जम्मा गऱ्यो?बैङ्कको वार्षिक ब्याजका दर कति रहेछ ?

कति वर्ष पछि रामले रु. 2900 प्राप्त गऱ्यो ?

2 वर्ष पछि थपिएको रकमले के जनाऊछ ?

यहाँ, फूर्वाले जम्मा गरेको रकमलाई साँवा भनिन्छ । थपिएको रकमलाई ब्याज भनिन्छ र जम्मा रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ ।

माथीको वाक्य अनुसार साँवा [Principal (P)] = रु. 2500, समय [Time (T)] =2 वर्ष सम्म, वार्षिक 10% ब्याजदर [Rate (R)] = 8% , ले जम्मा गर्दा ब्याज [Interest (I)] = रु. 400 प्राप्त भयो र जम्मा मिश्रधन [Amount (A)] = रु. 2900 भयो ।

18.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

तलको उदाहरणको अध्ययन गरौं ।

रु. 100 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. 1 हुन्छ ।

रु. 1 को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु. $\frac{1}{100}$ हुन्छ ।

रु. P को 1 वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु.$\frac{1}{100}\times P$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा 1% का दरले ब्याज रु.$\frac{1}{100}\times P\times T$ हुन्छ ।

रु. P को T वर्षमा R% का दरले ब्याज रु.$\frac{1}{100}\times P\times T\times R$ हुन्छ ।

$\therefore$ ब्याज $(I)=\frac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

त्यस्तै $R=\frac{I\times100}{P\,T}$ $T=\frac{I\times100}{P\,R}$ र $P=\frac{I\times100}{TR}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

रु. 5600 को बार्षिक 7% ब्याजदरमा 5 वर्षमा कति ब्याज पाइन्छ ?

समाधान : यहाँ,

सावाँ (P) = रु. 5600

ब्याजदर (r) = 7%

समय (t) = 5 वर्ष

ब्याज (I) = ?

हामीलाई थाहा छ, ब्याज (I) $= \frac{PTR}{100}$

$= \frac{5600 \times 5 \times 2}{100}$

= रु. 560

उदाहरण 2

2% वार्षिक ब्याजदरले 3 वर्षमा ब्याज रु. 120 पाउन कति रुपैँया जम्मा गर्नु पर्ला ?

समाधान

यहाँ, ब्याज दर (R) = 2%

समय (T) = 3 वर्ष

ब्याज (I) = रु. 120

साँवा (P) = ?

हामीलाई थाहा छ, साँवा **(P)** $= \frac{I \times 100}{TR}$

$= \frac{120 \times 100}{2 \times 3}$ = रु. 2000 = रु. 2000 जम्मा गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

रु. 1500 लाई 4 वर्षसम्म ब्याजमा लगाउदा रु. 750 ब्याज पाइन्छ भने ब्याजदर कति होला ?

समाधान : यहाँ, साँवा (P) = रु. 1500

समय (T) = 4 वर्ष

ब्याज (I) = रु. 750

ब्याजदर (R) = ?

हामीलाई थाहा छ, ब्याजदर (R) $= \frac{I \times 100}{P\,T}$

त्यसकारण, ब्याजदर (R) $= \frac{750 \times 100}{1500 \times 4} = 12.5\%$

अभ्यास

1. साधारण ब्याज **(I)** पत्ता लगाउनुहोस्ः

(क) साँवा = रु. 5500 ब्याज दर (R)= 5% समय = 3 वर्ष

(ख) साँवा = रु. 9000 ब्याज दर (R) = 7.5% समय = 2 वर्ष

(ग) साँवा = रु. 12,600 ब्याज दर (R) =8% समय = 3 वर्ष 6 महिना

(घ) सुजनले वार्षिक 6 % ब्याजदरले ब्याज पाउने गरी रु. 3500 नेपाल बैंङ्क लिमिटेडमा जम्मा गरे भने 4 वर्ष पछि उनले कति ब्याज पाउलान् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) एन्जीलाले वार्षिक 10 % ब्याजदरमा बैंकबाट रु. 18000 ऋण लिइन् । भने 30 महिनापछि उनले बैङ्ककमा कति ब्याज बुझाउनु पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. समय (T) पत्ता लगाउन'होस् :

(क) साँवा = रु. 1250 ब्याज दर (R) = 13% ब्याज = रु. 650

(ख) साँवा = रु. 4500 ब्याज दर (R) = 4.5% ब्याज = रु. 900

(ग) साँवा = रु. 2400 ब्याज दर (R) = 7% ब्याज = रु. 350

(घ) कोपीलाले वार्षिक 8 % ब्याजदरमा बैंङ्कबाट रु. 24,000 ऋण लिइन् । भने कति बर्ष पछि उनले बैंङ्कमा रु. 9600 ब्याज बुझाउनु पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् । (5)

(ङ) रु. 25, 000 लाई बैङ्कमा 10%ब्याजदरले राख्दा कति वर्षमा साँवा बराबर ब्याज हुन्छ ?(10)

3. ब्याज दर **(R)** पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) साँवा = रु. 7,200 समय (T) = 5 वर्ष ब्याज = रु. 1080

(ख) साँवा = रु. 6,000 समय (T) = 3 वर्ष 6 महिना ब्याज = रु. 1155

(ग) साँवा = रु. 2,160 समय (T)= 4 वर्ष ब्याज = रु. 648

(घ) बिनालाई रु. 7600 बैङ्कमा राखे वापत बैंकले 3 वर्ष पछि रु. 1254 ब्याज दियो भने ब्याज दर कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) कान्छाले रु. 45,000 लगानी गरे बापत 5 वर्षमा रु.2025 ब्याज बुझाउँछन् भने ब्याजदर कति रहेछ ?

4. साँवा **(P)** पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) ब्याज दर (R) = 7.5% समय (T)= 5 वर्ष ब्याज = रु. 400

(ख) ब्याज दर (R) = 11% समय (T)= 8 वर्ष ब्याज = रु. 2062.50

(ग) ब्याज दर (R)= 9% समय (T)= 9 वर्ष ब्याज = रु. 810

(घ) सुशान्तले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कबाट 4 वर्षपछि रु 5500ब्याज प्राप्त गर्न चाहन्छन् । उसले अहिले 5.5% ब्याजदरमा कति रकम जम्मा गर्नु पर्ला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) 7 वर्षपछि ब्याज रु. 4200 पाउनका लागि 6% ब्याजदरमा अहिले कति रकम जम्मा गर्नु पर्ला ?

5. 10% ब्याजदरले रु. 1080 को 4 वर्षमा कति ब्याज आउला र कति वर्षमा रु. 900 को 12% का दरले उत्तिनै ब्याज आउँछ ?

18.2 मिश्रधन (Amount)

रोजिनाले बैंङ्कमा रु. 10,000 जम्मा गर्दा 3 वर्षपछि जम्मा रु. 12,100 प्राप्त गरिन् । यसमा जम्मा रकम भन्नाले के बुझिन्छ ? छलफल गरी लेखौं।

निश्चीत समय पश्चात कुनै पनि साँवा रकममा ब्याज थपगरी एकमुष्ट प्रदान गरिने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । यसलाई A ले जनाइन्छ रमिश्रधन [Amount(A)] = साँवा [Principal (P)] + ब्याज [Interest (I)]

अर्थात, मिश्रधन =साँवा + ब्याज

$A = P + I$..............(i)

हामीलाई थाहा छ $I = \frac{PTR}{100}$ ....(ii)

(i) र (ii) लाई मिलाउ"दा,

$$A = P + \frac{PTR}{100}$$ हुन्छ ।

अथवा, $A = \frac{100 \times P + PTR}{100}$

अथवा, $A\times 100 = P\times 100 + PTR$

अथवा, $A\times100=P(100+TR)$ हुन्छ ।

अतः सावाँ $(P)=\dfrac{A\times100}{100+TR}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

वार्षिक 5% ब्याजदरले रु. 7500 जम्मा गर्दा 4 वर्ष पछि जम्मा कति रकम प्राप्त हुन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, ब्याजदर (R) = 5%

साँवा (P) = रु.7500

समय (T) = 4वर्ष

मिश्रधन (A) = ?

हामीलाई थाहा छ, मिश्रधन $(A) = P + \dfrac{PTR}{100}$

$$= 7500 + \frac{7500\times 4\times5}{100}$$

$$= 7500 + 1500$$

$$= 9,000.$$

अतः मिश्रधन (A) = रु.9,000.

उदाहरण 2

कुनै साँवा रकम 8% ब्याजदरले जम्मा गर्दा 42 महिना पछि जम्मा रकम रु 25,600 हुन्छ भने कति रकम जम्मा गरेको होला ? पत्ता लगाउन'होस् ।

समाधान

यहाँ, मिश्रधन (A) = रु 25,600

समय (T) = 42 महिना = 3.5वर्ष

ब्याजदर (R) = 8 %

साँवा (P) = ?

हामीलाई थाहा छ, साँवा $(P)=\dfrac{A\times100}{100+TR}$

$$= \frac{25600 \times 100}{100+3.5\times 8}$$

अत: जम्मा गरेको रकम (P) = रु. 20,000

उदाहरण 3

रु. 5,000 लाई 8% ब्याजदरमा 2 बर्ष बैङ्कमा राख्दा आउने ब्याजको 5% बैङ्कलाई आयकर तिर्नुपर्छ भने 2 बर्षपछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?

समाधान

यहाँ, साँवा (P) = रु 5,000

समय (T) = 2 वर्ष

व्याजदर (R) = 8 %

मश्रधन (A) =?

हामीलाई थाहा छ,, व्याज I $= \frac{PTR}{100}$

$= \frac{5000\times 2\times 8}{100}$

= रु.800

फेरि, आयकर = रु 800 को 5% = $800\times\frac{5}{100}$ =रु 40

तसर्थ, शुद्ध ब्याज = रु. 800-रु 40 = रु. 770

अब, मिश्रधन (A) = P + शुद्ध ब्याज

= रु. 5,000 + रु. 770

= रु. 5,760

अभ्यास

1. मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) साँवा = रु 25,000 समय = 7 महिना ब्याजदर = 10%

(ख) साँवा = रु 55,500 समय = 2 बर्ष ब्याजदर = 7.5%

(ग) साँवा = रु 524,000 समय = 3 महिना ब्याजदर = 11%

2. रु 35000 को 3% ब्याजदरले 54 महिनामा जम्मा कति रकम होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. 4 महिनामा जम्मा रकम रु 56,610 प्राप्त गर्न 6% व्याजदरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?

4. कति रुपैया जम्मा गर्दा 5% का दरले वर्षमा जम्मा रु 1225 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. 40 महिनामा एकमुष्ट रु 2375 प्राप्त गर्न % व्याजदरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?

6. वार्षिक 10% व्याजदरले रु 5500 को 1 वर्षमा मिश्रधन कति हुन्छ ? पुनः उक्त मिश्रधनलाई उहि व्याजदरमा जम्मा गर्दा अर्को वर्ष जम्मा रकम कति होला ?

7. छिरीङ्ले वार्षिक 5% ब्याजदरले रु. 40,000 बैङ्कमा वचत गर्दा आउने ब्याजको 5% आयकर तिर्नुपर्छ भने 4 बर्षपछि उसले जम्मा कति रकम प्राप्त गर्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. रु 75,000 को वार्षिक 5.6% ब्याजदरले 6 महिनामा प्राप्त हुने ब्याजमा बैङ्कले 5% कर लिन्छ भने 6 महिनापछि एकमुष्ट जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?

9. रु. 10,800 को वार्षिक 10% ब्याजदरमा 4 वर्षमा आउने ब्याजको 5% कर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि एकमुष्ट कति रकम प्राप्त होला ?

10. करुणाले भैँसीपालनका लागि बैङ्कबाट 12% ब्याजदरमा रु. 200,000 लिइन् । यदि उनले 30 महिना पछि साँवा र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम तिरीन् भने जम्मा कति रुपियाँ तिरीन् होला ?

पाठ १९ तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

19.0 पुनरावलोकन

कक्षा 8 का 40 जना विद्यार्थीहरूले कक्षा 7 को वार्षिक परिक्षामा गणित विषयमा निम्नानुसारको अङ्क प्राप्त गरे ।

40,	45,	49,	53,	56,	45,	40,	53,	65,	73,
49,	75,	83,	89,	92,	48,	73,	45,	63,	75,
73,	94,	92,	90,	89,	45,	82,	75,	73,	65,
40,	49,	56,	60,	65,	60,	63,	73,	82,	48

माथिको प्राप्ताङ्कलाई तलको जस्तै तालिका बनाएर भर र तालिका पूरा गरेर हेरौँ ।

प्राप्ताङ्क	मिलान चिह्न	बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता
40	|||	3	3
45	||||	4	3 + 4 = 7
49	|||	3	7 + 3 = 10
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

अब माथिको तालिकालाई कस्तो तालिका भनिन्छ ? साथीहरू बिच छलफल गरी उत्तर लेखौं ।

मााथको तालिकालाई बारम्बारता तालिका भनिन्छ । जसको बारेमा हामीले यस अघि नै छलफल तथा अध्ययन गरिसकेका छौं । यसरी निश्चित नियम अनुसार तथ्याङ्कहरूको बारम्बारतासहित प्रस्तुत गरिन्छ भने त्यसलाई खण्डित श्रेणी (Discrete Series) भनिन्छ । अब हामी यस्ता तथ्याङ्कहरूको मध्यक, मध्यिका, रित र विस्तारको बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

19.1 मध्यक (Mean)

क्रियाकलाप 1.

तलको तालिकामा आफूले अघिल्लो परिक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कहरू भरौँ ।

विषय	गणित	विज्ञान	सामाजिक	अङ्ग्रेजी	नेपाली	पेसा व्यवसाय
प्राप्ताङ्क						

अब सबै प्राप्ताङ्कको योगफल निकालौँ र त्यसलाई जम्मा विषयहरूको सङ्ख्याले भाग गरौँ ।

त्यसरी प्राप्त हुने भागफल नै मध्यक प्राप्ताङ्क हुन्छ । यसलाई औसत (Average) वा अङ्कगणितिय मध्यम (Arithmetic Mean) पनि भनिन्छ । यसलाई $\overline{X}$ ले जनाइन्छ र सूत्रमा लेख्दा,

मध्यक $(\overline{X}) = \frac{\sum X}{n}$ लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

तलका तथ्याङ्कहरूबाट अङ्कगणितीय मध्यम पत्ता लगाउन'होस् नुहोस् ।

4, 12, 13, 21, 12, 12, 10

समाधान

यहाँ र $n = 7$

$\sum X = 4 + 12 + 13 + 21 + 12 + 12 + 10 = 84$

हामीलाई थाहा छ, मध्यक$(\overline{X}) = \frac{\sum X}{n} = \frac{84}{7} = 12$

तसर्थ, मध्यक $= 12$

वैयक्तिक श्रेणीको लागि मध्यक कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ, तलको उदाहरणको अवलोकन गरौँ ।

उदाहरण 2

कक्षा 8 का 25 जना विद्यार्थीहरूले दिएको 20 पूर्णाङ्कको त्रैमासीक परीक्षामा प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्कहरू निम्नानुसार छन् : 7, 8, 9, 6, 10, 5, 8, 9, 12, 7, 8, 11, 14, 11, 12, 12, 13, 14, 12, 13, 12, 11, 7, 8, र 11. यी आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी मध्यक पत्ता लगाउन'होस् :

यहाँ, दिइएका आँकडाहरूलाइ तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क(X)	मिलान चिह्न	बारम्बारता (*f*)	f×X
5	|	1	$5 \times 1 = 5$
6	|	1	$6 \times 1 = 6$
7	|||	3	$7 \times 3 = 21$
8	||||	4	$8 \times 4 = 32$
9	||	2	$9 \times 2 = 18$
10	|	1	$10 \times 1 = 10$
11	||||	4	$11 \times 4 = 44$
12	||||	5	$12 \times 5 = 60$
13	||	2	$13\times2 = 26$
14	||	2	$14 \times 2 = 28$
		N = जम्मा विद्यार्थी = 25	$\sum f\times x = 250$

यहाँ सबै प्राप्ताङ्कहरूको जोड $\sum f \times X = 250$ हुन्छ । विद्यार्थी सङ्ख्या हुन्छ N = 25 छ ।

तसर्थ मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\text{प्राप्ताङकहरुको जोड}}{\text{जम्मा बिद्यार्थी सङख्या}} = \dfrac{250}{25} = 10.$

तसर्थ, खण्डित श्रेणिकालागी मध्यक$(\overline{X}) = \dfrac{\sum f \times X}{N}$ हुन्छ ।

अभ्यास

1. तलका तथ्याङ्कहरूको अङ्कगणितीय मध्यक $(\overline{X})$ पत्ता लगाउन'होस् ।

(क) 15, 13, 18, 16, 14, 17, 12

(ख) 84, 91, 88, 94, 91, 105, 98, 85

(ग) 45, 35, 37, 32, 47, 38, 39, 36, 34, 37

(घ) 105, 108, 112, 106, 120, 108, 112, 110, 100

2. दिइएको बारम्बारता तालिकाबाट अङ्कगणितीय मध्यक ($\overline{X}$) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

प्राप्ताङ्क	9	10	12	14	16	18
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	2	7	9	8	4

(ख)

उमेर(बर्ष)	9	10	11	12	13	14	15	16
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	10	4	6	2	5	6	5

(ग)

ज्याला (रु. सयमा)	50	55	60	85	70	75
कामदार सङ्ख्या	4	8	7	6	9	6

(घ)

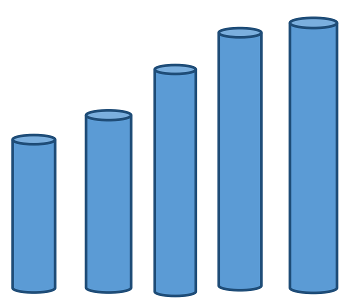
x	5	10	15	20	25	30
f	6	3	6	7	4	4

(ङ)

x	2	4	6	8	10	12
f	12	8	9	10	6	5

19.2 मध्यिका (Median)

चित्रमा फरक फरक लम्बाइ भएका पाँचओटा लठ्ठीहरूलाई तिनीहरूको उचाइको अधारमा होचोबाट अग्लो सम्म मिलाएर राखिएको छ । चित्रमा तेस्रो लठ्ठीलाई आधार मान्दा, त्यो लठ्ठी भन्दा अगाडि र पछाडि बराबर अथवा 2 र 2 ओटा लठ्ठी छन् । तसर्थ, बिचमा पर्ने लठ्ठीको



उचाइ वा तेस्रो लठ्ठीको उचाइ नै ती लठ्ठीहरूको उचाइको मध्यिका मान हुन्छ । यसरी पाँचओटा लठ्ठीमा तेस्रो लठ्ठी मध्यिका भयो । तसर्थ $\frac{5+1}{2}$ औँ लठ्ठी वा 3 औँ लठ्ठी मध्यीका मान भयो ।

मध्यिकाले तथ्याङ्कहरूलाई बराबर दुई भागमा बिभाजन गर्दछ । तसर्थ, मध्यिका मानबाट तल र माथि दुबै तिर बराबर तथ्याङ्क पर्दछन् । मध्यिकालाई M_d ले जनाइन्छ ।

त्यसकारण मध्यिका $\frac{n+1}{2}$ औँ पद हुन्छ ।

फेरि माथिको क्रियाकलापमा हेरौँ । मध्यिका मानबाट तल र माथि बराबर अथवा 2/2 ओटा लठ्ठीहरू छन् ।

यदि तथ्याङ्कहरूको जम्मा सङ्ख्या जोर छ भने मध्यिकाको मान बिचका दुई तथ्याङ्कहरूको मध्यक हुन्छ ।

उदाहरण 2

तलको आँकडाहरूबाट मध्यिक पत्ता लगाउनुहोस् ।

12, 10, 13, 9, 12, 14, 16, 8

समाधान

यहाँ, तथ्याङ्कहरूलाई बढ्दो क्रममा मिलाएर राख्दा,

8, 9, 10, 12, 12, 13, 14, 16

$n = 8$

मध्यिका $\frac{n+1}{2}$ औँ पद $= \frac{8+1}{2}$ औँपद $= 4.5$औँ पद

यहाँ तथ्याङ्कहरूको सङ्ख्या 8 अथवा जोर छ त्यसकारण चौथो र पाँचौँ पदको औसत मान मध्यिका हुन्छ ।

तसर्थ मध्यिका $= \frac{\text{चौथोपद + पाँचौँ पद}}{2}$ हुन्छ ।

$= \frac{12+12}{2} = 12$ हुन्छ ।

यदि तथ्याङ्कहरू धेरै दोहोरिएका छन् भने त्यसलाई खण्डित श्रेणीमा वा बारम्बारता तालिकाबाट मध्यिका पत्ता लगाइन्छ । यसलाई तलको उदाहरणबाट हेरौँ ।

उदाहरण 3

तलको आँकडाहरूबाट मध्यिका **(median)** पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	18	20	22	25	29	30	32
विद्यार्थी सङ्ख्या	7	9	8	11	5	6	7

समाधान

माथिको तालिकालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	बारम्बारता (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f)
18	7	7
20	9	7 + 9 =16
22	8	16 + 8 = 24
25	11	24 +11 = 35
29	5	35 + 5 = 40
30	6	40 + 6 = 46
32	7	46 +7 = 53

अब, मध्यिका= $\frac{N+1}{2}$ औँ पद ।

सञ्चित बारम्बारता तालिकामा 27 औँ स्थानको पद सञ्चीत बारम्बारता 35 हुने प्राप्ताङ्कमा पर्छ । 35 भन्दा अघिल्लो सञ्चित बारम्बारता 24 छ र 27 औं पद 24 भन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारतामा पर्छ । तसर्थ, मध्यिका 35 सञ्चित बारम्बारता भएको प्राप्ताङ्क हो । अतः मध्यिका (M_d) = 25 भयो ।

अभ्यास

1. दिइएका तथ्याङ्कहरूबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

    (क) 27, 29, 18, 25, 32, 21, 26

    (ख) 34, 46, 49, 38, 56, 86, 68, 35

    (ग) 5.9ft, 5.2ft, 6.1ft, 7.2ft, 6.5ft, 5.4ft

    (घ) 112 kg, 104 kg, 108 kg, 109 kg, 111 kg, 109 kg, 114 kg, 112 kg, 110 kg, 113 kg

    (ङ) 250, 282, 211, 190, 235, 284, 237, 217, 245, 257, 281

2. तलका बारम्बारता तालिकाहरूबाट मध्यिका **(M_d)** पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)	प्राप्ताङ्क	25	30	35	40	45	50	55	60
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	10	12	13	3	4

(ख)	उमेर (वर्ष)	8	10	12	14	16	18
	विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	9	8	3	1

(ग)	x	50	100	150	200	250	300	350
	f	50	22	39	41	38	30	20

(घ)	x	100	200	300	400	500	600	700
	f	8	9	7	15	22	12	10

3. कक्षा 7 को अन्तिम परिक्षामा सम्मिलित जम्मा 25 जना विद्यार्थीहरूमध्ये मध्यिका प्राप्ताङ्क 27 थियो भने मध्यिका भन्दा धेरै प्राप्ताङ्क भएका विद्यार्थी सङ्ख्या र मध्यिका भन्दा थोरै अङ्क प्राप्त गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

19.3 रित (Mode)

कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीहरूको उचाइ यसप्रकार छ ।

145cm, 149 cm , 145 cm, 152 cm, 150 cm, 155cm, 150 cm, 151 cm, 150 cm, 149cm

अब माथिको आँकडाहरूमा हरौं । 150 cm उचाइ सबभन्दा धेरै विद्यार्थी अर्थात 3 जना विद्यार्थीहरूको छ । यो नै दिइएका उचाइहरूको रित मान हुन्छ ।

अतः रित (mode) = 150 cm

दिइएका तथ्याङ्कहरूमा सबैभन्दा बढी पटक दोहोरीएको तथ्याङ्कलाई रित (Mode) भनिन्छ । यसलाई M_O ले जनाइन्छ ।

अर्थात, खण्डित श्रेणीमा बारम्बारता तालिकामा सबैभन्दा धेरै बारम्बारता भएको तथ्याङ्क नै उक्त तथ्याङ्कको रित (Mode) हुन्छ ।

अभ्यास

1. तलका तथ्याङ्कहरूको रित **(Mode)**पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) 2, 3, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 3, 5, 5, 4, 3, 2

(ख) 3, 7, 9, 8, 8, 9, 8, 6, 5, 8

(ग) 29 cm, 34 cm, 29 cm, 26 cm, 55 cm, 34 cm, 35 cm, 40 cm, 34 cm, 56 cm

(घ) 120, 125, 130, 125, 120, 135, 120, 140

(ङ) 99 kg, 135 kg, 182 kg, 49 kg, 189 kg, 196 kg, 78 kg, 192 kg, 182 kg

2. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रित पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)	प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	6	7	9	11	5	15	2	3

(ख)	ज्याला (रु.)	50	75	100	125	150	175	200	225
	कामदार सङ्ख्या	8	12	17	29	11	27	20	30

(ग)	प्राप्ताङ्क	0	5	10	15	20	25	30	35
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	9	15	9	19	21	30	20

(घ)	x	10	12	14	16	18	20	22	24	26
	f	7	3	9	8	12	5	9	11	8

19.4 विस्तार(Range)

सँगैको तालिकामा हरौँ । त्यहा विद्यार्थीहरूको तौल दिइएको छ । तालिकाबाट सबभन्दा धेरै तौल कति छ पत्ता लगाउनुहोस् । साथै सबभन्दा कम तौल पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

विद्यार्थीहरूको तौल

26 kg, 24 kg, 10 kg, 35 kg, 32.5 kg, 29 kg, 30 kg, 42 kg, 42.5 kg,

29 kg, 24.5 kg, 22.5 kg, 42 kg, 50 kg, 50.5 kg, 22 kg, 50 kg

सबभन्दा बढी तौल =......kg   सबभन्दा कम तौल =......kg

ती तौलबिचको फरक कति छ ? पत्ता लगाउन'होस् ।

त्यो सबभन्दा ठुलो र सबभन्दा सानो तथ्याङ्कबिचको फरक नै तथ्याङ्कको विस्तार (Range) हो ।

अत: यदि H = सबभन्दा ठुलो तथ्याङ्क र L = सबभन्दा सानो तथ्याङ्क

विस्तार (Range) = H - L हुन्छ ।

अभ्यास

1. दिइएका तथ्याङ्कहरू विस्तार **(range)** पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (क) 3, 9, 7, 5, 20, 21, 20, 23, 11, 12

   (ख) 120, 130, 135, 140, 150, 115, 116, 117

   (ग) 12 ft, 15 ft, 19 ft, 14 ft, 10 ft, 8 ft, 20 ft, 11 ft

   (घ) 4.9 ft, 5.1 ft, 6.2 ft, 5.5 ft, 4.8 ft, 6.1 ft, 4.7 ft

2. यदि कक्षा 7 का विद्यार्थीहरूले अन्तिम परिक्षामा गणित विषयमा 40 र 80 को विचमा मात्र अङ्क प्राप्त गरे भने उक्त प्राप्ताङ्कहरूको विस्तार कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. तलको आँकडाबाट विस्तार पत्ता लगाउन’होस् ।

ज्याला (रु.)	500	525	540	560	575	590
कामदार (सङ्ख्या)	20	25	8	15	27	29

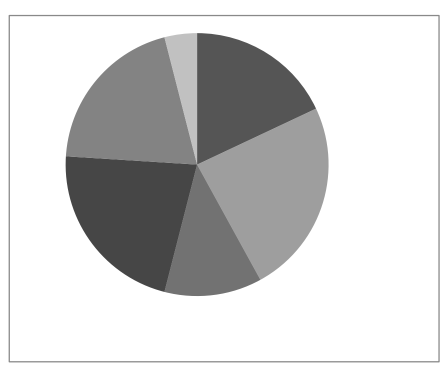
4. तलको आँकडाहरूले शान्ती मा. वि. जुम्लेटीका कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको कक्षा 7 को अन्तिम परिक्षाको प्रतिशत जनाऊछ । उक्त आँकडाहरूलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गरी रित (Mode) र विस्तार (Range) पत्ता लगाउन’होस् ।

   कक्षा 8 का विद्यार्थीहरूको प्रतिशत

   45, 40, 42, 45, 52, 55, 60, 55, 60, 72, 85, 78, 85, 75, 70,

   72, 75, 75, 82, 75, 82, 55, 60, 72, 75, 80, 85, 72, 82, 60

19.4 वृत्त चित्र (Circle Graph/ Pie Chart)



सँगैको चित्रको अध्ययन गर्नुहोस् । यसमा वृत्तको विभिन्न क्षेत्रक वा सेक्टर (Sector) मा फरक फरक मान देखाइएको छ । चित्रका बारेमा छलफल गर्नुहोस् ।

यसरी कुनै पनि तथ्याङ्कहरूलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रक वा सेक्टर (Sector) मा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्त चित्र (Pie chart) भनिन्छ ।

वृत्तचित्र बनाउने तरिका

चरण 1

वृत्तको केन्द्रमा दिइएका शीर्षकहरूको सम्बन्धित केन्द्रकोण पत्ता लगाउन'होस् ने

उदाहरणको लागि,

जम्मा रु. 20,000 खर्च छ र शिक्षामा रु. 5,000 खर्च भयो भने,

ऐकिक नियमबाट हेर्दा

रु. 20000 को 360

रु. 1 को $\frac{360}{20000}$ र

रु. 5000 को $\frac{360}{20000} \times 5000 = 90°$ हुन्छ ।

त्यसैगरी सबै कोणको मान पत्ता लगाउने ।

चरण 2. आवश्यकता अनुसारको सुहाऊदो अर्धव्यास भएको वृत्त खिच्ने

चरण 3. वृत्तमा एउटा अर्धव्यास खिची त्यसलाई आधार मानेर वृत्तको केन्द्रमा चरण 1 मा पत्ता लगाएका कोणहरू खिच्ने

चरण 4. फरक फरक भागलाई फरक फरक रङ लगाउनुहोस् । अब वृत्त चित्र तयार हुन्छ ।

उदाहरण 4.

ज्ञान ज्योति मा. वि. छहरे पानीका कक्षा 5 देखि कक्षा 10 सम्मका विद्यार्थी सङ्ख्या तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा देखाऊ ।

कक्षा	5	6	7	8	9	10	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	42	54	51	48	45	30	270

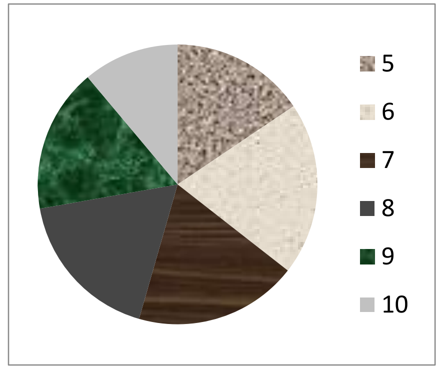
समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या= 270 जना

270 जना विद्यार्थी = 360° कोण

1 जना विद्यार्थी = कोण = कोण

कक्षा	विद्यार्थी सङ्ख्या		केन्द्रकोण
5	$42 \times \frac{360}{270}$	=	56°
6	$54 \times \frac{360}{270}$	=	72°
7	$51 \times \frac{360}{270}$	=	68°
8	$48 \times \frac{360}{270}$	=	64°
9	$45 \times \frac{360}{270}$	=	60°
10	$30 \times \frac{360}{270}$	=	40°



अभ्यास

1. कक्षा **8** का विद्यार्थीहरूलाई मनपर्ने क्रियाकलापहरू तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत तर ।

नाटक	कमेडी	नृत्य	खेल	गीत/गजल
7	8	9	10	11

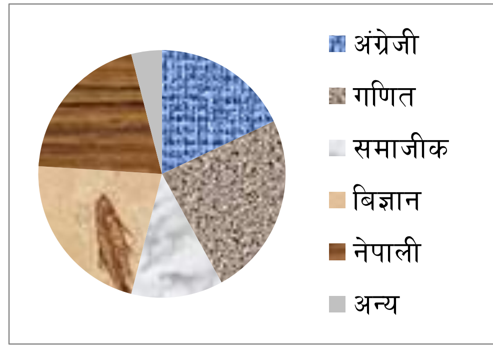
2. तलको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर ।

A+	**A**	**A-**	**B**
40	56	32	16

3. तलको तालिकामा पेम्बाको मासिक खर्च विवरण दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर ।

शीर्षक	खाना	स्वास्थ्य	यातायात	सञ्चार	मनोरञ्जन	अन्य
प्रतिशत	40%	15%	12%	10%	13%	10%

4. दिइएको चित्रमा ज्ञान ज्रयोती मा.वि का कक्षा **8** का **200** विद्यार्थीहरूको मनपर्ने विषय दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्र प्रयोग गरी केन्द्रकोणको नाप लिइ निम्न प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।



(क) गणित विषय मनपर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

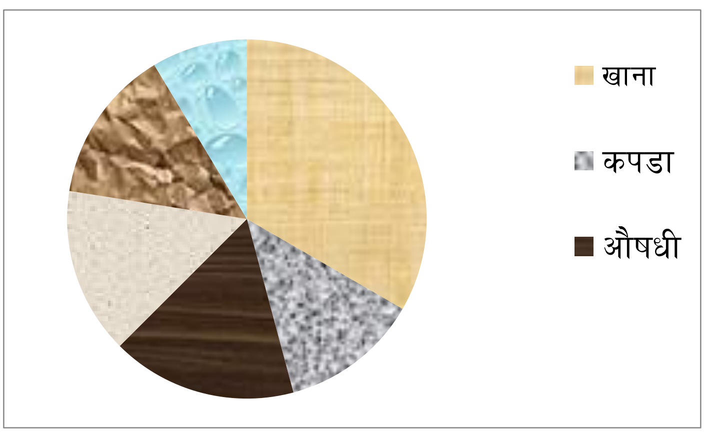
(ख) अङ्ग्रेजी विषय मनपर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) गणित र विज्ञान विषय मनपराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) गणित, विज्ञान र नेपाली बाहेकका विषय मनपराउने विद्यार्थीहरू सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) वृत्तचित्रको उपयुक्त शीर्षक के होला ?

5.



माथिको चित्रमा रमेशको परिवारको मासिक खर्च विवरणलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । चित्रमा हेरी चाँदको प्रयोग गरेर केन्द्रकोण नाप्नुहोस् । यदि रमेशको परिवारमा खानामा मासिक रु. 3500 खर्च लाग्दछ भने तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख ।

(क) औषधीमा कति खर्च लाग्ला ?

(ख) सञ्चारमा कति खर्च लाग्छ ?

(ग) रमेशको परिवारमा मासिक जम्मा खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

9.5 रेखाचित्र (Line Graph)

कुनै एउटा समय अन्तरालमा दुईचलहरूको सम्बन्ध देखाउन रेखाचित्रलाई प्रयोग गर्न सकिन्छ र यसलाई स्तम्ब रेखाचित्रको विकल्पको रूपमा लिन सकिन्छ ।

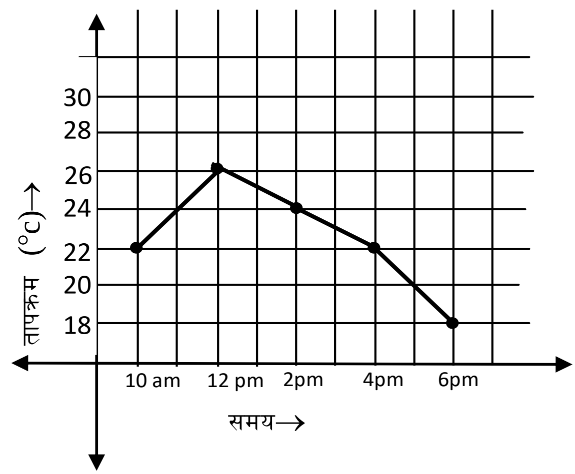
उदाहरण 1

तल दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समय	10 am	12pm	2 pm	4pm	6pm
तापक्रम	$22^{\circ}C$	$26^{\circ}C$	$24^{\circ}C$	$22^{\circ}C$	$18^{\circ}C$

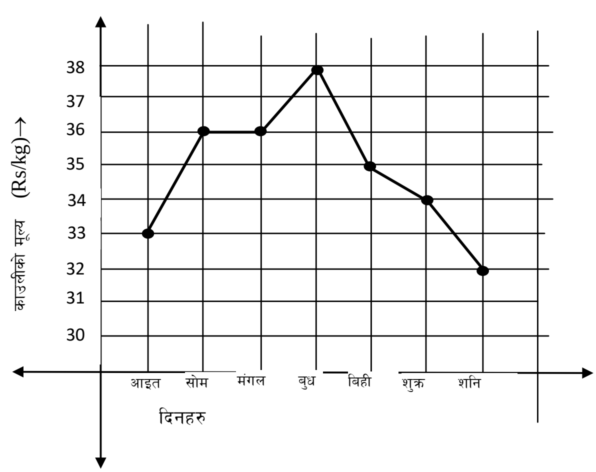
समाधान

यहाँ समयलाई X- अक्षमा र तापक्रमलाई Y- अक्षमा राखी विन्दुहरू पत्ता लगाई रेखा खिच्दा निम्नानुसारको चित्र बन्दछ ।



उदाहरण 2

काउलीको एक हप्तासम्मको मूल्यको बिवरण तलको रेखा लेखाचित्रमा दिएएको छ । रेखाचित्रको प्रयोग गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।



(क) सबैभन्दा बढी बढि मूल्य कुन बारमा कति रहेछ ?

(ख) कुन दुई बारहरमा काउलकिो मूल्य बराबर रहेछ?

(ग) प्रस्तुत रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा देखाऊ ।

समाधान

(क) सबभन्दा बढी मूल्य बुधबार रहेछ र रु 38

(ख) सोमबार र मंगलबार बराबर मूल्य रहेछ । रु. 36 प्रति केजी

(ग)

बार	आइतबार	सोमबार	मंगलबार	बुधबार	बिहीबार	शुक्रबार	शनिबार
मूल्य रु प्रति केजी	33	36	36	38	35	34	32

अभ्यास

1. तलका बारम्बारता तालिकाहरूलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर ।

(क)

कक्षा	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थी सङ्ख्या	30	40	35	44	50	45

(ख)

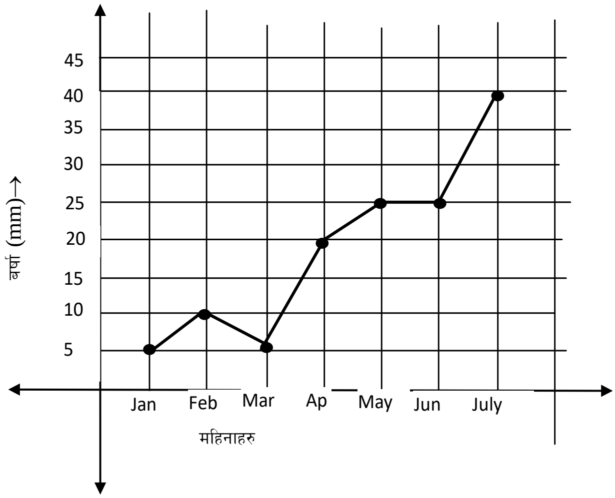
समय	6am	8am	10am	12pm	2pm	6pm
तापक्रम	10°c	12°c	18°c	25°c	25°c	17°c

3. एउटा प्रा.वि को कक्षा 1 को विगत 6 वर्षको भर्नादर यसप्रकार छ ।

वर्ष	2064	2065	2066	2067	2068	2069
भर्नादर	22	24	21	18	15	12

दिइएको आँकडालाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी रेखाको प्रकृति लेख ।

3. दिइएको रेखाचित्रमा एउटा सहरको वर्षा विबरण देखाइएको छ । यसको अध्ययन गरी तलका प्रश्नहरूको उत्तर लेख ।:



(क) सबैभन्दा कम वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?

(ख) सबैभन्दा बढी वर्षा कुन महिनामा कति भएको थियो ?

(ग) वर्षाको बिस्तार पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) रेखाचित्रलाई बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर ।

पाठ २० विजीय अभिव्यञ्जकहरू (Algebraic Expressions)

तलको अभिव्यन्जकहरूको अध्ययन गरौं ।

$x + 5$; $x^2 + 5x + 6$; $x + 6 = 2x - 7$

माथिका बिजगणितीय अभिव्यञ्जकहरू तथा समीकरणहरूमा x को मान निश्चित हुन्छ कि हुदैन होला? छलफल गरौं । कुनैपनि एक भन्दा बढी मान हुने अक्षर वा सङ्केतलाई चल (Variable) भनिन्छ भने निश्चित वा एकमात्र मान हुने सङ्केतलाई अचल (constant) भनिन्छ । जस्तै,माथिका पहिलो अभिव्यञ्जकमा xचल हो किनकी x को मान जति पनि राख्न सकिन्छ भने 5 अचल हो किनकी 5 को मान निश्चित हुन्छ । चल र अचल बिच गणितीय चार क्रियाहरू (+,-., ×,÷) गरी बन्ने अभिव्यञ्जकहरूलाई बिजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression) भनिन्छ । अभिव्यञ्जकमा भएको चलको सबभन्दा ठूलो घाताङ्कलाई उक्त अभिव्यञ्जकको डिग्री भनिन्छ । जस्तै, $x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ को डिग्री 3 हुन्छ । बिजीय अभिव्यञ्जकमा भएका पदहरूको सङ्ख्याका आधारमा उक्त बिजीय अभिव्यञ्जकको नामाकरण गरिन्छ । यदि बिजीय अभिव्यञ्जकमा एउटा मात्र पद भए उक्त बिजीय अभिव्यञ्जकलाई एकपदीय अभिव्यञ्जक (Monomial), दुइओटा पदहरू भए द्विपदीय अभिव्यञ्जक (Binomial), तीनओटा पदहरू भए त्यो त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (Trinomial) हुन्छ । त्यस्तै, दुई वा सो भन्दा बढी पदहरू भएमा बहुपदीय अभिव्यञ्जक (Polynomial) भनिन्छ । जस्तै$x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ एउटा बहुपदीय अभिव्यञ्जक हो ।

यसरी विभिन्न बिजीय अभिव्यञ्जकहरू तथा तिनीहरूको जोड, घटाऊ, गुणन तथा भागको बारेमा हामीले पहिले नै अध्ययन गरिसकेका छौं । अब हामी अब हामी बिजीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरणका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।

20.1 खण्डीकरण (Factorization)

तलका उदाहरणहरू अध्ययन गरौं :

(क) $5 \times 3 = ...$ (ख) $x \times (x+4) = x^2 + 4x$

(ग) $(x-3)(x+2) = x(x+2) - 3(x+2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$

माथिको उदाहरण (क) मा 5 र 3 गुणन गर्दा 15 हुन्छ तसर्थ 15 को गुणनखण्डहरू 5 र 3 हुन् ।

त्यस्तै, उदाहरण (ख) र (ग) मा $x^2 + 4x$ र $x^2 - x - 6$ का गुणनखण्डहरू के के होलान् ? छलफल गरौं ।

कुनै बिजीय अभिव्यञ्जकलाई अन्य रुढ गुणनखण्डहरूको गुणनको रुपमा रुपान्तरण गर्ने प्रकृयालाई उक्त अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण (factorization) भनिन्छ ।

जस्तै, $7x + x^2 = x(7+x)$ किनकी दुबैमा x साझा छ ।

$4x^2+8x = 4x\ (x+2)$ किनकीदुबैमा $4x$ साझा छ ।

20.1.1 साझा लिएर र पद एकत्रित गरेर खण्डीकरण

कुनै बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा साझा गुणनखण्ड भएमा त्यसलाई साझा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ ।

जस्तै, $6xy^2+ 3x^2y =3xy(2y+x)$ हुन्छ ।

त्यस्तै, बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा सबै पदहरूमा साझा गुणनखण्ड नभएमा साझा गुणनखण्ड भएका पदहरूलाई एकत्रित गरि साझा लिएर खण्डिकरण गरिन्छ ।

जस्तै, 2ab+ 3+ 6a+ bलाइ पद एकत्रित गर्दा 2ab+6a+b+3 हुन्छ । पहिलो दुइ पदमा 2a र दोस्रो दुइ पदबाट 1 साझा लिदा,

$= 2a(b+3) +1(b+3)$

$= (2a+1)(b+3)$

उदाहरण 1

तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्नुहोस् ।

(क) $4x^2+12xy$

समाधान

यहाँ, $4x^2+12xy$

$= 4x.x +4.3.x.y$ [दुवैमा $4x$ साझा छ]

$=4x(x+3y)$

(ख) $a^2-15b-5a+3ab$

समाधान

यहाँ, $a^2-15b-5a+3ab$

साझा आउने पदहरू मिलाउँदा,

$a^2-5a+3ab-15b$

$= a(a-5)+3b(a-5)$ [पहिलो दुई पदबाट a र दोस्रो दुई पदबाट 3b साझा लिदा]

$= (a+3b)(a-5)$

अभ्यास

1. **तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्नुहोस् ।**

(क) $6x+3$ (ख) x^2+4x (ग) $12a+3b$ (घ) $12p^2+6q^2$

(ङ) $14xy+7y$ (च) $x+x^3$ (छ) $12x^2+xy+xz$ (ज) x^3+x^2+x

(झ) $2x^2-2x^3+8x^4$

2. **पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्नुहोस् ।**

(क) $ax+bx+ay+by$ (ख) $2ab+a^2b-2b-ab$ (ग) $x^2y-xy+2x^2y-2xy$

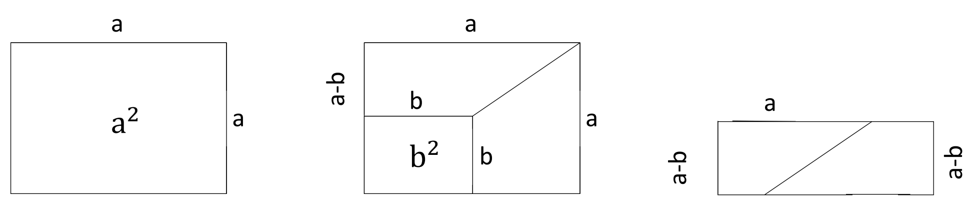
(घ) $x^2+ 3x+ xy + 3y$ (ङ) $2ab+3a+2b^2+3b$ (च) $a-b+a^2-ab$

(छ) $2a^2 + 5a -6a -15$) (ज) $2xa-x^2a+2a-ax$

(झ) $x^2 y+4xy -xy^2 -4y^2$ (ञ) $3x (x +y) + 3y (x+y)$

(ट) $2x^2+3ax +2ax +3a^2$

20.1.2.दुई वर्ग बिचको फरकको खण्डीकरण (a^2-b^2)



चित्र क चित्र ख चित्र ग

1. चित्रमा देखाएजस्तै लम्बाइ र चौडाइ a cm भएको एउटा वर्ग खिच्ने र दुवैतिर b cm घटाई अर्को सानो वर्ग बनाऔं । त्यो सानो वर्ग बाहेकको भागमा छाँया पार्ने । (चित्र क)
2. चित्र (ख) मा देखाएजस्तै A, B, र C भागहरू कैचीले काट्ने ।
3. चित्रमाA र B लाई मिलाउदा कस्तो आकृति बन्छ ? (चित्र ग)

4. चित्र (ग) को लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ? यसको क्षेत्रफल कति होला ?

चित्र (क) मा छाँया पारेको भाग र चित्र (ग)मा के फरक छ ?

यहाँ, चित्र (क) मा ठुलो वर्गको क्षेत्रफल = a^2 र सानो वर्गको क्षेत्रफल = b^2 हुन्छ भने छाँया पारेको भागको क्षेत्रफल = $a^2 - b^2$ हुन्छ ।

त्यस्तै, चित्र (ग) को क्षेत्रफल = (a+b) x (a-b) { आयत भएकोले }

तसर्थ $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $9a^2-16b^2$

समाधान

यहाँ, $9a^2-16b^2$

$= (3a)^2-(4b)^2$

सूत्र प्रयोग गर्दा,

$= (3a-4b)(3a+4b)$

(ख) $25x^2-49y^2$

समाधान

यहाँ, $25x^2-49y^2$

$= 25x^2 - 49y^2$

$= (5x)^2-(7y)^2$

$= (5x-7y)(5x+7y)$

(ग) $5a^2-45b^2$

समाधान

यहाँ, $5a^2-45b^2$

$= 5(a^2-9b^2)$

$= 5\{a^2-(3b)^2\}$

$= 5(a-3b)(a+3b)$

अभ्यास

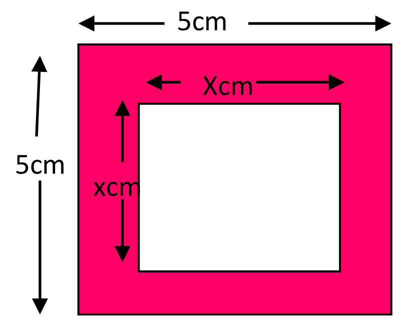
1. a^2-b^2 **को सूत्र प्रयोग गरी खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) x^2-9b^2 (ख) a^2-4b^2 (ग) $81x^2-y^2$ (घ) $5x^2-20y^2$

(ङ) $13a^2-117b^2$ (च) $72-2b^2$ (छ) $121-25y^2$ (ज) $81-64y^2$

(झ) $4x^3y-81xy^3$ (ञ) $169-196z^2$ (ट) ab^3-9a^3b (ठ) $zx^2- zy^2$

2. दिइएको चित्रमा छाँया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?



बिजीय अभिव्यञ्जकको रूपमा लेख्नुहोस् ।

यदि x को मान 4 भए छाँया पारेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?

3. 2y मीटर लम्बाइ भएको वर्गाकार बगैंचाको बिचमा 6 मीटर किनारा भएको वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरी बाहेकको बगैंचाको क्षेत्रफल कति होला ?

20.1.3.पूर्ण वर्ग हुने त्रिपदीयको खण्डीकरण

$(a+b)^2$ को बिस्तारित रूप के होला ?

$(a-b)^2$ को बिस्तारित रूप के होला ?

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ र $(a-b)^2 = a^2-2ab+b$ हुन्छ ।

यसका बारेमा हामीले अघिल्ला कक्षामा अध्ययन गरी सकेका छौं ।अब हामी पूर्णवर्गको खण्डिकरण कसरी गर्ने भन्ने बारे छलफल गर्दछौं। तलको उदाहरणहरूको अध्ययन गरौं ।

उदाहरण 1

तलका अभिव्यञ्जकहरूमा खाली ठाँऊ भरि पूर्ण वर्ग बनाउनुहोस् ।

(क) x^2+…………+36 (ख) $49a^2$ - …. $+36b^2$

समाधान

(क) यहाँ,

$x^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+36$

$= x^2+\ldots\ldots\ldots+(6)^2$..........................(i)

अब (i) लाई $a^2 + 2ab + b^2$ सँग तुलना गर्दा

$a = x, b = 6$

तसर्थ, $2ab = 2 . x . 6 = 12x$

त्यसकारण, $x^2+ 12x +36 = (x + 6)^2$ भयो ।

निष्कर्ष : $x^2 + \ldots\ldots + 36$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $12x$ थप्नुपर्छ ।

(ख) यहाँ,

$49a^2-\ldots\ldots\ldots\ldots+36b^2$

$=(7a)^2-\ldots\ldots\ldots+(6b)^2$..........................(i)

अब, $a^2-2ab+b^2$ सँग तुलना गर्दा

$a = 7a, b = 6b$; $2ab = 2.7a.6b = 84ab$ हुन्छ

अत: $49a^2-84ab+36b^2= (7a - 6b)^2$

निष्कर्ष : $49a^2 - \ldots\ldots + 36b^2$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $84ab$ थप्नुपर्छ ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $4x^2+20xy+25y^2$

समाधान

यहाँ, $4x^2+20xy+25y^2$

$a^2+2ab+b^2$ को ढाँचामा लैजादा

$= (2x)^2+2.2x.5y+(5y)^2$

$= (2x+5y)^2$

(ख) $36a^2-48ab+16b^2$

समाधान

यहाँ, $36a^2-48ab+16b^2$

$a^2+2ab+b^2$ को ढाँचामा लैजादा

$= (6a)^2-2.6a.4b+(4b)^2$

$= (6a-4b)^2$

अभ्यास

1. **खाली ठाँउमा उपयुक्त पद भरी पूर्ण वर्ग बनाउनुहोस् ।**

(क) $x^2+.......+16$ (ख) $......+40xy+25y^2$ (ग) $p^2-.....+36$

(घ) $9a^2-72ab+........$ (ङ) $25p^2-......+49q^2$ (च) $4p^2+56pq+....$

(छ) $225x^2-.....+64y^2$ (ज) $.......+10x+25x^2$ (झ) $.......-42mn+9n^2$

2. **खण्डीकरण गर्नुहोस् ।**

(क) $a^2+12a+36$ (ख) $y^2+14y+49$ (ग) $p^2+22p+121$

(घ) $4x^2+20x+25$ (ङ) $9k^2+60k+100$ (च) $36t^2+84t+49$

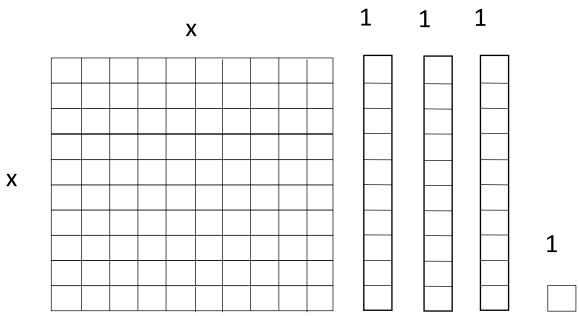
(छ) $y^2-8y+16$ (ज) $x^2-18x+81$ (झ) $p^2-26p+169$

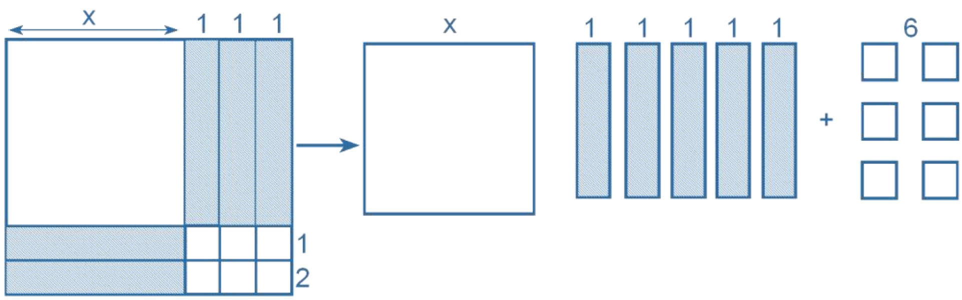
(ञ) $9a^2-30a+25$ (ट) $25y^2-60y+36$ (ठ) $49r^2-70r+25$

(ड) $4p^2+24pq+36q^2$ (ढ) $9a^2+42ab+49b^2$ (ण) $25a^2-40ab+16b^2$

20.1.4. $x^2 + bx + c$ स्वरूपको खण्डीकरण

सँगैको चित्रहरूको अवलोकन गरौं ।





चित्रबाट के के देखिन्छ, छलफल गरौं ।

$x^2+xa+xb+ab$ लाई खण्डीकरण गर्दा $x(x+a)+b(x+a)$ हुन्छ ।

अतः $x^2 + bx + c$ को खण्डीकरण गर्दा c का दुई ओटा गुणनखण्ड पत्तालगाउने ।

जस्तै, r र sजसमा $r + s = b$ र $r \times s = c$ हुनुपर्छ ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^2+12x+32$

समाधान

यहाँ, $x^2+12x+32$

$= x^2+(8+4)x+32$

$= x^2+8x+4x+32$

$= x(x+8)+4(x+8)$

$= (x+4)(x+8)$

(ख) $x^2-5x-24$

समाधान

यहाँ, $x^2-5x-24 = x^2-(8-3)x-24$

$= x^2-8x+3x-24$

$= x(x-8)+3(x-8)$

$= (x-8)(x+3)$

अभ्यास

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

क) a^2+4a+3	ख) x^2+7x+6	ग) k^2-4k-5
(घ) $b^2-11b-26$	(ङ) $p^2+7p-30$	(च) x^2-x-30
(छ) $p^2-8p-33$	(ज) $a^2+14a+48$	(झ) $x^2+10x+24$
(ञ) $x^2+11x-26$	(ट) $y^2-14y+24$	(ठ) $r^2-2r-15$
(ड) $y^2+2y-15$	(ढ) x^2-6x+8	(ण) $a^2-13a-48$
(त) $x^4+12x^3+32x^2$	(थ) a^3+12a^2+11a	(द) $4b^3-8b^2-12b$

20.1.5. $ax^2 \pm bx \pm c$ स्वरूपको खण्डीकरण

ax^2+bx+c मा सर्वप्रथम a र c को गुणा गर्ने र गुणनफलको दुईओटा गुणनखण्ड r र s पत्ता लगाउने जसको जोड वा घटाउ b हुन्छ । त्यसलाई तलको तालिकाबाट देखाउन सकिन्छ ।

अभिव्यञ्जक		r र s को चिह्न	
ax^2+bx+c	+	$r+s = b$	दुवै + ve
ax^2+bx-c	-	$r-s = b$	ठूलो + ve
ax^2-bx+c	+	$-r-s = -b$	दुवै - ve
ax^2-bx-c	-	$-r+s = -b$	ठूलो - ve

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $6x^2+17x+12$

समाधान

यहाँ, $a = 6, c = 12, b = +17$

$a.c = 6x12 = 72$

$=6x^2+9x+8x+12$

$= 3x(2x+3) +4(2x+3)$

$= (2x+3) (3x+4)$

(ख) $3x^2-11x-20$

समाधान

यहाँ, $a = 3, b = -11$ र $c = -20$

$a.c = -60$

$= 3x^2-15x+4x-20$

$= 3x(x-5)+4(x-5)$

$= (3x +4) (x-5)$

अभ्यास

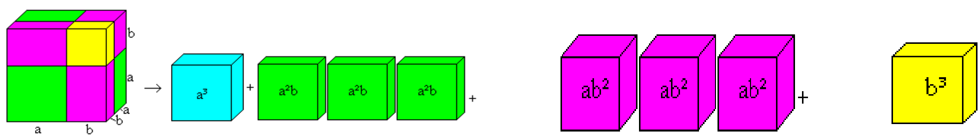
खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $3a^2+5a+2$
(ख) $3p^2-4p+1$
(ग) $7x^2-30x+8$
(घ) $4y^2-8y+3$
(ङ) $15y^2-13y+2$
(च) $12x^2-32x+5$
(छ) $5b^2-14b-3$
(ज) $10x^2-3x-1$
(झ) $15q^2-13q+2$
(ञ) $6b^2-4b-10$
(ट) $21t^2+25t+4$
(ठ) $12a^2+28ab-5b^2$
(ड) $16a^2+24ab+9b^2$
(ढ) $6x^2+xy-7y^2$
(ण) $3x^2-xy-10y^2$

20.1.6. $(a\pm b)^3$ को ज्यामितीय अवधारण

I. $(a+b)^3$ को ज्यामितीय अवधारणा

1. एउटा साबुन या काठको घनाकार वस्तु लिनुहोस् जसमा प्रत्येक भुजाको लम्बाइलाई a र b मा बाड्नुहोस् ताकी सबै भुजाको लम्बाइ (a+b) हुन्छ ।
2. चित्रमा देखाए जस्तै उक्त घनाकार वस्तुलाई 8 ओटा टुक्रामा काटौं ।
3. सबै टुक्राहरूको छुट्टाछुट्टै आयतन पत्ता लगाऔं ।



a^3 $3a^2b$ $3ab^2$ b^3

अब घनको आयतन =सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल हुन्छ ।

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + a^2b + a^2b + a^2b + ab^2 + ab^2 + ab^2$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

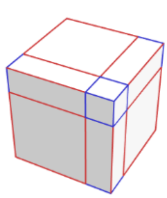
$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$ (दुबै पदमा 3ab साझा भएकोले)

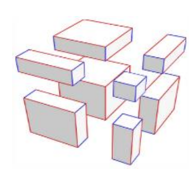
$\therefore (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

$(a-b)^3$को अवधारणा

1. चित्रमा देखाएजस्तै सबै भुजा a भएको एउटा घनाकार वस्तु लिऔं ।
2. त्यसलाई प्रत्येक भुजामा b घटाएर रेखा तानौ र र चित्रमा देखाएजस्तै 8 ओटा टुक्रामा काटौं ।
3. सबै टुक्राहरूको छुट्टाछुट्टै आयतन निकालौं ।





a^3 a^2b ab^2 b^3

अब, a किनारा भएको पुरा घनको आयतन = सबै टुक्राहरूको आयतनको योगफल

$a^3 = (a-b)^3 + (a-b)^2b + (a-b)^2b + (a-b)^2b + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + (a-b)b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + 3(a-b)^2. b + 3(a-b).b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + (a^2-2ab+b^2).b + 3(a-b)b^2 + b^3$

$= (a-b)^3 + 3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 – 3b^3 + b^3$

$a^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

अथवा, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ (3ab दुवैमा साझा भएकाले)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

फेरि, $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$

अथवा, $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ र

$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$ हुन्छ ।

नोट 1. $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$

$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ हुन्छ ।

2. $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$

$= a^3 - b^3$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

घन पत्ता लगाउनुहोस् । (सूत्र प्रयोग गरेर) :

(क) $(x+2)$

समाधान

यहाँ, (x+2) को घन

$= (x+2)^3$

हामीलाइ थाहा छ , $(a+b)^3 = a^3+3a^2b + 3ab^2 + b^3$

तसर्थ,$(x+2)^3 = x^3+3.x^2.2+3.x^2.2^2+2^3$

$= x^2+6x^2+12x+8$

(ख) (x-3)

समाधान

यहाँ, (x-3) को घन

$= (x-3)^3$

$= x^3 - 3.x^2.3+3.x\ 3^2 - 3^3$

$= x^3-9x^2+27x-27$

उदाहरण 2

यदि (a+b)= 5 र a.b = 6 भए a^3+b^3 को मान कति होला ?

समाधान

यहाँ, (a+b) = 5, ab=6

$a^3+b^3= ?$

हामीलाई थाहा छ, $a^3+b^3 = (a+b)^3- 3ab(a+b)$

$= 5^3- 3.6(5)$

$= 125- 90 = 35$

उदाहरण 3

सरल गर :

$(x+y)^3- (x-y)^3$

समाधान

यहाँ, $(x+y)^3- (x-y)^3$

$= x^3+ 3x^2y+ 3xy^2 + y^3– (x^3-3x^2y+3xy^2- y^3)$

$= x^3+ 3x^2y+ 3xy^2+ y^3 – x^3+3x^2y-3xy^2+ y^3$

$= 6x^2y+2y^3$

$= 2y(3x^2+y^2)$

अभ्यास

1. **सूत्र प्रयोग गरी तलका अभिव्यञ्जकहरूको घन पत्ता लगाउन'होस् :**

(क) $(y-2)$ (ख) $(x+3)$ (ग) $(3x+4)$ (घ) $(2x-5)$

(ङ) $(4-3b)$ (च) $(2a+3b)$ (छ) $(2a+3b)$ (ज) $(1+3t)$

2. **तलका घनहरूको विस्तारित रूप लेख :**

(क) $(3x-2y)^3$ (ख) $(x^2+y)^3$ (ग) $(a^2+b^2)^3$ (घ) $(4a-b)^3$

3. **तलका अभिव्यञ्जकहरूलाई** $(a+b)^3$ **को स्वरूपमा लेख्नुहोस् :**

(क) $8a^3+18a^2b+27ab^2+27b^3$ (ख) $64x^3+240x^2y+300xy^2+125y^3$

4. **यदि** $(x-y) = 6$ र $x.y = 10$ **भए** x^3-y^3 **को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।**

5. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) a^3-8 (ख) $27x^3+64y^3$ (ग) $125p^3-216$

(घ) $512+343b^3$

6. यदि $x+\frac{1}{x}=8$ भए $x^3+\frac{1}{x^3}$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. यदि $a+b=4$ र $ab=3$ भए $a^3+b^3=?$

8. यदि $2x-y=7$ र $2xy=5$ भए, $8x^3-y^3$ को मान कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. **सरल गर्नुहोस् :**

(क) $a^3+b^3-(a+b)^3$ (ख) $(y+a)^3+(y-a)^3$

(ग) $(x^3-y^3)-(x-y)^3$ (घ) $(a+b)^3-3ab(a+b)$

(ङ) $(x-y)^3+3xy(x+y)$ (च) $(p+q)^3-p^3-q^3$

पाठ २१

बिजीय अभिव्यञ्जकहरूको महत्वम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य (HCF and LCM of Algebraic Expressions)

21.1 महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

दुई सङ्ख्याहरू 15र 18 लिनुहोस् र तिनीहरूका गुणनखण्डहरू निकाल्नुहोस् ।

15 का गुणनखण्डहरू 1, 3, 5, 15र

18 का गुणनखण्डहरू 1, 2, 3, 6, 9,18 हुन्छन् ।

15 र 18 का गुणनखण्डहरूमध्ये सबभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड कुन हो ? त्यो नै 15र 18 को महत्तम समापर्वतक हो । यहाँ, 15 र 18 को सबभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड 3 हो ।

तसर्थ, 15 र 18 को म.स 3 भयो । यसरी नै कुनैपनि बिजगणितिय अभिव्यञ्जकहरूको पनि म.स. पत्ता लगाउन सकिन्छ कि समूहमा छलफल गरी तलका उदाहरणहरूको अवलोकन गरौं ।

यहाँ, $3x^2y$ र $6xy^2$ मा हेरौं ।

$3x^2y = 3.x.x.y$ र $6xy^2 = 2.3.x.y.y$ हुन्छ ।

यी दुई अभिव्यञ्जक बिचमा साझा गुणनखण्डहरू 3, x र y छन् ।

त्यसकारण, $3x^2y$ र $6xy^2$ को म.स $3xy$ हुन्छ ।

दिइएका बिजीय अभिव्यञ्जकहरूको सबभन्दा ठुलो साझा अभिव्यञ्जक (गुणनखण्ड) लाई ती अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स (HCF) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

x^2-4 र x^2+4x+4 को म.स पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2-4$

$= x^2-2^2$

$= (x-2)(x+2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2+4x+4$

$= x^2+2.2x+2^2$

$= (x+2)^2$

$= (x+2)\ (x+2)$

$\therefore$ म.स.= दुइओटै अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्ड $= (x+2)$

त्यसकारण, x^2-4 र x^2+4x+4 को म.स $(x+2)$ **हुन्छ ।**

उदाहरण 2

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको म. स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

$(x-a)$, x^2-a^2 र $x^2-2ax+a^2$

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $= (x-a)$

दोस्रो पद $= x^2- a^2 = (x-a)\ (x+a)$

तेस्रो पद $= x^2-2ax+a^2 = (x-a)^2 = (x-a)\ (x-a)$

$\therefore$ म.स.= सवै अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्ड $= (x-a)$

अभ्यास

1. **महत्तम समापवर्तक (म.स) पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $4x^2y$ र xy^2

(ख) $9x^2y^3$ र $15xy^2$

(ग) a^2bc, b^2ac र c^2ab

(घ) x^2-4 र $3x+6$

(ङ) x^2-y^2 र $xy-y^2$

(च) $p^2q- q^2p$, $2p^2-2pq$

(छ) $3a+b$ र $15a+5b$

(ज) $x^2+2xy+y^2$ र x^2-y^2

(झ) $x^2-11x+30$ र x^2-36

(ञ) x^3-9 र x^2-6x+9

(ट) $x^2+16x+60$ र $x^2+20x+100$

(ठ) a^2+5a+6 र a^2+a-6

(ड) $x^2-11x+10$ र x^3-x

(ढ) $a^2-2ab+b^2$ र $a^4- b^4$

2. **म.स पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $(x-y)$, x^2-y^2 र $x^2-2xy+y^2$

(ख) x^2-y^2, x^2-xy र x^2y-y^2x

(ग) x^3-xt^2, x^2+xt र x^2t+xt^2

(घ) x^2+5x+6, x^2+x-6 र x^2-9

(ङ) a^2+2a-3, a^2-3a+2 र a^2-1

(च) x^2+4x+4, र $x^2+7x+10$

(छ) x^3+2x^2-15x, $x^2-7x+12$

(ज) $3a^2-2a-8$ र $2a^2-9a+10$

लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

8 र 12 का अपवर्त्यहरू लेख

8 का अपवर्त्यहरू $(M_8) = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80\ldots\ldots\}$

12 का अपवर्त्यहरू $(M_{10}) = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84\ldots\ldots\}$

अब 8 र 12 का साझा अपवर्त्यहरू कुन कन् हुन् ? र सबभन्दा सानो साझा अपवर्त्य पत्ता लगाउनुहोस् । त्यो नै 8 र 12 को लघुत्तम समापवर्त्य हो । यहाँ, 8 र 12 को सबभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 24हो ।

त्यसकारण, 8 र 12 लघुत्तम समापवर्त्य 24 हो ।

फेरि, $8x^2$ र $12x^3$ मा हेरौं ।

8 र 12 को साझा अपवर्त्यहरू $\{24, 48, 72, \ldots.\}$

सबभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 24 हो ।

त्यस्तै, x^2र x^3को साझा अपवर्त्यहरू x^3, x^4, x^5, x^6, ….. हुन् र सबभन्दा सानो साझा अपवर्त्यहरू x^3 हो ।

$8x^2$ र $12x^3$ ले भाग जाने सबभन्दा सानो अपवर्त्य $24x^3$ हुन्छ ।

त्यसकारण, $8x^2$ र $12x^3$ को लघुत्तम समापवत्य (ल.स.) पनि $24x^3$ हुन्छ ।

अर्को तरिका :

$8x^2 = 2\times2\times2\times x\times.x$

$12x^3 = 2\times2\times3\times x\times x\times x$

साझा गुणनखण्डहरू $= 2\times2\times x\times x = 4x^2$

बाकी गुणनखण्डहरू $= 2\times3\times x = 6x$

ल.स.= साझा गुणनखण्डहरू x बाँकी गुणखण्डहरू

$= 4x^2 \text{ x } 6x \qquad = 24x^3$

दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्डहरू र बाँकी गुणखण्डहरूको गुणनफल उक्त अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (lowest common multiple) हो । दुई वा दुईभन्दा बढी व्जिीय अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य भनेको ती अभिव्यजकहरूले नि:शेष भाग जाने सबभन्दा सानो बिजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरिमा ल.स. (LCM) लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

ल.स.निकाल्नुहोस् :

क) x^2-x-20 र x^2-25

समाधान

पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2-x-20 = x^2-5x+4x-20$

$= x(x-5)+4(x-5)$

$= (x+4)(x-5)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2-25 = x^2-5^2$

$= (x-5)(x+5)$

दुवै अभिव्यञ्जकमा साझा गुणनखण्ड $= (x-5)$

अब, ल.स. = साझा गुणनखण्डहरू x बाँकी गुणन खण्डहरू

$= (x-5)(x+5)(x+4)$

$= (x^2-25)(x+4)$

$\therefore$ ल.स.$=(x^2-25)(x+4)$.

(ख) $4x^2+12xy+9y^2$, $4x^2-9y^2$ र $4x^2-12xy+9y^2$

समाधान

पहिलो अभिव्यञ्जक $= 4x^2+12xy+9y^2$

$= (2x)^2 +2.2x.3y+(3y)^2$

$= (2x +3y)^2$

$= (2x+3y)(2x+3y)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 4x^2-9y^2= (2x)^2-(3y)^2$

$= (2x+3y)(2x-3y)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= 4x^2-12xy+9y^2$

$= (2x)^2 -2.2x.3y+(3y)^2$

$= (2x -3y)^2$

$= (2x-3y)(2x-3y)$

अब, ल.स. = साझा गुणनखण्डहरू × बाँकी गुणन खण्डहरू

$= (2x+3y)^2(2x-3y)^2$

∴ ल.स. $= (x^2 - 25)(x+4)$

अभ्यास

1. **ल.स. पत्ता लगाउन'होस् :**

(क) $2x$ र $4y$

(ख) $5xy$ र $15xy^2$

(ग) $3xy$ र $15y^2$

(घ) $7a^2b$ र $21ab^2$

(ङ) $2p$र $2p+4$

(च)$5x^2-5$ र x^2-1

(छ) $x+y$र x^2+xy

(ज) x^2+4x+4 र x^2+2x

(झ) $5x-20$ र x^2-16

(ञ)a^2-ab र $ab-b^2$

(ट) $3x^3+15x^2$र $2x^3-50x$

(ठ) x^3-4x र $x^2+7x+10$

(ड) $3x^2+7x+2$ र $2x^2+3x-2$

(ढ) $y^2+2y-48$ र $y^2-9y+18$

(ण) $a^2+4ab+4b^2$र a^2-4b^2

(त) $9x^2-24xy+16y^2$ र $3x^2-xy-4y^2$

2. **ल.स. निकाल :**

(क) $4x^2y$, $6xy$ र $8xy^2$

(ख) x^2-2x, $x-2$ र $x+2$

(ग) x^2-xy, x^2-y^2 र $xy-y^2$

(घ) p^2-q^2, $p^2-2pq+q^2$ र p^2q-pq^2

(ङ) a^2-1, a^2+a-2 र a^2-2a+1

(च) x^2-4, x^2+4x+4 र x^2+3x+2

पाठ २२ अनुपातिक बिजीय अभिव्यञ्जकहरू
(Rational Algebraic Expressions)

अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरू (Rational Expressions)

दिइएका सङ्ख्याहरूको बारेमा छलफल गरौं ।

$$4, \frac{4}{7}, \frac{4x}{5y}$$

पहिलो र दोस्रो सङ्ख्या अनुपातिक सङ्ख्या हुन् । त्यस्तै, तेस्रो अनुपातिक हो, जसमा हर र अंश दुबैमा चलराशी छ । तसर्थ हर र अंश दुवै बिजीय अभिव्यञ्जक हुन् । यसलाई अनुपातिक अभिव्यञ्जक भनिन्छ । यदि कुनैपनि अभिव्यञ्जकको हर र अंश दुवैमा विजीय अभिव्यञ्जकहरू छन् भने त्यस्तो अभिव्यञ्जकलाई अनुपातिक अभिव्यञ्जक (Rational Expression) भनिन्छ ।

जस्तै : $\frac{4x}{5y}, \frac{4x-3y}{5x-6y}, \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ आदि ।

नोट यदि अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको हरमा भएको अभिव्यञ्जकको मान शून्य (0) छ भने उक्त अनुपातिक अभिव्यञ्जक अपरिभाषित हुन्छ ।

जस्तै : $\frac{3x+2}{2x-6}$ मा $x = 3$ भएमा, $\frac{3x^2+2}{x^2-a^2}$ मा $x = a$ भएमा यिनीहरू अपरिभाषित हुन्छ ।

अनुपातिक अभिब्यञ्जकको सरल गर्ने तरिका

- हर र अंश दुवैलाई छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- हर र अंशका साझा अभिव्यञ्जक हटाउने र सरल गर्ने

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{3x^2+2xy}{3x+2y}$

समाधान

यहाँ, $\frac{3x^2+2xy}{3x+2y}$

$= \frac{x(3x+2y)}{3x+2y}$

$$=\frac{x\cancel{(3x+2y)}}{\cancel{3x+2y}} = x$$

(ख) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$

$$=\frac{x^2+2x+3x+6}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x(x+2)+3(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{(x+2)}(x+3)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{x+3}{x+2}$$

अभ्यास

1. x **को मान कति राख्दा तलका अभिव्यञ्जकहरू परिभाषित हुँदैनन् ?**

(क) $\frac{x+3}{x+2}$ (ख) $\frac{3x^2+2xy}{x-7}$

(ग) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-4x+4}$ (घ) $\frac{5x+7}{x^2-9}$

(ङ) $\frac{3ab}{a^2-x}$ (च) $\frac{3x^2+6}{2x+14}$

2. **सरल गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{2x^2-5x}{2x-5}$ (ख) $\frac{x^2+7x+12}{x^2+6x+9}$

(ग) $\frac{x^2-5x-14}{x^2-25}$ (घ) $\frac{x^2+3x+1}{x^2+4x+4}$

(ङ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$ (च) $\frac{2x^2-13x+6}{x^2-144}$

(छ) $\frac{3x^2-75}{x^2-7x+15}$ (ज) $\frac{4x^2-20x+25}{20x^2-125}$

समान हर भएका अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड र घटाऊ

(Addition and Subtraction of Rational Expressions having Same Denominator)

यदि अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको जोड वा घटाउ गर्दा अनुपातिक सङ्ख्याको जस्तै तरिकाले गर्न सकिन्छ ।

हर उहि छ भने अंशहरूको मात्र जोड वा घटाउ गरिन्छ । हरलाई जस्ताको तस्तै राख्ने र सरल गरी न्यूनतम पदमा लैजानु पर्दछ ।

तलका उदाहरणहरूको अध्ययन गरौँ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{3ax}{a+x}+\frac{3a^2}{a+x}$

समाधान

यहाँ, $\frac{3ax}{a+x}+\frac{3a^2}{a+x}$

$=\frac{3ax+3a^2}{a+x}$

$=\frac{3a\,(x+a)}{a+x}$ [किनकी $x+a=a+x$]

$=3a$

(ख) $\frac{4x^2}{2x-3y}-\frac{12xy-9y^2}{2x-3y}$

समाधान

यहाँ, $\frac{4x^2}{2x-3y}-\frac{12xy-9y^2}{2x-3y}$

$=\frac{4x^2-12xy+9y^2}{2x-3y}$

$=\frac{(2x-3y)^2}{2x-3y}$

$=2x-3y$

(ग) $\frac{p^2}{p^2+5p+6} + \frac{2p}{p^2+5p+6}$

समाधान

यहाँ, $\frac{p^2}{p^2+5p+6} + \frac{2p}{p^2+5p+6}$

$= \frac{p^2+2p}{p^2+5p+6}$

$= \frac{p(p+2)}{p^2+3p+2p+6}$

$= \frac{p(p+2)}{p(p+3)+2(p+3)}$

$= \frac{p(p+2)}{(p+2)(p+3)}$

$= \frac{p}{(p+3)}$

अभ्यास

1. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{p^2}{3p} + \frac{q^2}{3p}$ (ख) $\frac{p}{(p+3)} - \frac{p}{(p+3)}$ (ग) $\frac{2x+1}{3x} - \frac{1}{3x}$

(घ) $\frac{y^2}{y+1} - \frac{1}{y+1}$ (ङ) $\frac{3}{(x+3)} + \frac{x}{x+3}$ (च) $\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x+1}{x-1}$

2. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2}{5} + \frac{5}{x}$ (ख) $\frac{a+2}{7} - \frac{a-2}{7}$ (ग) $\frac{2x+3}{2x} - \frac{3}{2x}$

(घ) $\frac{x^2+2x+3}{x+1} - \frac{2}{x+1}$ (ङ) $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-1}$ (च) $\frac{x^2-7x+7}{x+7} + \frac{5x+1}{x+7}$

(छ) $\frac{x^2+5x+7}{x+2} - \frac{1}{x+2}$ (ज) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{4}{x^2+2x+1}$

(झ) $\frac{x^2-7x+7}{x^2-9} + \frac{x+2}{x^2-9}$

फरक फरक हर भएका अनुपातिक अभिव्यजकहरूको जोड र घटाउ

(Addition and Subtraction of Rational Expressions of Different Denominator)

$\frac{3}{5} + \frac{4}{9}$ कति हुन्छ ? यसमा 5 र 9 को ल.स लिने र सरल गर्ने

जसअनुसार $= \frac{3\times9 + 4\times5}{5\times9} = \frac{27+20}{45} = \frac{47}{45}$

हरमा फरक फरक सङ्ख्या भएका अनुपातिक सङ्ख्याहरूको जोड र घटाउ जस्तै , फरक हर भएका अनुपातिक अभिब्यञ्जकहरूको जोड र घटाऊ गरिन्छ ।

हर र अंशमा नै बिजीय अभिव्यञ्जक भएको अनुपातिक संख्या अनुपातिक अभिव्यञ्जक हो । अनुपातिक अभिव्यञ्जकको जोड र घटाऊ पनि अनुपातिक सङ्ख्याको जोड र घटाउ जस्तैगरि गर्न सकिन्छ । यसकालागि तलको तरिका अबलम्बन गर्न सकिन्छ ।

तरिका :

फरक फरक हरको खण्डीकरण गर्ने र ल.स. निकाल्ने । प्रत्येक अनुपातिक अभिव्यञ्जकको हरले उक्त ल.स. लाई भाग गर्ने र भागफलले सोही अभिव्यञ्जकको अंशलाई गुणा गरी सरल गर्ने ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{2x}{5} + \frac{1}{2x}$

समाधान

यहाँ, $\frac{2x}{5} + \frac{1}{2x}$

5 र 2x को ल.स.10x हुन्छ

$= \frac{2x\times2x + 1\times5}{5\times2x}$

$= \frac{4x^2 + 5}{10x}$

(ख) $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

समाधान

यहाँ, $\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

(x+1) र (x-1) को ल.स.(x+1)(x-1)हुन्छ तसर्थ

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{2x(x-1)+ 1(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{2x^2 -2x +x +1}{x^2 -1}$$

$$= \frac{2x^2 -x+1}{x^2 -1}$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2 +5x +7}{x^2 -4} - \frac{1}{x+2}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2 +5x +7}{x^2 -4} - \frac{1}{x+2}$ [यहाँ x^2 - 4 र x+2 को ल.स. = (x-2)(x+2) हुन्छ ।

$$= \frac{x^2 +5x +7 - 1(x-2)}{(x -2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 +5x +7 - x+2}{(x -2)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 +4x +9}{(x -2)(x+2)}$$

(ख) $\frac{x +3}{x^2-5x +6} - \frac{x-2}{x^2-9}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x +3}{x^2-5x +6} - \frac{x-2}{x^2-9}$ [यहाँ $x^2 – 5x +6$ र x^2-9 को ल.स. = (x-2)(x-3)(x+3) हुन्छ ।

$$= \frac{(x+3)(x+3) - (x-2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+6x+9 - x^2+4x-4}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{10x+5}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

$$= \frac{5(2x+1)}{(x-2)(x-3)(x+3)}$$

अभ्यास

1. **सरल गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{2}$ (ख) $\frac{2x+1}{2} - \frac{x}{5}$

(ग) $\frac{2p^2}{7} + \frac{p+1}{2}$ (घ) $\frac{x^2-4}{x+3} + \frac{12}{x-3}$

(ङ) $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$ (च) $\frac{x}{x+5} - \frac{5}{x+3}$

(छ) $\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x+5}$ (ज) $\frac{x+2}{x-7} - \frac{x-7}{2+x}$

(झ) $\frac{1}{x^2+2x+1} + \frac{2}{x^2-2x+1}$ (ञ) $\frac{x}{x+6} + \frac{1}{x+3}$

2. **सरल गर्नुहोस् :**

(क) $\frac{x+2}{5x+6} + \frac{x}{2x+3}$ (ख) $\frac{x}{5x+6} + \frac{1}{6-5x}$

(ग) $\frac{x^2}{x-6} + \frac{36}{6-x}$ (घ) $\frac{x^2-4}{x+3} + \frac{12}{x-3}$

(ङ) $\frac{2x}{x-1} + \frac{x}{x+1}$ (च) $\frac{x-3}{x+5} - \frac{x-5}{x+3}$

(छ) $\frac{x}{x-5} + \frac{1}{x+5}$ (ज) $\frac{x+2}{x-7} - \frac{x-7}{2+x}$

(झ) $\frac{x^2+2x+1}{x-2} + \frac{x^2-2x+1}{x+2}$ (ञ) $\frac{x^2-7x+7}{x-7} - \frac{5x+1}{7-x}$

(छ) $\frac{x^2+5x+7}{x-2} - \frac{1}{x+2}$ (ज) $\frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{4}{x^2-2x+1}$

अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन र भाग

(Multiplication and Division if Rational Expressions)

अनुपातिक अभिव्यञ्जकहरूको गुणन गर्ने तरिका

- अंश र हरको छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गर्ने
- अंशलाई अंश सँगै र हरलाई हर सँगै गुणन गर्ने
- अंश र हरका साझा अभिब्यञ्जक हटाउने
- उत्तर लघुत्तम रूपमा लेख्ने

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस्

(क) $\frac{2xy}{5} \times \frac{y^2}{2x}$

समाधान

यहाँ, $\frac{2xy}{5} \times \frac{y^2}{2x}$

$= \frac{2xy\times y^2}{5 \times 2\times x} = \frac{y^3}{5}$

(ख) $\frac{2x+1}{5y} \times \frac{y}{6x+3}$

समाधान

यहाँ, $\frac{2x+1}{5y} \times \frac{y}{6x+3}$

$= \frac{(2x+1)\times y}{5y\times 3(2x+1)} = \frac{1}{15}$

(ग) $\frac{x^2+5x+6}{x+3} \times \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2+5x+6}{x+3} \times \frac{x^2-4x+4}{x-2}$

$$= \frac{x^2+2x+3x+6}{x+3} \times \frac{x^2-2x-2x+4}{x-2}$$

$$= \frac{x(x+2)+3(x+2)}{x+3} \times \frac{x(x-2)-2(x-2)}{x-2}$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)}{x+3} \times \frac{(x-2)(x-2)}{x-2}$$

$$= (x+2)(x-2)$$

$$= x^2-4$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{2y}{5} \div \frac{y^2}{2x}$

समाधान

यहाँ, $\frac{2y}{5} \div \frac{y^2}{2x}$

$$= \frac{2y}{5} \times \frac{2x}{y^2} = \frac{4x}{5y}$$

भाग गर्ने तरिका –

÷ चिह्नलाई x मा बदल्ने र ÷ भन्दा पछाडिको अनुपातिक अभिव्यञ्जकको हरलाई अंशमा र अंशलाई हरमा लेख्ने ।

जस्तै : $\frac{4x}{5y}$ भए $\frac{5y}{4x}$ बनाउने

त्यसपछि गुणनका विधिहरू प्रयोग गर्ने

(ख) $\frac{x+1}{x+y} \div \frac{y}{2(x+y)}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x+1}{x+y} \div \frac{y}{2(x+y)}$

$$= \frac{x+1}{x+y} \times \frac{2(x+y)}{y}$$

$$= \frac{2(x+1)}{y} \quad \frac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3} \div \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$$

(ग) $\frac{x^2+2x+1}{x-2} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2+2x+1}{x-2} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1}$

$$= \frac{(x+2)^2}{x-2} \div \frac{x+2}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2}{x-2} \times \frac{(x-2)^2}{x+2} = (x+2)(x-2) = (x^2-4)$$

अभ्यास

1. **सरल गर्नुहोस् ।**

(क) $\frac{2a}{9} \times \frac{6}{5a}$ (ख) $\frac{2x+1}{5y} \times \frac{y^2}{2x}$ (ग) $\frac{2xy}{5ab} \times \frac{a^2}{2y}$

(घ) $\frac{(x+y)}{xy} \times \frac{y}{2x+2y}$ (ङ) $\frac{3p^2q}{p+q} \times \frac{p^2-q^2}{2q^2p}$ (च) $\frac{x^2-x}{y} \times \frac{2y}{xy-y}$

2. **सरल गर्नुहोस् ।**

(क) $\frac{a^2-5a+6}{a-3} \times \frac{a^2-4}{a-2}$ (ख) $\frac{x^2+6x+9}{x-7} \times \frac{x^2-49}{x+3}$

(ग) $\frac{x^2-11x+18}{x+2} \times \frac{x^2-4}{x^2-81}$ (घ) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x} \times \frac{x-2}{x^2-25}$

(ङ) $\frac{p^3+6p^2+12p+8}{p+2} \times \frac{p^2-4p+4}{p-2}$

(च) $\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x^2+2xy+y^2} \times \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

3. **सरल गर्नुहोस् ।**

(क) $\frac{9}{3a} \div \frac{6}{5a}$ (ख) $\frac{5x}{2x+1} \div \frac{x^2}{2x+1}$ (ग) $\frac{7xy}{5ab} \div \frac{x^2}{b^2}$

(घ) $\frac{(x+y)}{x-y} \div \frac{x^2-y^2}{2x-2y}$ (ङ) $\frac{p+q}{6p^2q} \div \frac{p^2-q^2}{2q^2p}$ (च) $\frac{ax^2-a^2x}{y+b} \div \frac{ax}{y^2+yb}$

2. **सरल गर्नुहोस् ।**

(क) $\frac{a-3}{a^2-5a+6} \div \frac{a^2-4}{a-2}$ (ख) $\frac{x^2-6x+9}{x+7} \div \frac{x-3}{x^2-49}$

(ग) $\frac{x^2-7x+10}{x+2} \div \frac{x^2-5x}{x^2-4}$ (घ) $\frac{x^2+13x+40}{x^2+5x} \div \frac{x+8}{x-2}$

(ङ) $\frac{x^3+6x^2-12x-8}{x^2-4x+4} \div \frac{x^2-4}{x-2}$ (च) $\frac{x^3-y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3} \div \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

पाठ २३

घाताङ्क (Indices)

तलको उदाहरण अवलोकन गरौँ र छलफल गरौं :

$2 \times 2 \times 2 \times 2$ बराबर कति हुन्छ ?

यहाँ, 2 लाई 2 ले 4 पटक गुणन गरिएको छ । तसर्थ, $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ मा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

त्यस्तै 2 को ठाँउमा x भए कसरी लेख्न सकिन्थ्यो होला ?

त्यस्तो अवस्थामा x^4 लेखिन्थ्यो र x^4 मा xलाई आधार (base) भनिन्छ भने 4 लाई x को घाताङ्क (index) भनिन्छ ।

यसरी, एउटै सङ्ख्या वा चललाई सोही सङ्ख्या वा चलले ले दुई वा सो भन्दा बढी पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा लेख्ने सङ्केतलाई घाताङ्क भनिन्छ ।

त्यसैगरी a लाई n पटकसम्म गुणन गरेमा, $a \times a \times a$ .... n पटक $= a^n$ हुन्छ ।

अब हामी घाताङ्कका नियमहरूका बारेमा छलफल गर्दछौं ।

घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indices)

(क) **एउटै आधार भएका घाताङ्कहरूको गुणन** (Multiplication Law of of Indices with same base)

यहाँ, $x^2.x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x \times x \times x \times x \times x = x^5 = x^{2+3}$

तसर्थ, यदि आधार एउटै भए घाताङ्कहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ र घाताङ्क जोडिन्छन् ।

त्यसकारण, यदि $x \neq 0$ र m र n धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या भएमा $x^m.x^n = x^{m+n}$ हुन्छ ।

(ख) एउटै आधार भएमा घाताङ्कहरूको भाग (Division law of Indices with same base)

यहाँ, $\frac{x^5}{x^2} = \frac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x \times x} = x \times x \times x = x^3 = x^{5-2}$

त्यसकारण, यदि आधार एउटै भएमा घाताङ्कहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ र भाजकको घाताङ्कलाई भाज्यको घाताङ्कबाट घटाइन्छ ।

त्यसकारण $x \neq 0$ र $m > n$, m, n दुवै धनात्मक सङ्ख्या भएमा

$x^m \div x^n = x^{m-n}$ हुन्छ ।

(ग) शून्य घाताङ्क (Law of Zero Index)

तलको उदाहरण हेरौं :

यहाँ, $x^2 \div x^2 = 1$ ……………. (a)

त्यस्तै, घाताङ्कको भाग विधिबाट हेर्दा,

$x^{2-2} = x^0$……………… (b)

अब, (a) र (b) बाट हेर्दा $x^0 = 1$

त्यस्तै, घाताङ्कको भाग विधिबाट हेर्दा,

यदि $x \neq 0$ र x को घाताङ्क शून्य (0) छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ ।

$\boxed{\text{त्यसकारण } x^0 = 1}$

(घ) ऋणात्मक घाताङ्कको नियम (Law of Negative Indices)

तलको उदाहरण हेरौं :

यहाँ ,$x^2 \div x^4 = \frac{x^2}{x^4} = x^{2-4} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

त्यसैगरी, $x^{-3} = \frac{1}{x^2}$ र $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ हुन्छ ।

यदि $x \neq 0$ र x^{-m} भए, $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ हुन्छ । त्यसैगरी $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$ पनि हुन्छ ।

(ङ) घाताङ्कको पनि घाताङ्कहरूको नियम (Law of Index of Indices)

तलको उदाहरण हेरौं :

$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2$($\therefore$ आधार एउटै छ तसर्थ घाताङ्क जोडिन्छ ।)

$= x^{2+2+2} = x^6 = x^{2 \times 3}$

त्यस्तै $(x^3)^4 = x^{3 \times 4} = x^{12}$ हुन्छ ।

$\boxed{\text{तसर्थ, } (x^m)^n = x^{mn} \text{ हुन्छ ।}}$

(च) गुणनको र भागको घाताङ्कको नियम

हामीलाई थाहा छ,

$(2a^2)^3 = 2a^2 \times 2a^2 \times 2a^2$

$= 2 \times 2 \times 2 \times a^2 \times a^2 \times a^2$

$= 2^3 \times a^{2 \times 3}$

$= 8 \times a^6$

$(2a^2)^3 = 2^3 \times a^{2\times3} = 8a^6$

उदाहरण 1

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् ।

(क) $x^3 \times x^5$

समाधान

यहाँ, $x^3 \times x^5$

$= x^{3+5}$

$= x^8$

(ख) $3^2 \times 3^3$

समाधान

यहाँ, $3^2 \times 3^3$

$= 3^{2+3}$

$= 3^5$

$= 243$

(ग) $y^3 \times y^{-4} \times y^2$

समाधान

यहाँ, $y^3 \times y^{-4} \times y^2$

$= y^{3-4} \times y^2$

$= y^{-1+2}$

$= y^1 = y$

उदाहरण 2

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

(क) $a^7 \div a^5$

समाधान

यहाँ, $a^7 \div a^5$

$= a^{7-5}$

$= a^2$

(ख) $10x^6 \div 5x^4$

समाधान

यहाँ, $10x^6 \div 5x^4$

$= \dfrac{5 \times 2 \times x^6}{5 \times x^4}$

$= 2 \times x^{6-4}$

$= 2 \times x^2$

$= 2x^2$

(ग) $x^{k-1} \div x^{2k-3}$

समाधान

यहाँ, $x^{k-1} \div x^{2k-3}$

$= x^{k-1-(2k-3)}$

$= x^{k-1-2k+3}$

$= x^{-k+2}$

$= x^{2-k}$

उदाहरण 3

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् ।

(क) $(x^3 y)^2$

समाधान

यहाँ, $(x^3 y)^2$

$= x^3y \times x^3y$

$= x^3 \times x^3 \times y \times y$

$= x^{3+3}\, y^2$

$= x^{3\times2} \cdot y^2$

$= x^6y^3$

(ख) $(3x)^2 \times (2x)^3$

समाधान

यहाँ, $(3x)^2 \times (2x)^3$

$= 3x \times 3x \times 2x \times 2x \times 2x$

$= 3^2 \times x^2 \times 2^3 \times x^3$

$= 9 \times 8 \times x^{2+3}$

$= 72a^5$

उदाहरण 4

घाताङ्कको नियम प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

(क) $2p^{2a} \times (p^2q^2)^{-2}$

समाधान

यहाँ, $2p^{2a} \times (p^2q^2)^{-2}$

$= 2p^{2a} \times p^{2 \times -2} \cdot q^{2 \times -2}$

$= 2p^{2a} \times p^{-4} \times q^{-4}$

$= \dfrac{2p^{2a-4}}{q^4}$

अभ्यास

1. **घाताङ्क्कको नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :**

   (क) $3^4 \times 3^3$ (ख) $x^8 \times x^6$

   (ग) $(x^2y) \times (xy)\times$ (घ) $(5x^2) \times (3x^3)$

   (ङ) $(x^3z) \times (zx) \times (x^2z)$ (च) $(4x^{-2}) \times (-3x^4)$

2. **घाताङ्कको नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :**

   (क) $7^5 \div 7^3$ (ख) $8^5 \div 4^5$

   (ग) $10x^7 \div 5x^5$ (घ) $45x^8 \div 15x^6$

   (ङ) $-125z^7 \div (-25z^6)$

3. **घाताङ्कको नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :**

   (क) $(3^2)^4$ (ख) $(-4^3)^2$ (ग) $(4y^3)^4$ (घ) $(-7x^3)^4$

   (ङ) $(ab^2)^3 \times ab$ (च) $(4x^4)^3 \times (3x^3)^4$ (छ) $(x^2y)^c \times (xy^2)^c$

पाठ २४

समीकरण तथा असमानताहरू
(Equations and inequilities)

समीकरण र एकचलयुक्त रेखीय समीकरणको बारेमा सामान्य जानकारी अघिल्ला कक्षाहरूमा लिइसकेका छौं । अब हामी अझ विस्तृत रुपमा अध्ययन गर्दछौं ।

एकचलयुक्त रेखीय समीकरण(Linear Equation of one Variable)

तलको प्रश्नहरूको उत्तर प्रत्येकले आ-आफ्नो कपीमा लेख्ने र सँगैको साथीसँग छलफल गरी उत्तरको निचोडमा पुगौं ।

रेखीय समीकरण भनेको के हो ?

चल भनेको के हो ?

$x+5 = 9$ मा x कतिओटा गुणा भएको छ ? यसमा x को डिग्री कति होला?

के यसमा x को मान दुईओटा वा सो भन्दा बढी हुन सक्छ ? यसबारे हामीले अघिल्ला कक्षामा अध्ययन गरिसकेका छौं ।

एकचलयुक्त समीकरणहरू हल गर्ने तरिका :

$x+ 6 = -2$ भए x को मान कति होला?

समाधान

$x+ 6= -2$ (पहिले चल सँग भएको अचललाई हटाउने)

अथवा, $x + 6 -6 = -2 -6$

अथवा, $x = -8$

उदाहरण 1

हल गरी र जाँचेर हेर्नुहोस् ।

$5x-9 = 6$

समाधान

यहाँ, $5x-9 = 6$

अथवा, $5x-9+ 9 = 6 +9$ (दुवैतिर +9 गर्दा)

अथवा, $5x-0 = 15$

अथवा, $\frac{5x}{5} = \frac{15}{5}$(दुवैतिर 5 ले भाग गर्दा)

अथवा, $x = 3$

जाँचेर हेर्दा,

$x= 3$ को मान $5x-9 = 6$ मा राखौं।

यहाँ, $5x-9 = 5\times3-9 = 15-9 = 6$

उदाहरण 2

हल गरी र जाँचेर हेर्नुहोस् ।

$5x-6 = 3x+10$

समाधान

यहाँ, $5x-6 = 3x+10$

अथवा, $5x-6+6 = 3x+10+6$ (दुवैतर्फ 6 जोड्दा)

अथवा, $5x = 3x+16$

अथवा, $5x-3x = 3x-3x+16$ (दुवैतर्फ -3x गर्दा)

अथवा, $2x = 16$

अथवा, $x = \frac{16}{2} = 8$

जाँचेर हेर्दा,

$x= 8$ को मान $5x-6 = 3x+10$मा राखौं ।

यहाँ, $5x-6 = 5\times 8-6= 40-6 = 34$

$3x+10 = 3\times 8 +10= 24 +10 = 34$

उदाहरण 3

एउटा आयतकार बगैचाको लम्बाइ र चौडाइ 5:3 को अनुपातमा छन् । यदि उक्त खेतको परिमिति 400 मिटर भए, उक्त खेतको

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख ।

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ लम्बाइ र चौडाइको अनुपातको साझा गुणनखण्डलाई x मान्दा

लम्बाइ= $5x$ भए चौडाइ = $3x$ हुन्छ ।

(क) प्रश्नानुसार, परिकमिति = 400m

हामीलाई थाहा छ, आयतकार वस्तुको परिमिती = 2(लम्बाइ +चौडाइ)

अथवा, $2(5x+3x) = 400$

अथवा, $5x+3x = \frac{400}{2}$

अथवा, $5x+3x = 200$

अथवा, $8x = 200$

अथवा, $x = \frac{200}{8}$

$\therefore$ $x = 25$

(ख) खेतको लम्बाइ (l) = 5x = 5 x 25 = 125 m

खेतको चौडाइ (b) = 3x = 3 x 25 = 75 m

(ग) खेतको क्षेत्रफल (A) = l x b वर्ग एकाइ

$= (125X25)\ m^2$

$= 3125\ m^2$

उदाहरण 4

5 वर्ष अगाडि एन्जलको उमेरभन्दा उसको काकाको उमेर दोब्बर थियो । यदि त्यसबेला उनीहरूको उमेरको योगफल 36 वर्ष थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति होला ?

समाधान

यहाँ, एन्जलको उमेर = x मान्दा

एन्जलको काकाको उमेर = 2x.

प्रश्न अनुसार x + 2x = 36

अथवा, $3x = 36$

अथवा, $x = \frac{36}{3} = 12$ वर्ष

एन्जलको हालको उमेर = x + 5 = 12 +x = 17 वर्ष

एन्जलको काकाको हालको उमेर = 2x + 5 = 2×12 + 5 = 29 वर्ष

अभ्यास

1. **हल गरी र जाँचेर हेर्नुहोस् ।**

(क) $9x = 27$　(ख) $x - 7 = 9$　(ग) $5x+4 = 14$

(घ) $7x-13 = 8$　(ङ) $8x+11 = 19$　(च) $13x-14 = 12$

2. **हल गरी र जाँचेर हेर्नुहोस् ।**

(क) $5x+3 = 2x+6$　(ख) $4x+7 = 3x+10$　(ग) $9+14x = 27-11x$

(घ) $4(x+4) = 3(x-1)$　(ङ) $17-8y = 5-20y$　)

3. **हल गर्नुहोस् ।**

(क) xको 10% = 35　(ख) 500 को द% = x　(ग) xको 13% = 6.5

(घ) x + xको 33% = 266　(ङ) x + xको 50%= 381

4. दुईओटा सङ्ख्याको योगफल 20 छ । यदि एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याभन्दा 4 ले बढी छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. कक्षा 8 का 42 विद्यार्थीहरूमध्ये केटीहरूको सङ्ख्या केटाको सङ्ख्याभन्दा 12 ले बढी छ भने उक्त विद्यालयको कक्षा 7 का विद्यार्थी जनाउने समीकरण लेख । साथै कक्षा 8 का केटाको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् नुहोस् ।

6. एउटा आयतको लम्बाइ, चौडाइ भन्दा 8cm बढी छ । उक्त आयतको परिमिति 56cm छ भने चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. दुईओटा सङ्ख्याहरू 4:5 को अनुपातमा छन् । यदि उक्त दुई सङ्ख्याहरूको योगफल 981 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा लठ्ठीको $\frac{2}{5}$ भाग पानी भित्र छ । यदि उक्त लठ्ठीको जम्मा लम्बाइ 5.5 मिटर भए लठ्ठीको पानीभित्रको लम्बाइ कति रहेछ ?

9. 5 वर्ष अगाडि एन्जिलाको उमेरभन्दा उसको बाबुको उमेर दोब्बर थियो । यदि त्यसबेला उनीहरूको उमेरको योगफल 45 वर्ष थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति होला ?

10. 10 वर्ष अगाडि बाबुको उमेर छोराको उमेरको तीन गुणा थियो । यदि त्यसबेला उनीहरूको उमेरको फरक 20 वर्षथियो भने छोराको अहिलेको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

एकचलयुक्त रेखीय असमानता (Linear Inequalities with single variables)

अघिल्ला कक्षाहरूमा अध्ययन गरेको आधारमा तलका सङ्ख्यारेखाहरूको अध्ययन गर र ट्रिकोटोमी (Trichotomy) हरू प्रयोग गरी लेख ।

एक चलयुक्त असमानताको हल (Solution of Single Variable Inequalities)

a, b र c तिनओटा वास्तविक सङ्ख्याहरू भए,

(क) $a < b$ छ भने $a+c<b+c$ हुन्छ ।जस्तै, $2 < 4$ भए $2+3 < 4+3$ हुन्छ ।

(ख) $a < b$ छ भने $a - c < b - c$ हुन्छ ।जस्तै, $2 < 4$ भए $2-3 < 4-3$ हुन्छ ।

(ग) $a<b$ र $c>0$ भए $a.c < b.c$ र हुन्छ ।

(घ) $a<b$ र $c<0$ भए $a.c > b.c$ र हुन्छ ।

अर्थात, त्रृणात्मक सङ्ख्याले गुणा गर्दा '>' भए '<' मा र '<' भए '>' मा परिवर्तन हुन्छ ।

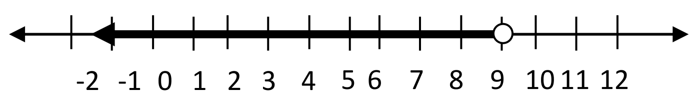
उदाहरण 1

हल गर र सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर :

(क) $3x<27$ (ख) $4x+323$ (ग) $5x+2(3x-10)x$

समाधान

(क) $3x<27$



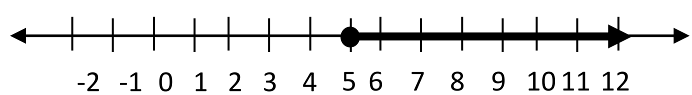
अथवा, $x < \frac{27}{3}$

अथवा, $x < 9$

समूहमा व्यक्त गर्दा {8, 7, 6, 5, ...} हुन्छ ।

(ख) $4x+3\geq 23$

अथवा, $4x+3-3\geq 23-3$



अथवा, $4x\geq 20$

अथवा, $x \geq \frac{20}{4}$

$x \geq 5$

समुहमा व्यक्त गर्दा {5, 6, 7, 8, ...}

उदाहरण 2

$-5 \leq x < 2$ लाई समूहमा र सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् ।

समाधान

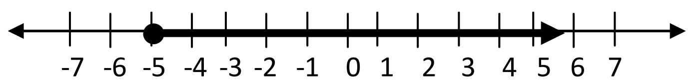
यहाँ $-5 \leq x < 2$

यसलाई दुई भागमा बाड्दा $-5 \leq x$ र $x < 2$ हुन्छ ।

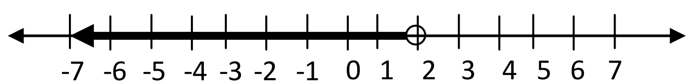
अब, $-5 \leq x$ लाई समुहमा व्यक्त गर्दा $\{-5, -4, -3, -2, \ldots\ldots\ldots\}$ हुन्छ र

$x < 2$ लाई समुहमा व्यक्त गर्दा $\{1, 0, -1, -2, \ldots\ldots\ldots\}$ हुन्छ ।

सङ्ख्या रेखामा व्यक्त गर्दा



$-5 \leq x$



$x < 2$

उदाहरण 3

कोपीलालाई रु. 50 पर्ने एउटा रुमाल र प्रति गोटा रु. 12 पर्ने केही कापीहरू किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु 150 भए बढीमा कतिओटासम्म कापी किन्न सक्लिन् ?

समाधान

यहाँ जम्मा किन्न सकिने कापी सङ्ख्या x मान्दा, कापीको जम्मा मूल्य $= 12x$ हुन्छ ।

जम्मा खर्च $= 50+12x$ हुन्छ

उनीसँग भएको जम्मा रकम = रु. 150

प्रश्नानुसार, $50+12x \leq 150$ हुन्छ ।

अथवा, $50 + 12x - 50 \leq 150 - 50$

अथवा, $12x \leq 100$

अथवा, $x \leq \frac{100}{12}$ ओटा

8.5 ओटा

यहाँ x को मान भनेको कापीको सङ्ख्या हो जुन पूर्णाङ्कमा हुन्छ । तसर्थ कोपिलाले बढीमा 8 ओटा कपी किन्न सक्छिन् ।

उदाहरण 4

$y = 4x+5$ मा यदि x को मान 2 वा सोभन्दा बढी भएमा y को मान कति होला ?

समाधान

यहाँ $y = 4x+5$ र $x \geq 2$

अथवा, $y \geq 4.2+5$

अथवा, $y \geq 8+5 = 13$

$\therefore y \geq 13$ हुन्छ ।

अभ्यास

1. **हल गर र सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।**

   (क) $x+5 \leq 7$ (ख) $3x+5<2$ (ग) $7x-2(x-3)< 16$

   (घ) $2(x-2)-x<4$ (ङ) $3(x+5) < 5+6x$ (च) $5+4(x-3) > 9$

   (छ) $0.9x\ 0.8+0.1 \leq x$ (ज) $-5\ x <-2$ (झ) $-2<x +4$

   (ञ) $4x< 9$ (ट) $-7<2x+5 \leq 1$ (ठ) $-11 \leq 3x-2 < -5$

2. $y = 7x-9$ भएको समीकरणमा $x > 2$ भएमा y को मान कति होला ?

3. $y = 4x + 5$ मा $x <-3$ भए y को मान कति होला?

4. $3x + 4y + 5 = 0$ समीकरणदिइएको छ । यदि

   (क) $x \leq 5$ भए y को मान कति होला ? (ख) $x > -5$ भए y को मान कति होला ?

   (ग) $y \geq 1$ भए x को मान कति होला ?

5. दामोदरलाई रु.25 पर्ने एउटा कापी र अन्य रु.8 पर्ने केही कलमहरू किन्नु छ । यदि उनीसँग जम्मा रु. 150 छ भने उसले बढीमा कतिओटा कलम किन्न सक्लान् ?

6. एउटा सङ्ख्याको तीन गुणामा 7 जोड्दा 13 भन्दा सानो हुन्छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला ? सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर ।

7. एउटा सङ्ख्याको दुईगुणालाई 9बाट घटाउदा उक्त सङ्ख्याको एक तिहाइ र 3 को जोडभन्दा सानो वा बराबर हुन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउन'होस् र सङ्ख्यारेखामा प्रस्तुत गर ।

8. विदुलाले रु. 10 प्रति गिलासको केही गिलास चिया रु.45 प्रति प्याकेटको 3 प्याकेट बिस्कुट किन्दा उनीसँग भएको रु. 332 ले बढीमा कति गिलास चिया आउला ?

9. यदी दिइएको आयातको परिमिति 44cm भन्दा बढी भए यसलाई असमानता बनाएर हल गर ।

10. एउटा त्रिभुजको परिमिति 22cmभन्दा ठूलो र 30cmभन्दा सानो वा बराबर छ भने यसलाई असमानतामा व्यक्त गरी हल गर्नुहोस्।

दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरणको रेखाचित्रद्धारा हल

Graphic solution of two variable linear equations

शुभेच्क्षा र एन्जिलाले 4 ओटा बेलुन आपसमा बाँड्नु छ । उनीहरूले कति कति पाउलान् ? हेरौं

यहाँ, शुभेच्क्षाले पाउने बेलुनको सङ्ख्या = x मानौं

एन्जिलाले पाउने बलको सङ्ख्या = y मानौं

अब तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

शुभेच्क्षा (x)	4	3	2	1	0
एन्जिला (y)	0	1	2	3	4

माथिको तालिकामा शुभेच्क्षा र एन्जिलाले पाउने जम्मा बेलुन सबै अवस्थामा 4 छतसर्थ

$x + y = 4$…………………(i)

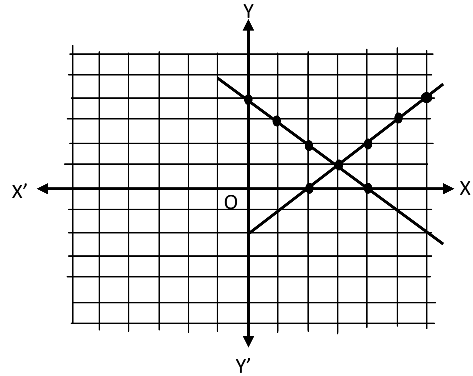
त्यस्तै, यदी शुभेच्क्षासँग एन्जिलाको भन्दा 2 ओटा बेलुन बढी भए भने दुबैले कति कति बेलुन प्राप्त गरे होलान् ? यसलाई तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

शुभेच्क्षा (x)	2	3	4	5	6
एन्जिला (y)	0	1	2	3	4

तालिकामा हेर्दा शुभेच्क्षा र एन्जिलाको भागमा जम्मा बेलुनको फरक 2 छ

तसर्थ x – y=2 …………………(ii) हुन्छ ।

अब माथिका दुई समीकरणलाई ग्राफ पेपरमा भरेर हेर्दा,



चित्रमा $x + y = 4$ र $x - y = 2$ समीकरणहरू विन्दु (3,1) अर्थात $x = 3$ र $y = 1$ मा प्रतिच्छेदन भएका छन् । उक्त विन्दु (3,1) नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो । किनकी(3,1) दुवै समीकरणमा मान्य हुन्छ (?)

कुनै दुई रेखीय समीकरणहरू लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा प्रतिच्छेदीत हुन्छन् अथवा काटिन्छन् भने उक्त समीकरणहरूलाई युगपतरेखीय समीकरण (Simulataneous equation) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

लेखाचित्रद्धारा हल गर्नुहोस् :

$2x - 4 = 5$ र $x - y = 1$

समाधान

यहाँ $2x - y = 5$ ………………..(i)

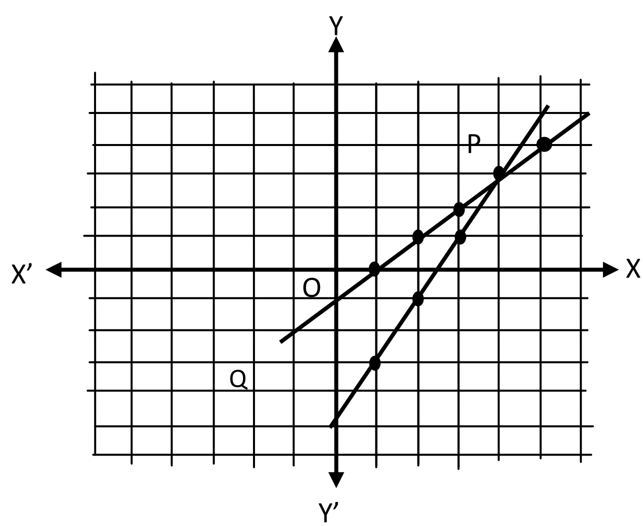
र $x - y = 1$……………………(ii) मानौं

समीकरण (i) बाट

$2x - y = 5$

अथवा, $y = 2x – 5$, तालिकामा हेर्दा

x	1	2	3	4
y	-3	-1	1	3



तसर्थ यसका विन्दुहरू (1,-3), (2,-1) (3,1) र (4,3)भए ।

त्यस्तै समीकरण (ii)बाट हेर्दा

$x - y = 1$

अथवा $x = 1 + y$, y मा मान राख्ने र x को मान निकाल्ने ।

x	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	4

यसका विन्दुहरू (1,0), (2,1), (3,2), (4,3) र (5,4) हुन् ।

अब लेखाचित्रमा विन्दुहरू अङ्कन गर्ने ।

सँगैको लेखाचित्रमा समीकरण (i) र समीकरण (ii) विन्दु (4,3) वा $x=4$ र $y=3$ मा काटीएका छन् । यो विन्दु नै समीकरणको हल हो ।

उदाहरण 2

दुईओटा सङ्ख्याहरूको फरक 3 छ । ठूलो सङ्ख्याको दुई गुणा र सानो सङ्ख्याको तिन गुणा बराबर छ भने ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउन’होस् र रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ, सानो सङ्ख्या = xर ठूलो सङ्ख्या = yमानौं

प्रश्नानुसार, $y - x = 2$ …………………(i) र $3x = 2y$………………….(ii)

(i) लाई लिँदा

$y - x = 3$

$y = x + 3$

x	0	1	2	3	
y	3	4	5	6	

माथिको तालिकाबाट बिन्दुहरू (0,3); (1,4); (2,5) र (3,6) प्राप्त भयो । समीकरण (ii) लाई लिँदा

$3x = 2y$

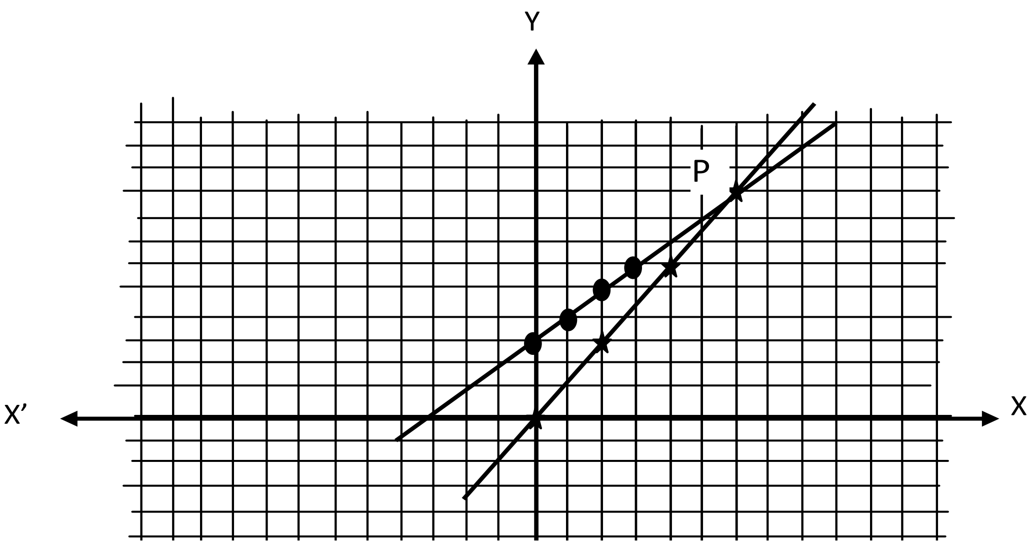
अथवा $y = \frac{3x}{2}$

x	0	2	4	6
y	0	3	6	9

(x जोरसङ्ख्या लिँदा 2 ले निशेष भाग लाग्छ ।)

माथिको तालिकाबाट बिन्दुहरू (0,0); (2,3) ;(4,6) (6,9) प्राप्त भयो ।

अब दुईओटै समीकरणबाट प्राप्त विन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा



लेखाचित्रमा दुई ओटा समीकरणहरूका रेखाहरू विन्दु P(6,9) मा काटिएका छन् । तसर्थ $x = 6$ र $y = 9$ उक्त दुई समीकरणको हल हो ।

त्यसकारण ठूलो सङ्ख्या = 9 र सानो सङ्ख्या = 6 भयो ।

अभ्यास

1. **तलका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्रद्धारा हल गरी र जाँचेर हेर्नुहोस् :**

(क)	$x + y = 2$	$3x - y = 10$	(ख)	$3x + y = 7$	$x = 2y$
(ग)	$x + y = 13$	$2x = y + 8$	(घ)	$x + y = 6$	$x - y = 2$
(ङ)	$x + y = 8$	$x - y = 4$	(च)	$4x + y = 2$	$3x - 2y = 7$
(छ)	$2x + y = 4$	$x + 2y = 2$	(ज)	$3x + y = 8$	$2x + y = 7$
(झ)	$4x + 2y = 2$	$x - 3y = 11$	(ञ)	$2x - y = 4$	$x + 2y = 7$
(ट)	$2x + y = 5$	$4x + 3y = 6$	(ठ)	$x + y = 6$	$x - y = 0$

2. **तल दिइएका समस्याहरूलाई समीकरणमा व्यक्त गरी लेखाचित्रद्वारा हल गर्नुहोस् :**

(क) दुईओटा सङ्ख्याको योगफल 17 छ र फरक 9 छ ।

(ख) दुईओटा सङ्ख्याको योगफल 24 छ र ठूलो सङ्ख्या सानो सङ्ख्याको तीनगुणा ठूलो छ ।

(ग) दुई सङ्ख्याको फरक 5 छ र सानो सङ्ख्याको 5 गुणा र ठूलो सङ्ख्याको 4 गुणा बराबर छ ।

(घ) 3 ओटा सिसाकलम र चारओटा कलमको मूल्य रु 200 पर्छ र 5 ओटा सिसाकलम र 2 ओटा कलमको मूल्य रु. 240 पर्छ भने एउटा कपी र एउटा कलमको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) आमाको उमेर छोरीको उमेरको तेब्बरमा 3 कम छ । यदि आमा र छोरीको उमेर बिचको फरक 37 वर्ष भए उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) सुजनको अहिलेको उमेर हरिमयाको भन्दा 5 वर्ष बढी छ । सुजनको 5 वर्ष पछिको उमेर हरिमायोको अहिलेको भन्दा दोब्बर हुन्छ भने उनीहरूको अहिलेको उमेर कति होला ?

(छ) आषिश भन्दा अमृत 4 वर्ष जेठा छन् । 2 वर्ष अगाडी अमृतको उमेर आषिशको भन्दा दुईगुणा बढी थियो भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ज) कालेदाई र उनको बुबाको उमेरको फरक 20 वर्ष छ । यदि बुबाको उमेर कालेदाइको को भन्दा दुईगुणा र 4 ले बढी छ भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

वर्ग समीकरण (Quadratic Equations)

तलका समीकरणहरू हेर र दिइएका प्रश्नहरूको बारेमा छलफल गर ।

$x^2+2x+1=0$ ……………….(i) $x^2-16=0$ ………………….(ii)

$x^2-12x+20=0$ ……………….(iii) $3x^2+4x=0$ …………………..(iv)

- माथिका समीकरणहरूमा x को डिग्री कति छ ?
- समीकरणहरूमा के फरक पाउँछौ ?
- माथिका समीकरणहरूमा कति कति ओटा चल छन् ?

दिइएका समीकरणहरूमा पहिलो, तेस्रो र चौथो पदमा x को डिग्री 1 र 2 दुवै छ भने दोस्रो समीकरणमा x को डिग्री 2 मात्र छ ।

डिग्री 2 भएमा समीकरणहरूलाई वर्ग समीकरण (Quadratic Equation) भनिन्छ ।

यदि वर्ग समीकरणमा एकचल 'x' को डिग्री 2 मात्र छ भने उक्त वर्ग समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (Pure Quadratic Equation) भनिन्छ । जस्तै x^2-16=0 शुद्ध वर्ग समीकरण हो ।

त्यस्तै डिग्री 2 र डिग्री 1 समेत भएमा पदहरू समावेश भएको वर्ग समीकरणलाई मिश्रित वर्ग समीकरण (Mixed Quadratic Equation) भनिन्छ । जस्तै, $x^2+7x-8=0$ मिश्रीत वर्ग समीकरण हो ।

खण्डीकरण विधिद्धारा वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equations by factorization)

वर्ग समीकरणमा चल 'x' को मान पत्ता लगाउनुलाई वर्ग समीकरणको हल गर्नु भनिन्छ । वर्ग समीकरणको डिग्री 2 हुने हुदा यसका मानपनि दुईओटा हुन्छन् । वर्ग समीकरणमा x को मानलाई समीकरणका मूल वा मूलहरू (roots) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् : (क) $x^2+7x-8=0$ (ख) $16x^2-49=0$

समाधान

(क) $x^2+7x-8=0$

अथवा, $x^2+8x-1x-8=0$ [8-1 =7]

अथवा, $x(x+8)-1(x+8)=0$

अथवा, $(x-1)(x+8)=0$

कि, $(x-1)=0$भए x=1र

वा, x+8=0, x=-8हुन्छ ।

तसर्थ x को मान 1 र -8 छन् ।

(ख) $16x^2-49=0$

अथवा, $(4x)^2-(7)^2=0$

अथवा, $(4x-7)(4x+7) = 0$ (?)

यदि, $4x-7=0$ भए $4x=7$ हुन्छ ।

र $x = \frac{7}{4}$ हुन्छ ।

फेरी यदि $4x + 7=0$ भए $4x = -7$ हुन्छ ।

र $x = \frac{-7}{4}$ हुन्छ।

अभ्यास

1. **हल गर्नुहोस् :**

(क) $x^2- 3x=0$ (ख) $5x^2– x=0$ (ग) $3x+9x^2=0$

(घ) $9x^2– 4=0$ (ङ) $3x+9x^2=0$ (च) $15x^2-5x=0$

(छ) $x^2-49=0$ (ज) $169x^2-196=0$

2. **हल गर्नुहोस् :**

(क) $x^2+2x+1=0$ (ख) $x^2-x-2=0$ (ग) $x^2+x-2=0$

घ) $x^2+4x+4=0$ (ङ) $x^2-10x-24=0$ (च) $x^2-9x+18=0$

(छ) $x^2-11x+30=0$ (ज) $x^2+2x-3=0$ (झ) $x^2+8x+16=0$

(ञ) $x^2-8x+16=0$ (ट) $x^2+10x+25=0$ (ठ) $x^2-8x+15=0$

(ड) $x^2-6x+8=0$ (ढ) $2x^2-x-6=0$ (ण) $x^2+7x+12=0$

(त) $7x^2+13x-2=0$ (थ) $x^2+9x-22=0$ (द) $x^2-18x+77=0$

(ध) $2x^2+11x+12=0$ (न) $3x^2-11x-20=0$