

गणित

खुला विद्यालय कक्षा ९ र १० सरह

स्वाध्याय सामग्री



नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

गणित

(खुला विद्यालय कक्षा ९ र १० सरह)

स्वाध्याय सामग्री



शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार प्रकाशकमा

पहिलो संस्करण : वि.सं. २०८०

भूमिका

खुला विद्यालय शिक्षा कार्यक्रमले शिक्षाको पहुँच विस्तारका लागि महत्त्वपूर्ण भूमिका खेलेको हुन्छ । खुला शिक्षा पद्धतिको मुख्य उद्देश्य आर्थिक, सामाजिक, भौगोलिक तथा अन्य कारणबाट विद्यालय शिक्षा पूरा गर्न नसकेका बालबालिका तथा विद्यालय उमेर कटिसकेका व्यक्तिहरूलाई शिक्षाको मूल धारमा ल्याउने रहेको छ । विद्यालय शिक्षाको पाठ्यक्रममा आधारित भएर विभिन्न विषयका सामग्रीहरू विकास गरी सार्वजनिकीकरण गरिएको छ । परिवर्तित पाठ्यक्रमानुसार माध्यमिक तह (कक्षा ९ र १० सरह) को समकक्षता हुने गरी पाँचओटा अनिवार्य विषयका स्वाध्याय सामग्रीहरू विकास गरिएको छ ।

औपचारिक शिक्षा कक्षा ९ र १० का अनिवार्य विषयहरूमध्ये 'अनिवार्य गणित' विषयको पाठ्यक्रमको आधारमा खुला विद्यालयतर्फको एक बर्से माध्यमिक शिक्षाका लागि यो स्वाध्याय सामग्री विकास गरिएको छ । कक्षा ८ पास गरेका व्यक्तिहरूले दुई वर्षसम्मको स्वाध्ययनपछि कक्षा १० को परीक्षामा सहभागी हुन सक्ने प्रावधान भएकाले सामग्रीमा कक्षा ९ र १० का सक्षमतालाई समेट्ने गरी विषयवस्तुहरूलाई समेत समावेश गरिएको छ । सामग्रीमा विद्यार्थीहरूले आफैँले पढेर सिक्नका लागि सरल र व्यावहारिक विषयवस्तु तथा सिकारुमैत्री क्रियाकलापहरू यथासम्भव समावेश गरिएका छन् । यो सामग्री पाठ्यपुस्तकको सट्टामा नभई परिपूरक पाठ्यसामग्रीका रूपमा रहेको छ ।

यस स्वाध्याय सामग्रीको लेखन नरहरि आचार्य र शक्तिप्रसाद आचार्यबाट भएको हो । सामग्री विकास कार्यको संयोजन केन्द्रका उपमहानिर्देशक रुद्रप्रसाद अधिकारी, निर्देशक सविता दङ्गाल र शाखा अधिकृत भीमादेवी कोइरालाबाट भएको हो भने भाषा सम्पादन गेहनाथ गौतम, विषयवस्तु सम्पादन जगन्नाथ अधिकारी तथा चित्र र लेआउट डिजाइन जयराम कुइँकेलबाट भएको हो । सामग्रीको विकास कार्यमा संलग्न सबैलाई शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ । सामग्रीलाई अभै परिष्कृत पार्नका लागि प्राप्त हुने रचनात्मक सुझाव तथा प्रतिक्रियाका लागि केन्द्र सदैव स्वागत गर्दछ ।

चूडामणि पौडेल
महानिर्देशक

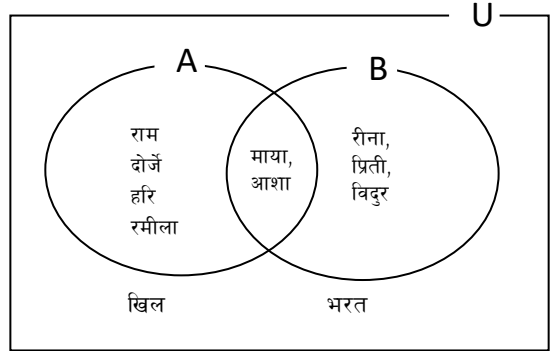
विषयसूची

पाठ	विषय	पृष्ठसङ्ख्या
पाठ 1	समूह (Sets)	1
	1.2 परिचय (Introducticon)	
	1.2 समूहका क्रियाहरू	2
	1.3 समूहको गणनात्मकता	7
	1.4 तिनओटा समूह सम्मिलित समूहहरूको गणनात्मकता सम्बन्धी समस्याहरू	16
पाठ 2	चक्रीय ब्याज (Compound Interest)	26
	2.1. चक्रीय ब्याजको परिचय	27
पाठ 3	वृद्धि र ह्रास (Growth and Depreciation)	50
	3.1 वृद्धि	51
	3.2 ह्रास	64
पाठ 4	मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate)	76
	4.1 मुद्रा र विनिमय दर	77
	4.2 चेन रुलको प्रयोग गरी मुद्रा विनिमय	86
पाठ 5	क्षेत्रफल र आयतन (Area and Volume)	92
	5.1.1 पिरामिडको परिचय	96
	5.1.2 पिरामिडका विभिन्न भागहरूको सम्बन्ध	97
	5.1.3 पिरामिडको आयतन	106
	5.2.1 सोलीको सतहको क्षेत्रफल	113
	5.2.2 सोलीको आयतन	122
	5.3.1 संयुक्त ठोस	130
	5.3.2 विभिन्न ठोस वस्तु वा ज्यामितीय आकारका गुणको	150
पाठ 6	अनुक्रम र श्रेणी (Sequene and Series)	159

6.1	आधारभूत अवधारणा	159
6.2	समानान्तरीय अनुक्रमको साधारण पद	161
6.3	गुणोत्तर अनुक्रमको साधारण पद	151
6.4	श्रेणी	162
6.5	समानान्तरीय अनुक्रम र श्रेणीको मध्यमान	164
6.6	समानान्तरीय श्रेणीको योगफल	166
6.7	गुणोत्तर अनुक्रम र श्रेणीको मध्यमान	171
6.8	समानान्तरीय मध्यमा र गुणोत्तर मध्यमाबिचको सम्बन्ध	173
6.9	गुणोत्तर श्रेणीको योगफल	175
पाठ 7	वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)	177
पाठ 8	बिजीय भिन्न (Algebraic Fraction)	202
पाठ 9	घाताङ्क (Indices)	215
पाठ 10	त्रिभुज र चतुर्भुजहरू (Triangle and Quadrilaterals)	227
पाठ 11	रचना (Construction)	242
पाठ 12	वृत्त (Circle)	249
पाठ 13	तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)	262
पाठ 14	सम्भाव्यता (Probability)	298
पाठ 15	त्रिकोणमिति (Trigonometry)	322

1.1 परिचय (Introduction)

दिइएको चित्रमा कला प्रदर्शन गर्ने विद्यार्थीहरू राम, दोर्जे, हरी, रमीला, माया र आशा हुन्। यसलाई व्यवस्थित तरिकाले लेख्दा $A = \{ \text{राम, दोर्जे, हरी, रमीला, माया र आशा} \}$ र बक्सीड खेल्ने सदस्यहरूलाई व्यवस्थित तरिकाले लेख्दा $B = \{ \text{रीना, प्रिती, विदुर, माया, आशा} \}$ हुन्छ।



यसरी कला देखाउने र बक्सिडमा भाग लिने व्यक्तिको टिमलाई क्रमशः अङ्ग्रेजी वर्णमालाको ठुलो अक्षरहरू 'A' र 'B' जनाउन सकिन्छ। समूहका सदस्यहरूलाई जनाउन सामान्यतया अङ्ग्रेजी वर्णमालाको सानो letters a,b,c,... वा अङ्कहरू प्रयोग गर्ने गरिन्छ।

निश्चित गुण र विशेषताका आधारमा वस्तुहरूका स्पष्टसँग परिभाषित गर्न सकिने सङ्कलनलाई नै समूह भनिन्छ।

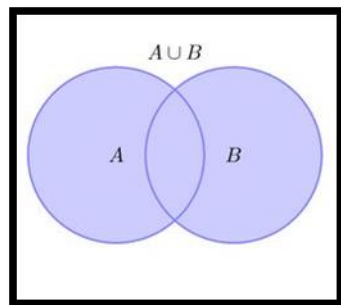
माथिका चित्रमा समूह A र B मा भएका भन्दा बाहेकका सदस्यहरू खिल र भरत हुन्। यसरी चित्रमा भएका सबै सदस्यहरू रहेको समूहलाई सर्वव्यापक समूह (universal set) भनिन्छ। यसलाई U ले जनाइन्छ। A र B का सबै सदस्यहरू U का पनि सदस्यहरू हुन्। त्यसैले A र B सर्वव्यापक समूह U का उपयुक्त उपसमूह (proper subsets) हुन्।

सम्पूर्ण उपसमूह जुन समूहबाट बनेका छन् त्यही समूहलाई ती उपसमूहहरूको सर्वव्यापक समूह भनिन्छ। सर्वव्यापक समूहबाट बन्न सक्ने समूहहरूलाई उप समूह भनिन्छ। उप समूहहरू सर्वव्यापी समूहरूबाट मात्र नभई अन्य समूहबाट पनि बनाउन

सर्वप्रथम समूहसम्बन्धी अवधारणालाई व्यवहारमा उतार्ने व्यक्ति उन्नाइसौं शताब्दीका जर्मन गणितज्ञ George Cantor (1844 - 1918) हुन् । यसलाई चित्रद्वारा सरलीकरण गर्ने व्यक्ति चाहिँ अर्का गणितज्ञ John Euler Venn हुन् । उनकै नामबाट यस चित्रलाई भेन चित्र (venn diagram) भनिएको हो । समूहको अवधारणा, समूहको सम्बन्ध, समूहका क्रियालाई भेन चित्रको प्रयोगबाट सरल तरिकाले समाधान गर्न सकिन्छ ।

1.2 समूहका क्रियाहरू (Set Operations)

अब हामी समूहमा हुने निम्न क्रियाहरूका बारेमा अध्ययन गर्छौं । यसअन्तर्गत हामीले समूहहरूको संयोजन, प्रतिच्छेदन, पुरक र फरकका बारेमा अध्ययन गर्दछौं ।



समूहहरूको संयोजन (Union of sets)

दुई समूहहरू A र B को संयोजन एउटा त्यस्तो समूह हो जसमा A र B का सबै सदस्यहरू पर्दछन् । संयोजनलाई गणितीय चिह्न $A \cup B$ ले जनाइन्छ ।

चित्रमा छायाँ परेको सम्पूर्ण भाग नै $A \cup B$ हो ।

उदाहरणका लागि, यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 $B = \{4, 5, 6, 7\}$ भए,

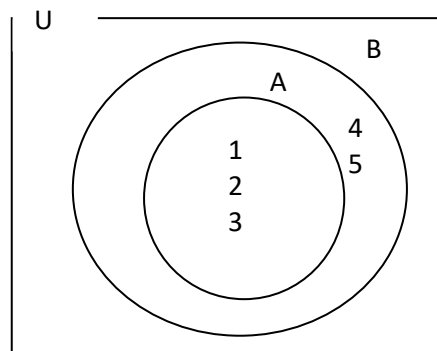
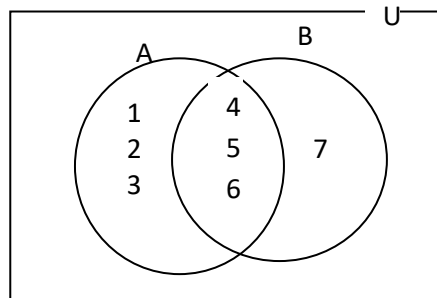
A र B को संयोजनमा 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 पर्दछन् ।

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ हुन्छ ।

यहाँ 4, 5, 6 सदस्यहरू समूह A र B दुवैमा पर्दछन् । त्यसैले ती साभ्ना सदस्यहरूलाई एक पटक मात्रै लेखिन्छ । समूह निर्माण विधिको अनुसार

$A \cup B = \{x: x \in A \text{ अथवा } x \in B\}$ लेखिन्छ ।

यदि $A \subset B$ भए $A \cup B = B$ र $B \subset A$ भए $A \cup B = A$ हुन्छ ।

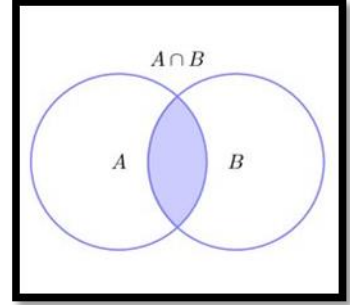


साथै $A \cup U = U$ हुन्छ । प्रत्येक समूह त्यसको सर्वव्यापक समूहको उपसमूह हुन्छ ।

चित्रमा, $A \subset B$ छ त्यसैले $A \cup B = B$ हुन्छ ।

समूहहरूको प्रतिच्छेदन (Intersection of sets)

दुईओटा समूहहरू A र B का साभा सदस्यहरूमात्र मिलेर बनेको समूहलाई यी दुई समूहहरूको प्रतिच्छेदन भनिन्छ । दुई समूहको प्रतिच्छेदनलाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ ।



जस्तै : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ र $B = \{4, 5, 6, 7\}$ भए $A \cap B = \{4, 5, 6\}$ हुन्छ । (दुवैमा साभा चित्रमा छायाँ परेको भागले दुवैका साभा सदस्यको समूहलाई जनाउदछ ।

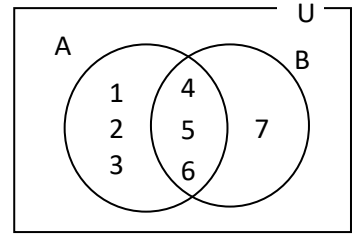
प्रतिच्छेदनलाई समूह निर्माण सङ्केत विधि अनुसार

$A \cap B = \{x : x \in A \text{ र } x \in B\}$ लेखिन्छ ।

यदि $A \subset B$ भए $A \cap B = A$ र $B \subset A$ भए

$A \cap B = B$ हुन्छ । साथै $A \cap B = U$ हुन्छ ।

किनकि प्रत्येक समूह त्यसको सर्वव्यापी समूहको उपसमूह हुन्छ ।



उदाहरण 1

तल दिइएको समूहहरूको संयोजन (union) र प्रतिच्छेदन (intersection) पत्ता लगाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

$P = \{\text{नेपाली, गणित}\}$ $Q = \{\text{गणित, विज्ञान}\}$

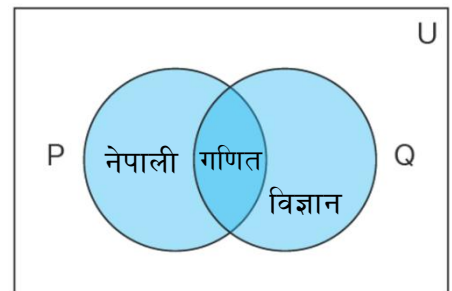
समाधान

यहाँ, $P = \{\text{नेपाली, गणित}\}$

र $Q = \{\text{गणित, विज्ञान}\}$ दुई समूहहरू छन् ।

संयोजन $P \cup Q = \{\text{नेपाली, गणित, विज्ञान}\}$ हुन्छ ।

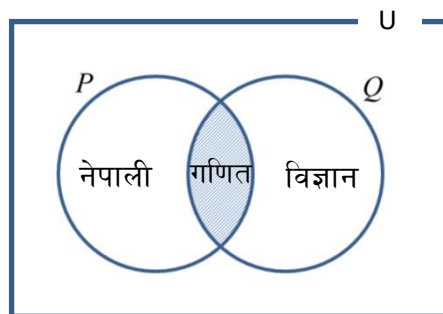
यसलाई भेन चित्रमा यस प्रकार देखाउन सकिन्छ ।



छाया परेको सम्पूर्ण भाग नै $P \cup Q$ हो । यसमा P र Q को साझा सदस्य गणितलाई एक पटक मात्रै लिइएको छ ।

प्रतिच्छेदन, $P \cap Q = \{\text{गणित}\}$.

चित्रमा छायाँ परेको भागले $P \cap Q$ लाई जनाउँछ ।



समूहको फरक (Difference of Sets)

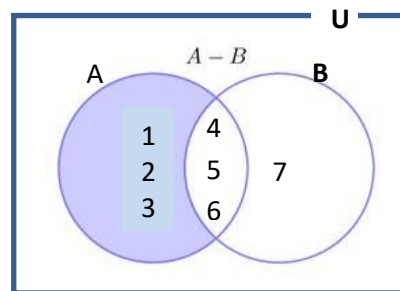
सर्वव्यापक समूहका उप समूहहरू समूह A र समूह B को फरक भन्नाले समूह A मा मात्र भएका तर B मा नभएका सदस्यहरूको समूहलाई जनाउँछ । यसलाई $A - B$ ले जनाइन्छ ।

जस्तै : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$ दुईओटा समूहहरू छन् भने

$A - B = \{1, 2, 3\}$ हुन्छ ।

चित्रमा छाया परेको भागले $(A - B)$ लाई जनाउँछ ।



बुझा भरेको भागले $(B - A)$ लाई जनाउँछ । चित्रमा हेरेर $(A - B)$ लाई अर्को तरिकाले लेख्दा,

$A - B = A - (A \cap B) = \{4, 5, 6\}$ हुन्छ । त्यस्तै, $B - A = \{7\} = B - A \cap B$ हुन्छ ।

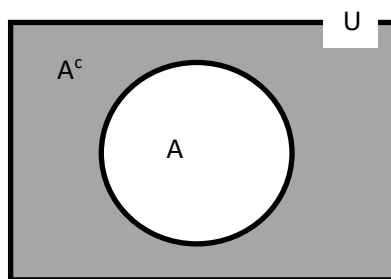
यदि $A - B$ र $B - A$ को संयोजन लिने हो भने पनि यसबाट अर्को समूह बन्छ । यसरी बन्ने समूहलाई समूहहरूको सममितीय फरक (symmetric difference) भनिन्छ र यसलाई $A \Delta B$ ले जनाइन्छ ।

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ हुन्छ ।

$= \{1, 2, 3\} \cup \{7\} = \{1, 2, 3, 7\}$ हुन्छ ।

समूहको पूरक (Complement of a Set)

समूह A मा नपर्ने तर सर्वव्यापी समूह U मा पर्ने सदस्यहरूको समूहलाई A को पूरक समूह भनिन्छ। समूह A को पूरकलाई A^c वा \bar{A} वा A' ले जनाइन्छ। U मा पर्ने A मा नपर्ने हुनाले यसलाई $\bar{A} = U - A$ पनि लेखिन्छ।



जस्तै, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ र

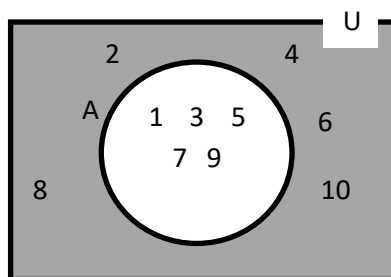
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

भए, $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\} = U - A$ हुन्छ।

समूह निर्माण विधिअनुसार

$A' = \bar{A} = \{x : x \in U, x \notin A\} = \{x : x \notin A\}$ हुन्छ।

चित्रमा, छाया परेको भागले \bar{A} लाई जनाउँछ



जहाँ A मा नपर्ने सर्वव्यापी समूह U का सदस्यहरू रहेका छन्।

भेन चित्रका आधारमा $U = A \cup \bar{A}$ र $A \cap \bar{A} = \phi$ हुन्छ भन्न सकिन्छ।

उदाहरण 2

यदि $U = \{x : x \text{ एउटा 1 देखि 20 सम्मको धनात्मक पूर्ण सङ्ख्या हो}\}$

$A = \{x : x \geq 6\}$, $B = \{x : x \leq 8\}$

$C = \{x : 10 < x < 15\} = \{10 \text{ र } 15 \text{ को बिचका पूर्ण सङ्ख्याहरू}\}$

छन् भने निम्न समूहहरूका सदस्यहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$ (iii) $B \cup C$ (iv) $A - C$ (v) $\overline{A \cup B}$

समाधान

यहाँ $U = \{x : x = 1 \text{ देखि } 20 \text{ सम्मका धनात्मक पूर्ण सङ्ख्याहरू}\}$

$= \{1, 2, 3, \dots, 20\}$

$A = \{x : x \geq 6\} = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\}$

$B = \{x : x \leq 8\} = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$

$$C = \{x: 10 < x < 15\} = \{11, 12, 13, 14\}$$

$$\text{अब, (i) } A \cup B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} \cup \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\},$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots, 20\} = \{x: 1 \leq x \leq 20\},$$

$$\text{(ii) } A \cap B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} \cap \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\},$$

$$= \{6, 7, 8\} = \{x: 6 \leq x \leq 8\}$$

$$\text{(iii) } B \cup C = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\} \cup \{11, 12, 13, 14\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14\}$$

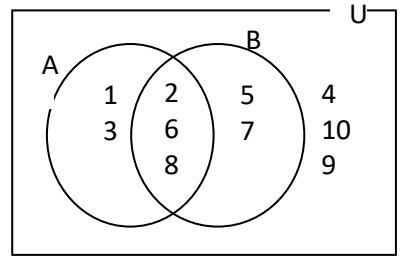
$$\text{(iii) } A - B = \{6, 7, 8, \dots, 19, 20\} - \{6, 7, 8\} = \{9, 10, 11, \dots, 19, 20\}$$

$$\text{(iv) } \overline{A \cup B} = U - (A \cup B) = \{1, 2, 3, \dots, 20\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots, 19, 20\}$$

$$= \phi$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. दिइएको भेन चित्रको आधारमा प्रत्येक समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् र तलका सम्बन्धहरू र क्रियाहरू पत्ता लगाई प्रत्येकलाई छुट्टाछुट्टै छायाँ पारी देखाउनुहोस् ।



$$\text{(i) } A \cup B \quad \text{(ii) } A \cap B \quad \text{(iii) } \overline{A \cup B}$$

$$\text{(iv) } \overline{A \cap B} \quad \text{(v) } \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\text{(vi) } A - B \quad \text{(vii) } U - \overline{A} \quad \text{(viii) } U - \overline{B}$$

2. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad B = \{2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{4, 8, 12\} \text{ भए}$$

निम्न समूहहरूको निर्माण गर्नुहोस् र भेन चित्रमा देखाउनुहोस् ।

$$\text{(i) } \overline{A \cup B} \quad \text{(ii) } \overline{A \cap B} \quad \text{(iii) } \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{(iv) } \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{(v) } \overline{\overline{A}}$$

3. यदि $A = \{1, 2, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ र $C = \{4, 5, 6, 7\}$ भए, प्रमाणित गर्नुहोस्

$$\text{(i) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\text{(ii) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

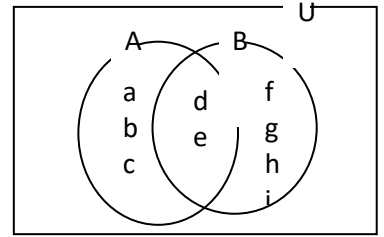
$$(iii) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (iv) (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

उत्तर :

1. i) {1,2,3,5,6,7,8} ii) {2,6,8} iii) {4,9,10} iv) {1,3,5,4,9,10}
- v) {1,3,4,5,7,9,10} vi) {1,3} vii) {1,2,3,6,8}
- viii) 2,5,6,7,8} 2. i) {1,9,11,12} ii) {1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}
- iii) {1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} iv) {1,9,11,12} v) {2,4,6,8,10}

1.3 समूहको गणनात्मकता (Cardinality of Sets)

दिइएको अङ्ग्रेजी वर्णमालाका सबै स्वर वर्णहरूको समूह $V = \{a, e, i, o, u\}$ हो । यस समूहमा जम्मा 5 वटा सदस्यहरू छन् । त्यसैले समूह V को गणनात्मकता 5 हो । यसलाई सङ्केतमा $n(V) = 5$ लेखिन्छ । यसर्थ, कुनै पनि समूहमा जम्मा कति सदस्य सङ्ख्या छन्, ती सदस्य सङ्ख्यालाई नै समूहको गणनात्मकता (cardinality) भनिन्छ ।



फेरी कुनै दुई समूहहरू A र B यदि खप्टिएका (intersecting) समूह हुन् भने समूह A को मात्र सदस्य सङ्ख्यालाई $n_o(A)$ र समूह B का मात्र सदस्य सङ्ख्याहरूलाई $n_o(B)$ ले जनाइन्छ । दिइएको भेन चित्रमा A मा मत्र पर्ने सदस्यहरू 3 ओटा छन् । त्यसैले, $n_o(A) = 3$ हुन्छ । A र B को फरकमा पर्ने सदस्यहरू पनि पहिलेका तीनओटै छन् । तसर्थ,

$$n_o(A) = n(A-B) \text{ हुन्छ ।}$$

यसलाई $n_o(A) = n(A) - n(A \cap B)$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

$$n_o(B) = 4, \text{ त्यसैगरी } n_o(B) = n(B-A) = n(B) - n(A \cap B) \text{ हुन्छ ।}$$

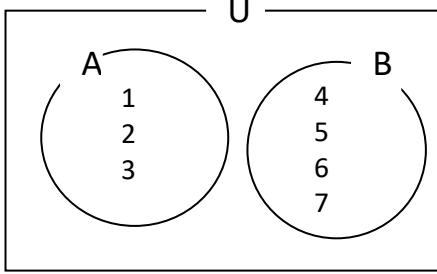
$$\text{साथै } n(A \cup B) = 9 \text{ र } n(A \cap B) = 2 \text{ हुन्छ ।}$$

कुनै दुई समूह मध्ये एउटा समूह अर्को समूहको उपयुक्त (proper) उपसमूह भए, $A \subset B$ भए $n(A \cap B) = n(A)$ हुन्छ र $n(A \cup B) = n(B)$ हुन्छ ।

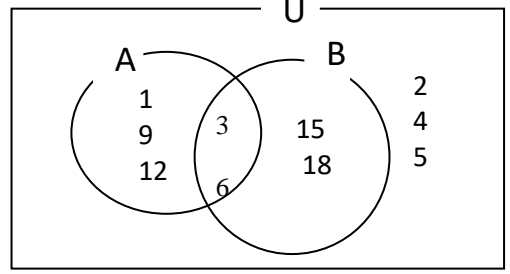
समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउने तरिका

तलको चित्रलाई अध्ययन गरेर दिइएको प्रश्नहरूको उत्तर खोज्नुहोस् ।

चित्र नं. १



चित्र नं. २



(क) (i) $n(A) = ?$ (ii) $n(B) = ?$ (iii) $n(A \cup B) = ?$ (iv) $n(A \cap B) = ?$ (v) $n(\overline{A \cup B}) = ?$

अलगगएका समूहको गणनात्मकता पत्ता लगाउने सूत्र, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ हुन्छ ।
खप्टिएका समूह (Overlapping set) को गणनात्मकता पत्ता लगाउने सूत्र,
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।

चित्र नं. २ हेरौं, जहाँ, U भित्र A, र B का सदस्यहरू बाहेक अन्य सदस्यहरू पनि छन् ।

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18\}$ छ । $n(U) = 10$

A र B बाहेक सदस्यहरू लिंगा $\{2, 4, 5\}$ $A \cup B$ भन्दा बाहिर पर्छ तर ती सदस्यहरू U मा पर्दछन् । त्यसैले, $\overline{A \cup B} = \{2, 4, 5\}$ हुन्छ । त्यसैले, गणनात्मकता $n(\overline{A \cup B}) = 3$ हुन्छ ।

साथै $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B})$ हुन्छ । चित्र २ मा U भित्र A र B का सदस्यहरू छन् ।

त्यसैले $\overline{A \cup B}$ मा कुनै सदस्य नभएकोले $\overline{A \cup B} = \emptyset$ हुन्छ । यसको गणनात्मकता $n(\overline{A \cup B}) = 0$

हुन्छ । यस्तो अवस्थामा $n(U) = n(A \cup B)$ मात्रै हुन्छ ।

उल्लिखित गणनात्मकता (cardinality) लाई निम्नलिखित सूत्रका रूपमा लेख्न सकिन्छ ।

- (i) A & B दुईओटा अलगिएका समूह भए, $A \cup B = n(A) + n(B)$
- (ii) A & B दुईओटा खटिएका समूह भए, $A \cup B = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- (ii) U भित्र A र B का सदस्य मात्र भए, $n(U) = n(A \cup B)$ मात्रै हुन्छ ।
- (iv) U भित्र A र B का सदस्यहरू बाहेक अन्य सदस्यहरू पनि भए $n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$ र $n(U) = n(A \cup B) + n(\overline{A \cup B}) =$ हुन्छ ।
- (v) खटिएका समूहमा $n_0(A) = n(A) - n(A \cap B)$ र $n_0(B) = n(B) - n(A \cap B)$ हुन्छ ।
- यस्तो अवस्थामा $n(A \cup B) = n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

500 घरधुरी भएको एउटा वडाको सभै गर्दा 325 घरले खेती गर्दा रहेछन् । 230 घरले व्यापार गर्दा रहेछन् भने कति घरले दुवै कार्य गर्दा रहेछन् ?

समाधान

जम्मा घरधुरीको समूहलाई U, खेती गर्नेको सङ्ख्याको समूहलाई A र व्यापार गर्ने घरधुरीको सङ्ख्याको समूहलाई B ले सङ्केत गरौं ।

प्रश्न अनुसार, $n(U) = 500 = n(A \cup B)$ (कुनै पनि काम नगर्ने घरधुरी छैन)

$$n(A) = 325, n(B) = 230$$

दुवै काम गर्ने घरधुरीको सङ्ख्या, $n_0(A) = ?$,
 $n_0(B) = ?$

अब सूत्रअनुसार,

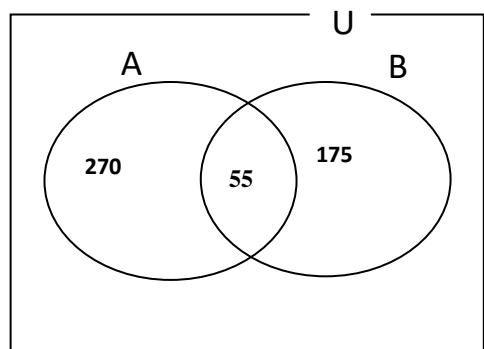
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$500 = 325 + 230 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 55$$

$$(ii) n_0(A) = n(A) - n(A \cap B) = 325 - 55 = 270,$$

270 जनाले खेती मात्र गर्दा रहेछन् ।



$$(iii) n_0(B) = n(B) - n(A \cap B) = 230 - 55 = 175$$

175 जनाले व्यापार मात्र गर्दारहेछन् ।

यसलाई भेन चित्रमा देखाउँदा,

$$\begin{aligned} n(U) &= n_0(A) + n_0(B) + n(A \cap B) \\ &= 270 + 175 + 155 = 500 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

150 जना विद्यार्थीको समूहमा 95 जना गणित पढ्न मन पराउने, 77 जना विज्ञान पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरू छन् । यदि 12 जना दुईवटा विषयमध्ये कुनै पनि विषय पढ्न मन पराउदैनन् भने भेन चित्र प्रयोग गरी गणनात्मक सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

- दुवै विषय पढ्नेको सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।
- गणित मात्र पढ्ने विद्यार्थी कति होलान् ?
- विज्ञान मात्रै पढ्ने विद्यार्थी कति होलान् ?
- कम्तिमा एउटा विषय पढ्नेको सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

समाधान

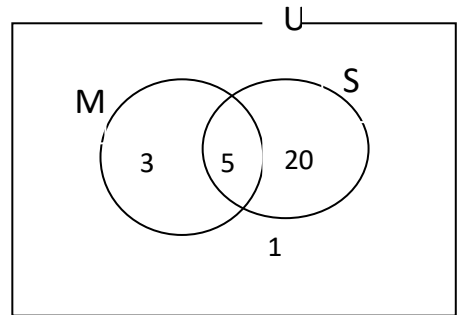
यहाँ, M र S ले क्रमशः गणित पढ्ने र विज्ञान पढ्ने U विद्यार्थीहरूको सङ्ख्याले सबै विद्यार्थीको समूह जनाउँछ ।

त्यसैले, $n(U) = 150$, $n(M) = 95$, $n(S) = 77$

$$n(\overline{M \cup S}) = 12$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} (i) \quad n(M \cup S) &= n(U) - n(\overline{M \cup S}) \\ &= 150 - 12 = 138 \end{aligned}$$



सूत्रअनुसार,

$$(ii) \quad n(M \cup S) = n(M) + n(S) - n(M \cap S)$$

$$138 = 95 + 77 - n(M \cap S) = 172 - n(M \cap S)$$

$$\therefore n(M \cap S) = 172 - 138 = 34$$

$$(iii) n_0(M) = n(M) - n(M \cap S) = 95 - 34 = 61$$

$$(iv) n_0(S) = n(S) - n(M \cap S) = 77 - 34 = 43$$

उदाहरण 3

एउटा गाँउका 120 जना मानिसहरूमा गरिएको सर्वेक्षणबाट प्राप्त नतिजा यसप्रकार छ ।

30 जनाले चिया मात्र मन पराउँछन् ।

40 जनाले कफी मात्र मन पराउँछन् ।

10 जनाले चिया र कफी मध्ये कुनै पनि मन पराउँदैनन् ।

यसका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

क) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

ख) दुवै पेय मन पराउने मानिसहरूको पत्ता लगाउनुहोस्

ग) कम्तिमा एक पेय मन पराउने मानिसहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।

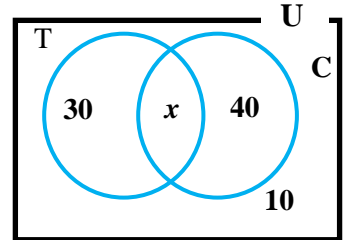
समाधान

मानौं, T र C ले क्रमशः चिया र कफी मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछन् । त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछ ।

प्रश्नअनुसार,

$$n(U) = 120, n_0(T) = 30, n_0(C) = 40 \text{ र } n(\overline{T \cup C}) = 10$$

$$\text{मानौं, } n(T \cap C) = x$$



प्राप्त जानकारीलाई भेन चित्रमा दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अब, भेन चित्रबाट हेर्दा,

$$30 + x + 40 + 10 = 120$$

$$\text{अथवा, } 80 + x = 120$$

$$\text{अथवा, } x = 120 - 80 = 40$$

$$\therefore x = 40$$

अथवा, $n(T \cap C) = 40$

त्यसैले, चिया र कफी दुबै मन पराउने विद्यार्थीहरू जम्मा 40 रहेछन् ।

कम्तिमा एक विषय मन पराउने विद्यार्थीहरूको $n(T \cup C) = 30 + 40 + 40 = 110$ रहेछ ।

उदाहरण 4

एउटा विद्यालयका 300 जना विद्यार्थीमा गरिएको सर्वेक्षणमा 175 जना क्रिकेट खेल र 150 जना फुटवल खेल मन पराउँछन् तर 25 जना कुनै पनि खेल खेल मन पराउँदैनन् । यसका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) दुबै खेल खेल मन पराउने विद्यार्थीहरूको पत्ता लगाउनुहोस्

(ग) एउटा मात्र खेल खेल मन पराउने विद्यार्थीहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं, C र F ले क्रमशः क्रिकेट र फुटवल खेल मन पराउने विद्यार्थीको समूह जनाउँछन । त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछ ।

प्रश्नअनुसार,

$$n(U) = 300, n(C) = 175, n(F) = 150 \text{ र}$$

$$n(\overline{C \cup F}) = 25$$

$$\text{मानौं, } n(C \cap F) = x$$

प्राप्त जानकारीलाई भेन चित्रमा निम्नानुसार दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अब, भेन चित्रबाट लेख्न सकिन्छ,

$$(175 - x) + x + (150 - x) + 25 = 300$$

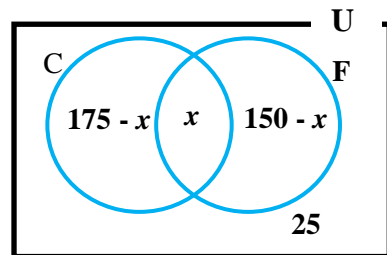
$$\text{अथवा, } 175 - x + x + 150 - x + 25 = 300$$

$$\text{अथवा, } 350 - x = 300$$

$$\text{अथवा, } x = 350 - 300$$

$$\therefore x = 50$$

$$\text{अथवा, } n(C \cap F) = 50$$



त्यसैले, क्रिकेट र फुटवल दुवै खेल मन पराउने विद्यार्थीको जम्मा 50 रहेछ ।

फेरि,

$$\text{क्रिकेट खेल मात्र मन पराउने विद्यार्थीको} = 175 - 50 = 125$$

$$\text{फुटवल खेल मात्र मन पराउने विद्यार्थीको} = 150 - 50 = 100$$

$$\text{त्यसैले, एक मात्र खेल खेल मन पराउने खेलाडीको} = 125 + 100 = 225 \text{ रहेछ ।}$$

उदाहरण 5

400 विद्यार्थीहरूमा गरिएको सर्वेक्षणमा बिहान पढ्न मात्र मन पराउने र दिउसो मात्र मन पराउनेको अनुपात 2:3 पाइयो, जसमध्ये जम्मा मानिसको 15% ले दुवै समयमा पढ्न मन पराए तर 7.5 प्रतिशतले दुवै समयमा पढ्न मन पराएनन् । यसका आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

क) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

ख) बिहान पढ्न मन पराउने र दिउसो पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरू बिचको फरक कति छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

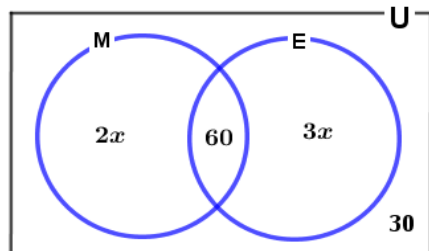
समाधान

मानौं, M र D ले क्रमशः बिहान र दिउसो पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछन् । त्यस्तै U ले जम्मा विद्यार्थीहरूको समूह जनाउँछ ।

प्रश्नअनुसार,

$$n(U) = 400, n(M \cap D) = 15\% \text{ of } 400 = 60$$

$$\text{र } n(\overline{M \cap D}) = 7.5\% \text{ of } 400 = 30$$



प्रश्नअनुसार यदि बिहान पढ्न मन पराउने सङ्ख्या $2x$ भए दिउसो पढ्न मन पराउने सङ्ख्या $3x$ हुन्छ । अर्थात्, $n_o(M) = 2x$, $n_o(D) = 3x$

प्राप्त जानकारीलाई भेन चित्रमा निम्नानुसार दायाँ भागमा प्रस्तुत गरिएको छ ।

अब, भेन चित्रबाट लेख्न सकिन्छ,

$$2x + 60 + 3x + 30 = 400$$

$$\text{अथवा, } 90 + 5x = 400$$

$$\text{अथवा, } 5x = 400 - 90$$

$$\text{अथवा, } 5x = 310$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{310}{5}$$

$$\therefore x = 62$$

त्यसैले,

$$\text{विहान पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरूको } = 2x + 60 = 2 \times 62 + 60 = 184 \text{ रहेछ ।}$$

$$\text{दिउसो पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरूको } = 3x + 60 = 3 \times 62 + 60 = 246 \text{ रहेछ ।}$$

$$\text{तसर्थ, दिउंसो र विहान पढ्न मन पराउने विद्यार्थीहरू बिचको फरक } 246 - 184 = 62 \text{ रहेछ ।}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. यदि $n(A) = 46$, $n(B) = 55$, छ । $A \subset B$ भए $n(A \cup B)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. a) समूहको गणनात्मकतालाई उदाहरणसहित प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
b) यदि समूह A र B मा $A \subset B$ भए $n(A \cup B)$ र $n(A \cap B)$ को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
c) यदि समूह A र B एक आपसमा खप्टिएका समूहहरू भए $n(A \cup B)$ को सूत्र उल्लेख गर्नुहोस् ।
3. यदि $n(U) = 125$, $n(A) = 80$, $n(B) = 90$, $n(A \cap B) = 60$, $n(\overline{A \cup B}) = 15$ भए, तलका समूहहरूको गणनात्मकता पत्ता लगाउनुहोस् ।
i) $n_o(A)$ ii) $n_o(B)$ iii) $n(A \cup B)$
4. a) यदि $n(U) = 200$, $n_o(M) = 2x$, $n_o(E) = 3x$, $n(M \cap E) = 60$ र $n(\overline{M \cup E}) = 40$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
b) यदि $n(U) = 350$, $n(A) = 200$, $n(B) = 220$ र $n(A \cap B) = 120$ भए $n(A \cup B)$ र $n(\overline{A \cup B})$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
c) यदि $n(A) = 35$ र $n(\overline{A}) = 25$ भए $n(U)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. एउटा बजारको सर्वेक्षण गर्दा 143 जनाले चाउमिन र 135 जनाले बिस्कुट खरीद गर्दा रहेछन् । यदि 70 जनाले चाउमिन र बिस्कुट दुवै खरीद गर्दा रहेछन् भने कम्तिमा एउटा खरीद गर्ने व्यक्तिहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. हरीगाउँका 400 परिवारमा गरिएको सर्वेक्षण अनुसार 275 परिवारले चामललाई मुख्य खाना बनाउँदा रहेछन् 230 परिवारले गहुँलाई मुख्य खाना बनाउँदा रहेछन् । यदि 33 परिवारले दुवैलाई प्रयोग गर्दा रहेछन् भने, अब चामल र गहुँ दुवैलाई मुख्य खाना बनाउने परिवार सख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. कक्षा 10 का विद्यार्थीहरूमध्ये 60% विद्यार्थीहरू नेपालीमा, 80% विद्यार्थीहरू विज्ञानमा उत्तीर्ण भएछन् र 20% विद्यार्थीहरू दुवै विषयमा उत्तीर्ण भएनन् भने,
 - a) कति प्रतिशत विद्यार्थीहरू दुवै विषयमा उत्तीर्ण भए होलान् ?
 - b) नेपालीमा मात्रै उत्तीर्ण कति प्रतिशत विद्यार्थी भए होलान् ?
 - c) विज्ञानमा मात्र कति प्रतिशत विद्यार्थी उत्तीर्ण भए होलान् ?
 - d) एउटा मात्रै विषयमा (exactly one) उत्तीर्ण हुने विद्यार्थीको प्रतिशत कति होला ?
8. a) एउटा कक्षाका 1800 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको सर्वेक्षणमा 450 जनाले सामाजिक मात्र र 600 जनाले इतिहास मात्र मन पराउँछन् तर 150 जनाले कुनै पनि मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।
 - i) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 - ii) दुवै विषय मन पराउने विद्यार्थीहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - iii) कम्तिमा पनि एक विषय मन पराउने विद्यार्थीहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।
- b) एउटा कक्षाका 1200 जना मानिसमा गरिएको सर्वेक्षणमा 100 जनाले पात्र क लाई मात्र र 200 जनाले पात्र ख लाई मात्र मन पराउँछन् तर 700 जनाले कुनै पनि पात्रलाई मन पराउँदैनन् । त्यसका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।
 - i) माथिको तथ्यलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 - ii) दुवै मात्र मन पराउने मानिसहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - iii) कम्तिमा एक पात्र मन पराउने मानिसहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

आफ्नो समुदायका केहि मानिसलाई तल दिइएका प्रश्न सोधी उत्तर सङ्कलन गर्नुहोस् :
तपाईंलाई कुन खेल खेल्न मन पर्छ ?

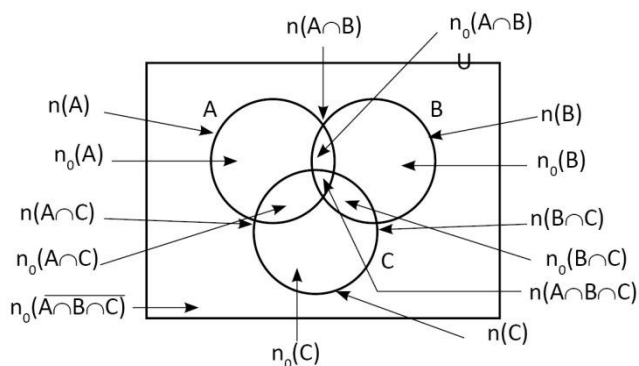
(क) क्रिकेट (ख) फुटबल (ग) क्रिकेट र फुटबल दुवै (घ) अन्य
माथिका प्रश्नको उत्तर प्राप्त गरिसकेपछि उक्त तथ्याङ्कहरूलाई भेन चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर :

1. 55 2. $n(B)$, $n(A)$ 3. i) 20 ii) 30 iii) 110
4. a) 20 b) 300, 50 c) 60 5) 138 6) 138
7. a) 60% b) 0% c) 20% d) 20% 8.a) ii) 600 iii) 1650
b. ii) 200 iii) 500

1.4 तीनओटा समूह सम्मिलित समूहहरूको गणनात्मकतासम्बन्धी समस्याहरू

यदि समूहहरू A , B , C
सर्वव्यापक समूह U का उप
समूहहरू हुन् भने दिइएको भेन
चित्रको अध्ययन गर्दा
निम्नानुसार समूह तथा
तिनीहरूको गणनात्मकता
पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



$n_o(A)$, $n_o(B)$, $n_o(C)$, n_o

$(A \cap B)$, $n_o(B \cap C)$, $n_o(A \cap C)$, $n(A \cap B \cap C)$ र $n_o(\overline{A \cup B \cup C})$.

दिइएको भेन चित्रको अध्ययन गर्दा,

$$(क) \quad n(A \cup B \cup C) = n_o(A) + n_o(B) + n_o(C) - n_o(A \cap B) - n_o(B \cap C) - n_o(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

$$(ख) \quad n(A) = n_o(A) + n_o(A \cap B) + n_o(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

फेरी,

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n[(A \cup (B \cup C))] \\&= n(A) + n(B \cup C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)] \\&= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B) \cap (A \cap C)] \\&= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + (A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

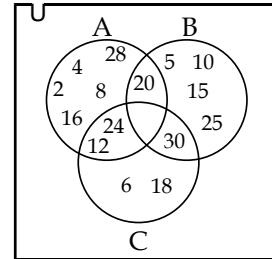
उल्लिखित सूत्रहरूका आधारमा तलका केही सूत्रहरू बनाउन सकिन्छ ।

- (क) समूह A मा मात्र पर्ने $n_o(A) = n(A \cup B \cup C) - n(B \cup C)$
(ख) समूह B मा मात्र पर्ने $n_o(B) = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup C)$
(ग) समूह C मा मात्र पर्ने $n_o(C) = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B)$
(घ) समूह B मा मात्र पन $n_o(A) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
(ङ) समूह B मा मात्र पन $n_o(B) = n(B) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
(च) समूह B मा मात्र पन $n_o(C) = n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
(छ) समूह $A \cap B$ मा मात्र पन $n_o(A \cap B) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C)$
(ज) समूह $B \cap C$ मा मात्र पन $n_o(B \cap C) = n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$
(झ) समूह $A \cap C$ मा मात्र पन $n_o(A \cap C) = n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$
(ञ) $n(A \cap B \cap C) = n(U) - n\overline{A \cup B \cup C}$

उदाहरण 1

सँगैको भेनचित्रको अवलोकन गरी निम्न समूहको गणनात्मक पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (i) $n(A)$ (ii) $n(B)$ (iii) $n(C)$
(iv) $n(A \cup B)$ (v) $n(B \cap C)$ (vi) $n(A \cap B \cap C)$
(vii) $n(A - B)$ (viii) $n(C - A)$ (ix) $n(A \cup B \cup C)$
(x) $n\{A \cup (B - C)\}$



समाधान

भेन चित्रको अध्ययन गर्दा,

i) $A = \{2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$; $n(A)= 8$

ii) $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$; $n(B)= 6$

iii) $C = \{6, 12, 18, 24, 30\}$; $n(C) = 5$

iv) $A \cap B = \{20\}$; $n(A \cap B) = 1$

v) $B \cap C = \{30\}$; $n(B \cap C) = 1$

vi) $A \cap B \cap C = \{ \}$; $n(A \cap B \cap C) = 0$

vii) $A - B = \{2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\} - \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$$= \{2, 4, 8, 12, 16, 24, 28\} ; n(A - B) = 7$$

viii) $C - A = \{6, 12, 18, 24, 30\} - \{2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$

$$= \{6, 18, 30\} ; n(C - A) = 3$$

ix) $A \cup B \cup C = \{2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\} \cup \{5, 10, 15, 20, 25, 30\} \cup \{6, 12, 18, 24, 30\}$

$$= \{2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 28, 30\} ; n(A \cup B \cup C) = 15$$

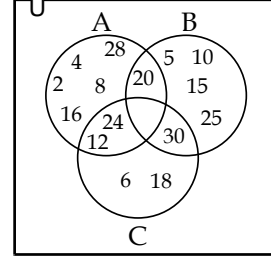
x) $(A \cup B) = \{2, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\} \cup \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$$= \{2, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30\}$$

$$A \cup B - C = \{2, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30\} - \{6, 12, 18, 24, 30\}$$

$$= \{2, 4, 5, 8, 10, 15, 16, 20, 25, 28\}$$

$$n\{(A \cup B) - C\} = 10$$



उदाहरण 2

यदि $n(A) = 14$, $n(B) = 13$, $n(C) = 22$, $n(A \cap B \cap C) = 6$ र $n(A \cap B) = 7$, $n(B \cap C) = 9$, $n(C \cap A) = 11$, $n(\overline{A \cup B \cup C}) = 4$ भए भेन चित्रको प्रयोग गरी $n(U)$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $n(A) = 14$, $n(B) = 13$ $n(C) = 22$

$$n(A \cap B \cap C) = 6 \quad n(A \cap B) = 7$$

$$n(B \cap C) = 9 \quad n(B \cap A) = 11$$

$$n(\overline{A \cup B \cup C}) = 4 \quad n(U) = ?$$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 14 + 13 + 22 - 7 - 9 - 11 + 6 \\ &= 55 - 27 \\ &= 28 \end{aligned}$$

$$n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(\overline{A \cup B \cup C}) = 28 + 4 = 32$$

उदाहरण 2

समूहहरू P, Q, R सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन्, जसमा $n(P) = 100$, $n(Q) = 90$,

$n(R) = 110$, $n(P \cap Q) = 60$, $n(Q \cap R) = 40$, $n(P \cap R) = 45$ र $n(P \cup Q \cup R) = 200$ भए $n(P \cap Q \cap R)$ कति होला ?

समाधान : यहाँ, $n(P) = 100$ $n(Q) = 90$ $n(R) = 110$ $n(P \cap Q) = 60$
 $n(Q \cap R) = 40$ $n(P \cap R) = 45$ $n(P \cup Q \cup R) = 200$

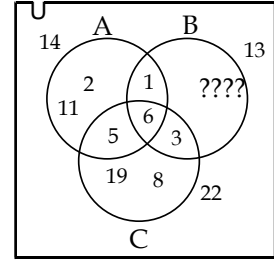
हामीलाई थाहा छ,

$$n(P \cup Q \cup R) = n(P) + n(Q) + n(R) - n(P \cap Q) - n(Q \cap R) - n(P \cap R) + n(P \cap Q \cap R)$$

$$\text{or, } 200 = 100 + 90 + 110 - 60 - 40 - 45 + n(P \cap Q \cap R)$$

$$\text{or, } 200 = 155 + n(P \cap Q \cap R)$$

$$\therefore n(P \cap Q \cap R) = 200 - 155 = 45$$

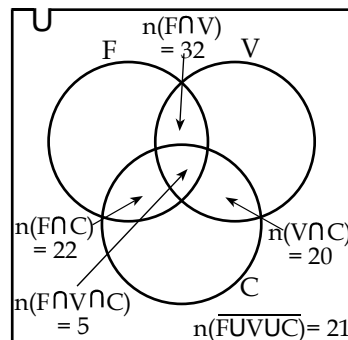


उदाहरण 4

100 जना विद्यार्थीहरूमा गरिएको सर्वेक्षणमा 60 जना फुटबल, 48 जना भलिबल र 40 जना क्रिकेट मन पराउँछन् । त्यस्तै 32 जना फुटबल र भलिबल, 22 जना फुटबल र क्रिकेट र 20 जनाले भलिबल र क्रिकेट खेल मन पराए । 5 जनाले तिनओटै खेल खेल मन पराए भने भेनचित्रको प्रयोग गरी कुनैपनि खेल मन नपराउने विद्यार्थी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, फुटबल खेल्ने विद्यार्थीहरूलाई F, भलिबल खेल मन पराउनेहरूलाई V र क्रिकेट खेल मन पराउनेहरूलाई C मानौं ।



$$n(U) = 100$$

$$n(F) = 60$$

$$n(V) = 48$$

$$n(C) = 40$$

$$n(F \cap V) = 32$$

$$n(F \cap C) = 22$$

$$n(C \cap V) = 20$$

$$n(\overline{F \cup V \cup C}) = ?$$

अब, भेन चित्रको अध्ययन गर्दा,

$$n(F \cup V \cup C) = n(F) + n(V) + n(C) - n(F \cap V) - n(V \cap C) - n(C \cap F) + n(F \cap V \cap C)$$

$$= 60 + 48 + 40 - 32 - 22 - 20 + 5$$

$$= 153 - 74$$

$$= 79$$

$$n(\overline{F \cup V \cup C}) = n(U) - n(F \cup V \cup C)$$

$$= 100 - 74$$

$$= 21$$

∴ 21 जनाले कुनै पनि खेल खेल मन पराउँदा रहेनछन् ।

उदाहरण 5

एउटा सर्वेक्षणमा बिहान चिया पिउने 60 जना, कफी पिउने 45 जना, दुध पिउने 40 जना, कफी र दुध पिउने 13 जना, कफी र चिया पिउने 25 जना, चिया र दूध पिउने 20 जना र तीनओटै 10 जना रहेछन् । यदि 5 जनाले तीन किसिमकै पेय पिउँछन् भने

- (क) माथिको तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 (ख) कम्तिमा एउटा पेय पिउने कति जना होलान् ?
 (ग) जम्मा कति जनामा सर्वेक्षण गरिएको रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

चिया पिउनेलाई T, कफी पिउनेलाई C, दूध पिउनेलाई M मानौं

यहाँ, $n(T) = 60$

$$n(C) = 45$$

$$n(M) = 40$$

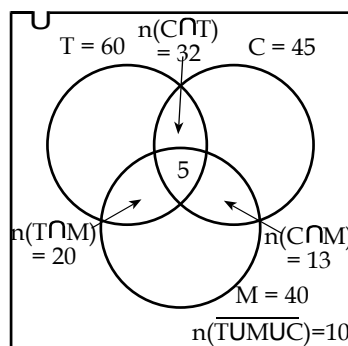
$$n(C \cap M) = 13$$

$$n(C \cap T) = 25$$

$$n(T \cap M) = 20$$

$$n(T \cap M \cap T) = 5$$

$$n(\overline{C \cup M \cup T}) = 10$$



- (क) भेन चित्रमा देखाउँदा,
 (ख) $n(T \cup M \cup C) = n(T) + n(M) + n(C) - n(T \cap M) - n(M \cap C) + n(C \cap T) = n(T \cap M \cap C)$
 $= 60 + 45 + 40 - 13 - 25 - 20 + 5$
 $= 150 - 68$
 $= 82$ जना
 (ग) जम्मा सर्वेक्षण गरिएको $= 82 + 10 = 92$

$$n(U) = 92$$

(घ) एउटा मात्र पेय लिएको

$$\begin{aligned}n_0(T) + n_0(M) + n_0(C) \\= 30 + 27 + 15 \\= 72 \text{ जना}\end{aligned}$$

उदाहरण 6

एउटा विद्यालयका 200 विद्यार्थीहरूमध्ये 60 प्रतिशत अङ्ग्रेजी, 32 प्रतिशत गणित र अङ्ग्रेजी 20 प्रतिशत विज्ञान र गणित, 22 प्रतिशत विज्ञान र अङ्ग्रेजी 15 प्रतिशतले गणितमात्र, 10 प्रतिशतले विज्ञान मात्र र 5 प्रतिशतले तीनओटै विषयहरू रुचाउँदछन् भने, भेनचित्रको प्रयोग गरी गणित रुचाउने र अङ्ग्रेजीमात्र रुचाउने विद्यार्थी पत्ता लगाउनुहोस् ।

a) अङ्ग्रेजी पढ्न रुचाउनेलाई E, गणित रुचाउनेलाई M र विज्ञान रुचाउनेलाई S मानौं ।
यहाँ,

$$n(U) = 200$$

$$n(E) = 60\%$$

$$n(M \cap E) = 32\%$$

$$n(S \cap M) = 20\%$$

$$n(S \cap E) = 22\%$$

$$n_0(M) = 15\%$$

$$n_0(S) = 10\%$$

$$n(S \cap E \cap M) = 5\%$$

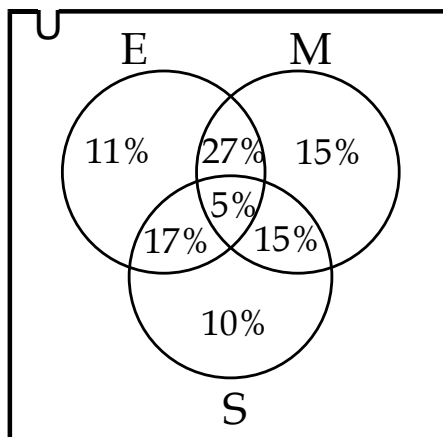
गणित विषय रुचाउने विद्यार्थी, $n(M)$

$$= (15 + 15 + 5 + 27)\% = 62\%$$

$$= 100 \times \frac{62}{100}$$

$$= 114$$

\therefore 144 जना रहेछन् ।



अङ्ग्रेजी मात्र रूचाउने विद्यार्थी,

$$n_0(E) = 11\%$$

$$= 200 \text{ को } 11\%$$

$$= 200 \times \frac{11}{100}$$

$$= 22$$

∴ 22 जना रहेछन् ।

उदाहरण 7

एउटा संस्थाले गरेको सर्वेक्षण अनुसार एचआईभी सन्ने कारणहरूमध्ये 110 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्कका कारणले, 75 जनाले सिरिन्जको प्रयोगले र 60 जनाले सङ्क्रमित आमाबाट उनीहरूका सन्तानमा सन्ने कुरा बताए । त्यस्तै 25 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्क र सिरिन्जको प्रयोगले, 10 जनाले सिरिन्ज तथा सङ्क्रमित आमाबाट बताए 10 जनाले असुरक्षित यौन सम्पर्क र सङ्क्रमित आमाबाट बच्चामा सन्ने बताए भने 5 जनाले तीनओटै कारणहरू औँल्याए । यदि प्रत्येकले कम्तिमा एउटा उत्तर दिए भने :

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) जम्मा कतिजना मानिसहरूमा सर्वेक्षण गरिएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सिरिन्जको प्रयोगबाट मात्र भन्नेहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

असुरक्षित यौन सम्पर्कबाट HIV/AIDS सङ्घ भन्नेलाई A, सिरिन्जबाट HIV/AIDS सङ्घ भन्नेलाई B र सङ्क्रमित आमाबाट सङ्घ भन्नेलाई C मानौं ।

$$(क) n(A) = 110$$

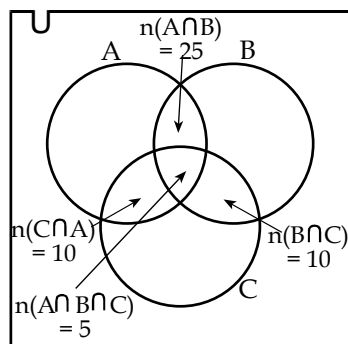
$$n(B) = 75$$

$$n(C) = 60$$

$$n(A \cap B) = 25$$

$$n(B \cap C) = 10$$

$$n(A \cap B \cap C) = 5$$



$$n(C \cap A) = 10$$

अब,

(ख) जम्मा

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\&= n(A \cap B \cap C) \\&= 110 + 75 + 60 - 25 - 10 + 0 + 5 \\&= 185 + 60 - 45 + 5 \\&= 250 - 45 \\&= 205\end{aligned}$$

जम्मा सर्वेक्षण गरीएको सङ्ख्या = 205

$$\begin{aligned}(\text{ग}) \text{ सिरिन्जको प्रयोगबाट मात्र भन्ने सङ्ख्या} &= n(B) - 25 - 5 - 10 \\&= 75 - 25 - 15 \\&= 30 \text{ जना}\end{aligned}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- यदि A, B, C, सर्वव्यापक समूह U का सप्तसमूहहरू भएमा $n(U) = 130$, $n(A) = 70$, $n(B) = 55$, $n(C) = 40$, $n(A \cap B) = 20$, $n(B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 18$ र $n(A \cap B \cap C) = 8$ भेन चित्रको निर्माण गरी तलका समूहहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - $n_o(A)$
 - $n_o(B)$
 - $n_o(A \cap B)$
 - $n_o(A \cup B)$
 - $n(\overline{A \cup B \cup C})$
- यदि $n(A) = 36$, $n(B) = 36$, $n(C) = 30$, $n(A \cap B) = 15$, $n(A \cap C) = 15$, $n(B \cap C) = 12$, $n(A \cap B \cap C) = 6$ र $n(\overline{A \cup B \cup C}) = 66$, भए पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - A, B, C मध्ये एउटा मात्र
 - A, B र C मध्ये दुईओटा मात्र
- 200 जना विद्यार्थीहरू सम्मिलित परीक्षामा 70 जना अङ्ग्रेजीमा, 80 जना गणितमा, 60 जना नेपालीमा, 35 जना अङ्ग्रेजी र गणितमा, 25 जना अङ्ग्रेजी र नेपालीमा,

- 35 जना नेपाली र गणितमा सफल भएछन् र 10 जना तीनओटै विषयमा सफल भए भने भेनचित्र खिचेर तीनओटै विषयमा सफल नहुने विद्यार्थी पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. लेकसाइडमा 750 जना पर्यटकहरूमा गरिएको सर्वेक्षण 450 ले बोटीङ, 300 जनाले हाइकिङ, 250 ले सफारी मन पराए र 30 जनाले कुनैपनि क्रियाकलाप मन नपर्ने बताए । त्यस्तै 150 जनाले बोटीङ र हाइकिङ, 90 ले बोटीङ र सफारी र 75 ले हाइकिङ र सफारी मन पराए भने भेनचित्र तयार गरी तीनओटै क्रियाकलाप मन पराउने पर्यटकहरूको पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. एउटा परीक्षामा सम्मिलित विद्यार्थीहरूमध्ये 25% ले नेपालीमा, 35% ले विज्ञानमा, 40% गणित, 15% ले नेपाली र विज्ञानमा, 10% ले नेपाली र गणितमा, 15% ले विज्ञान र गणितमा र 5% ले तीनओटै विषयमा A+ हाँसिल गरे ।
- i) माथिको सूचनालाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :
- ii) कति प्रतिशत विद्यार्थीले कुनै पनि विषयमा A+ हाँसिल गरेनन् ?
- iii) कति प्रतिशतले विद्यार्थीले एउटा मात्र विषयमा A+ हाँसिल गरेनन् ?
- iv) कति प्रतिशतले विद्यार्थीले दुई मात्र विषयमा A+ हाँसिल गरेनन् ?
6. एउटा विज्ञापनमा दरखास्त दिनेमध्ये 140 जना तथ्याङ्कशास्त्रमा, 120 जना कम्प्यूटरमा, 100 जनाले अंग्रेजीमा, 60 जना तथ्याङ्क र कम्प्यूटरमा, 40 जना कम्प्यूटर र अङ्ग्रेजीमा, 50 जना अङ्ग्रेजी र तथ्याङ्क शास्त्रमा, 20 जना तीनओटैमा दक्ष भएको पाइयो । यदि सबै जना कम्तीमा एउटा विषयमा दक्ष भएको भए भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी
- i) एउटा विषयमा मात्र दक्ष भएको उमेदवारको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- ii) दुईओटा विषयमा मात्र दक्ष भएको उमेदवारको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- iii) जम्मा कति जनाले दरखास्त दिएका रहेछन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

तल दिइएका प्रश्नहरू 100 जना छिमेकीहरूलाई सोध्नुहोस् । तपाईंलाई तलका मध्ये विहान कुन कुन पिउन मन पर्दछ ?

क) चिया ख) कफि ग) दुध घ) चिया र कफि ङ) कफि र दुध च) दुध र चिया छ) चिया, कफि र दुध तीनै चिज ज) कुनैपनि होइन ।

प्राप्त तथ्याङ्कलाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

चक्रीय ब्याज (Compound Interest)

2.0 परिचय (Introduction)

सुमितले शिवबाट रु.1,500 वार्षिक 10% को दरले 2 वर्षको लागि ऋण लिएछन् । तलका दिइएका प्रश्नहरू र तिनका उत्तरहरू अध्ययन गर्नुहोस् ।

(क) सुमितले ऋण लिएको रकमलाई के भनिन्छ ?

यहाँ, सुमितले शिवबाट रु.1500, ऋण लिएका छन् यसलाई **साँवा** अथवा **मूलधन (Principal)** भनिन्छ ।

(ख) के 1 वर्षको व्याजलाई 2 ले गुणन गर्नु भन्ने 2 वर्षको व्याज प्राप्त गर्न सकिन्छ त ?

हरेक वर्षको अन्त्यमा आउने व्याज बराबर हुने भइकोले पहिलो वर्षको व्याजलाई 2 ले गुणन गर्नु भन्ने 2 वर्षको जम्मा व्याज पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(ग) 2 वर्ष पछि सुमितले शिवलाई जम्मा कति रकम बुझाउनु पर्छ ?

2 वर्ष पछि सुमितले शिवलाई रु. 1800 बुझाउनु पर्दछ ।

(घ) 2 वर्ष पछि बुझाउने रकमलाई के भनिन्छ ?

2 वर्ष पछि बुझाउने जम्मा रकमलाई **मिश्रधन (Amount)** भनिन्छ ?

(ङ) दुई वर्षको अन्त्यमा सुमितबाट शिवले पाउने व्याजलाई के भनिन्छ ?

यसरी दुई वर्षको अन्त्यमा सुमितबाट शिवले पाउने व्याजलाई साधारण व्याज (Simple Interest) भनिन्छ ।

कुनै निश्चित समयका लागि एकमुष्ट व्याज निकालिन्छ भन्ने त्यसलाई साधारण व्याज भनिन्छ । साधारण व्याजलाई SI अथवा I ले जनाइन्छ । यदि समय महिना (वा दिन) मा र व्याज दर प्रतिमहिना (वा दिन) मा दिइएको छ भने महिना (वा दिनलाई) वर्षमा लगेर र दरलाई प्रति वर्षमा लगेर साधारण व्याज निकाल्न सकिन्छ । यदि मूलधन (P), समय (T), व्याजदर (R) दिइएको अवस्थामा

साधारण व्याज (SI) = (I) = $\frac{PTR}{100}$ हुन्छ ।

यसै सूत्रलाई सरलीकरण गरी $P = \frac{I \times 100}{TR}$, $T = \frac{I \times 100}{PR}$ र $R = \frac{I \times 100}{PT}$ लेख्न सकिन्छ ।

व्याज सहितको रकमलाई मिश्रधन भन्दछन् ।

त्यसैले, मिश्रधन (A) = $P + I = P + \frac{PTR}{100}$ र यसलाई सरल गर्दा $P = \frac{100 \times A}{100 + TR}$ पनि लेख्न सकिन्छ ।

2.1. चक्रीय व्याजको परिचय (Introduction of Compound Interest)

2.1.1 वार्षिक चक्रीय व्याज (Compound Interest compounded Annually)

क्रियाकलाप 1

सुनिल एक कम्पनीमा काम गर्दछन् । उनले आफूसँगै कामगर्ने अर्को कामदारसँग वार्षिक 12% व्याज दरमा 2 वर्षका लागि वार्षिक व्याज गणना गर्ने गरी रु.50,000 ऋण स्वरूप लिए । सुनिलले पहिलो वर्षको अन्त्यमा तिर्नु पर्ने व्याज विशेष कारणवश: तिर्न सकेनन् फलस्वरूप पहिलो वर्षको व्याजको समेत दोस्रो वर्षमा व्याज तिर्नुपर्ने भयो । यस अवस्थामा तल सोधिएका प्रश्नहरू अध्ययन गर्नुहोस् र उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

- पहिलो वर्षमा तिर्नुपर्ने व्याज रकम कति होला ?
- दोस्रो वर्षको लागि सुनिलको मूलधन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- सुनिलले दोस्रो वर्षको व्याज रकम कति तिर्नुपर्ने भयो ?
- सुनिलले पहिलो र दोस्रो वर्षमा गरेर जम्मा कति व्याज तिरे होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ?

सुनिलले पहिलो वर्षमा तिर्नुपर्ने व्याज $(I_1) = \frac{PTR}{100} = \frac{5,000 \times 1 \times 12}{100} = \text{रु.600}$ भयो ।

उक्त सुनिलले पहिलो वर्षको अन्त्यमा तिर्नु पर्ने व्याज विशेष कारणवश: तिर्न सकेनन् फलस्वरूप, सुनिलको दोस्रो वर्षको मूलधन $(P_1) = P + I_1 = \text{रु.5,000} + \text{रु.600} = \text{रु.5,600}$ हुन्छ ।

तसर्थ, दोस्रो वर्षको व्याज $(I_2) = \frac{P_1 TR}{100} = \frac{5,600 \times 1 \times 12}{100} = \text{रु.672}$ भयो ।

त्यसकारण, सुनिलले पहिलो र दोस्रो वर्षमा गरेर तिरेको जम्मा व्याज = रु.,600 + रु.672 = रु.1,272

क्रियाकलाप 2

T वर्षको लागि, वार्षिक R % ब्याजदरमा, कुनै वित्तीय संस्थामा जम्मा गरेको मूलधन (P) छ भने तलका प्रश्नहरू अध्ययन गर्नुहोस् र उत्तर के होला एकछिन सोच्नुहोस् है त ।

क) एक वर्षको अन्त्यमा ब्याज कति हुन्छ होला ?

ख) दुई वर्षको अन्त्यमा ब्याज कति हुन्छ ?

ग) त्यसैगरी, तीन वर्ष, चार वर्ष, ..., T वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज कतिकति हुन्छ ?

के तपाइँले सोच्नु भयो त ?

$$\begin{aligned}\text{एक वर्षको अन्त्यमा हुने ब्याज } (I_1) &= P \times T \times R \% \\ &= P \times 1 \times R \% \\ &= PR\%\end{aligned}$$

$$\text{एक वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन } (A_1) = P + I_1 = P + PR \% = P (1 + R \%)$$

निष्कर्ष यसप्रकार छ,

एक वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन = दोस्रो वर्षको मूलधन हुन्छ ।

$$\text{त्यसैले, दोस्रो वर्षको मूलधन } (P_2) = P (1 + R \%)$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो वर्षको ब्याज } (I_2) &= P (1 + R \%) \times 1 \times R \% \\ &= P (1 + R \%) R \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दोस्रो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन } (A_2) &= P (1 + R \%) + P (1 + R \%) R \% \\ &= P (1 + R \%) (1 + R \%) \\ &= P (1 + R \%)^2\end{aligned}$$

त्यसैगरी दोस्रो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन = तेस्रो वर्षको लागि मूलधन

$$\text{त्यसैले, तेस्रो वर्षको लागि मूलधन } (P_3) = P (1 + R \%)^2$$

$$\begin{aligned}\text{तेस्रो वर्षको ब्याज } (I_3) &= P_3 \times T \times R \% \\ &= P (1 + R \%)^2 \times 1 \times R \% \\ &= P (1 + R \%)^2 R \%\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{तेस्रो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन (A}_3\text{)} &= P_3 + I_3 \\
&= P (1 + R \%)^2 + P (1 + R \%)^2 R \% \\
&= P (1 + R \%)^2 (1 + R \%) \\
&= P (1 + R \%)^3
\end{aligned}$$

$$\text{त्यसैगरी चौथो वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन (A}_4\text{)} = P (1 + R \%)^4$$

$$\text{त्यसैगरी T वर्षको अन्त्यमा हुने मिश्रधन (A)} = P (1 + R \%)^T$$

$$\text{अतः T वर्षको अन्त्यमा हुने चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{त्यसैगरी चक्रीय ब्याज (C.I)} = \text{मिश्रधन (CA)} - \text{मूलधन (P)}$$

$$C.I = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T - P$$

$$C.I = P \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

2.1.2 अर्धवार्षिक रूपमा व्याज गणना गर्दा

क्रियाकलाप 1

यदि अर्धवार्षिक रूपमा (6 महिनामा) व्याज गणना गरिन्छ भने व्याजदर R % लाई $\frac{R}{2}\%$ प्रति 6 महिना र समय T लाई 2T अर्धवार्षिक लेखिन्छ भने यस्तो अवस्थामा चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? सोच्नुहोस् त । के यसलाई पनि वार्षिक रूपमा व्याज गणना गर्दा जसरी लेख्न सकिन्छ त ?

$$\text{अब, चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R}{2 \times 100}\right)^{2T} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{र त्यसैगरी, चक्रीय व्याज C.I} = P \left[\left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T} - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

2.1.3 त्रैमासिक रूपमा (3 महिना) मा व्याज गणना गर्दा

क्रियाकलाप 1

कुनै बैंकमा जम्मा गरेको मूलधन र व्याज एक चौथाई वर्ष (3महिनामा) मा गणना गर्ने गरिएको छ भने व्याजदर R % लाई $\frac{R}{4}$ % प्रति एक चौथाई वर्ष र समय T लाई 4T एक चौथाई वर्ष लेखिन्छ । यस्तो अवस्थामा,

(क) चक्रीय व्याज कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(ख) चक्रीय मिश्रधन कसरी निकाल्न सकिन्छ ? वार्षिक र अर्धवार्षिक रूपमा व्याज गणना गरे जसरी नै एक चौथाई वर्षमा पनि गणना गर्न सकिन्छ होला ? विचार गर्नुहोस् र इन्टरनेट वा आफूलाई सिकाउने मानिसबाट पनि सिकेर निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

निष्कर्ष यस प्रकार छ ।

$$\text{त्रैमासिक चक्रीय व्याज (CI)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right]$$

$$\text{त्रैमासिक चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P + CI$$

$$= P + P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right]$$

$$= P + P \left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - P$$

$$= P \left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T}$$

अतः कुनै मूलधन प्रत्येक वर्ष वा निश्चित समय अवधि (वार्षिक, अर्धवार्षिक वा त्रैमासिक) पश्चात् व्याज गणना गरी व्याजलाई मूलधनमा जोडेर पुनः व्याज गणना गरिन्छ भने त्यसलाई चक्रीय व्याज (compound interest) भनिन्छ । चक्रीय व्याज र मूलधनको योगफललाई चक्रीय मिश्रधन (compound amount) भनिन्छ ।

2.1.3 प्रत्येक वर्षको व्याजदर फरक फरक भएको अवस्थामा

क्रियाकलाप 1

यदि 3 वर्षमा व्याजको दर पहिलो वर्षको $R_1\%$, दोस्रो वर्षको $R_2\%$, तेस्रो वर्षको $R_3\%$ भएमा चक्रीय व्याज वार्षिक गणना गरी चक्रीय मिश्रधन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} = P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \text{ र}$$

$$\text{चक्रीय व्याज (C.I)} = P \left[\left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) - 1 \right]$$

यदि समय 'T' वर्ष र 'M' महिनामा दिइएको छ भने चक्रीय व्याज र चक्रीय मिश्रधन वार्षिक रूपमा गणना गर्दा कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ,?

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (C.A)} = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \left(1 + \frac{MR}{1200}\right)$$

$$\text{चक्रीय व्याज (C.I)} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \left(1 + \frac{MR}{1200}\right) - 1 \right]$$

उदाहरण 1

रु. 5,000 को वार्षिक 5 % व्याज दरमा 2 वर्ष पछि चक्रीय व्याज र चक्रीय मिश्रधन कति हुन्छ ? चक्रीय व्याज पत्ता लगाउने सूत्र प्रयोग नगरी र गरी दुवै तरिकाबाट पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

सूत्र प्रयोग नगरिकन चक्रीय व्याज पत्ता लगाउने तरिका

$$\text{मूलधन (P)} = \text{रु. } 5,000$$

$$\text{व्याजदर (R)} = 5 \% \text{ प्रतिवर्ष}$$

$$\text{समय (T)} = 2 \text{ वर्ष}$$

$$\text{पहिलो वर्षको अन्त्यमा व्याज (I}_1\text{)} = \frac{P \times T \times R}{100} = \text{रु. } \frac{5,000 \times 1 \times 5}{100} = \text{रु. } 250$$

$$\text{दोस्रो वर्षको मूलधन} = \text{पहिलो वर्षको अन्त्यको मिश्रधन} = \text{रु. } 5,000 + \text{रु. } 250 = \text{रु. } 5,250$$

$$\text{फेरी, दोस्रो वर्षको व्याज (I}_2\text{)} = \text{रु. } \frac{5,250 \times 1 \times 5}{100} = \text{रु.} 262.5$$

$$\text{दोस्रो वर्षको अन्त्यमा, मिश्रधन (A)} = \text{रु. } 5,250 + \text{रु.} 262.5 = \text{रु. } 5,512.5$$

$$\text{चक्रीय व्याज} = \text{रु. } 5,512.5 - \text{रु. } 5,000 = \text{रु.} 512.50$$

सूत्र प्रयोग गरेर चक्रीय व्याज पत्ता लगाउने

$$\text{यहाँ, सावाँ (P)} = \text{रु. } 5000$$

$$\text{समय (T)} = 2 \text{ वर्ष}$$

$$\text{व्याजदर (R)} = 5\% \text{ प्रतिवर्ष}$$

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA)} = ?$$

$$\text{चक्रीय व्याज (CI)} = ?$$

$$\text{सूत्रअनुसार, CI} = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 \left[\left(1 + \frac{5}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 \left[\left(\frac{100+5}{100} \right)^2 - 1 \right] (\because 1 \text{ र } 100 \text{ लस लिएपछि})$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 \left[\left(\frac{105}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 [(1.05)^2 - 1] (\because 105 \text{ लाई } 100 \text{ भाग गरेपछि } 1.05 \text{ हुन्छ})$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 [1.1025 - 1]$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 [0.1025]$$

$$\text{अथवा, CI} = 5,000 [0.1025]$$

$$\text{अथवा, CI} = \text{रु. } 512.50$$

$$\therefore \text{चक्रीय व्याज (CI)} = \text{रु. } 512.50$$

उदाहरण 2

रु. 20,000 को 1 वर्ष 6 महिनाको वार्षिक 10% का दरले हुन आउने साधारण व्याज भन्दा अर्धवार्षिक चक्रीय-व्याज कतिले फरक छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सावाँ (P) = रु. 20,000

समय (T) = 1 वर्ष 6 महिना = $(1 \text{ वर्ष} + \frac{6}{12} \text{ वर्ष})$ (:: वर्षलाई महिनामा परिवर्तन गर्दा 12 ले भाग गर्नु पर्छ)

समय (T) = $\frac{3}{2}$ वर्ष = 1.5 वर्ष (:: 12 लस लिई सरल गर्दा)

व्याजदर (R) = 10% प्रति वर्ष

साधारण व्याज = ?

अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{साधारण व्याज(SI)} = \frac{\text{PTR}}{100} = \frac{20,000 \times 1.5 \times 10}{100} = \text{रु. 3000}$$

अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजको सूत्रअनुसार,

$$\begin{aligned}(\text{CI}) &= P \left[\left(1 + \frac{R}{200} \right)^{2T} - 1 \right] \quad (\text{:: अर्धवार्षिक व्याजदर भएकोले} \\ &\quad \text{यो सूत्रको प्रयोग गरिएको}) \\ &= \text{रु. } 20,000 \left[\left(1 + \frac{10}{200} \right)^{2 \times 1.5} - 1 \right] \\ &= \text{रु. } 20,000 \times \left[\left(\frac{210}{200} \right)^{2 \times 1.5} - 1 \right] \\ &= \text{रु. } 20,000 \times 0.157625 \\ &= \text{रु. } 3,152.50\end{aligned}$$

त्यसकारण, साधारण व्याज (SI) = रु. 3,000 र अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज (CI) = रु. 3,152.50 हुन्छ ।

अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज (CI) र साधारण व्याज (SI) मा फरक = $CI - SI = \text{रु.}3152.50 - \text{रु.}3000 = \text{रु.}152.50$

उदाहरण 3

रमेशले बैङ्कबाट 2 वर्षको लागि वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा रु. 1,20,000 ऋण लिएका थिए । दुई वर्षको अन्त्यमा उनले रु. 30,528 व्याज तिरे भने वार्षिक कति प्रतिशतका दरले ऋण लिएका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

चक्रीय व्याज (CI) = रु. 30,528

समय = 2 वर्ष

साँवा (P) = 1,20,000

व्याजदर (R) = ?

वार्षिक चक्रीय व्याजको सूत्रअनुसार, चक्रीय व्याज (CI) = $P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$

अथवा $30,528 = 1,20,000 \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 - 1 \right]$

अथवा $\frac{30,528}{1,20,000} = \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 - 1 \right]$

अथवा $0.2544 = \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 - 1$

अथवा $0.2544 + 1 = \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$

अथवा $1.2544 = \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$

दुवैतर्फ वर्गमूल लिँदा,

अथवा $\sqrt{1.2544} = \sqrt{\left(1 + \frac{R}{100} \right)^2}$

अथवा $1.12 = 1 + \frac{R}{100}$

$$\text{अथवा } 1.12 - 1 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा } 0.12 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा } 0.12 \times 100 = R$$

$$R = 12\%$$

अतः वार्षिक व्याजदर (R) = 12% हुन्छ ।

उदाहरण 4

नोर्देन सगरमाथा माध्यमिक विद्यालयको कक्षा 10 मा पढ्छन् । उनको पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा सोधिएको प्रश्न यस प्रकार छ ।

करुणाले रु. 75,000 प्रतिवर्ष 10 % चक्रीय व्याजका दरले 2 वर्षमा तिर्ने गरी छिमेकी बबितालाई दिएकी छन् । बबिताले तत्कालै सो रकम त्यति नै समयको लागि सोही दरमा त्रैमासिक चक्रीय व्याज तिर्ने गरी सुमनलाई दिएकी छन् भने,

(क) बबिताले तिर्ने चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सुमनले तिर्ने त्रैमासिक चक्रीय व्याज कति हुन्छ ?

(ग) सुमन र बबिताले तिर्ने चक्रीय व्याजमा फरक कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मूलधन (P) = रु. 75,000

व्याजको (R) = रु. 10%

समय (T) = 2 वर्ष

सूत्रअनुसार,

(क) वार्षिक चक्रीय व्याज

$$(CI_1) = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] (\because \text{बबिताले वार्षिक चक्रीय व्याज तिर्ने हुनाले})$$

$$= \text{रु. } 75,000 \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= \text{रु. } 75,000 \left[\left(\frac{110}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$= \text{रु. } 75,000 [1.21 - 1]$$

$$= \text{रु. } 75,000 [0.21]$$

$$= \text{रु. } 15,750$$

$$\therefore CI_1 = \text{रु. } 15,750$$

(ख) त्रैमासिक चक्रीय व्याज

$$(CI_2) = P \left[\left(1 + \frac{R}{400} \right)^{4T} - 1 \right] \{ \because \text{सुमनले त्रैमासिक (हरेक 3 महिनामा) चक्रीय व्याज तिर्ने हुनाले} \}$$

$$= \text{रु. } 75,000 \left[\left(1 + \frac{10}{400} \right)^{4 \times 2} - 1 \right]$$

$$= \text{रु. } 75,000 \left[\left(\frac{410}{400} \right)^8 - 1 \right]$$

$$= \text{रु. } 75,000 \times (1.21184028975 - 1)$$

$$= \text{रु. } 75,000 \times (0.21184028975 - 1)$$

$$= \text{रु. } 16,380.22$$

$$\therefore CI_2 = \text{रु. } 16380.22$$

(ग) अन्त्यमा, उनीहरूले तिर्ने चक्रीय व्याजको फरक $(CI_2 - CI_1) = \text{रु. } 16,380.22 - \text{रु. } 15,750 = \text{रु. } 630.22$ हुन्छ ।

उदाहरण 5

प्रमिलाले कुनै रकमको 2 वर्षमा, 10% वार्षिक व्याजदरमा प्राप्त चक्रीय व्याज सोही रकमको 2 वर्षमा उही व्याज दरमा प्राप्त गरेको साधारण व्याज भन्दा रु.120 ले बढी छ भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

समय (T) = 2 वर्ष

व्याजदर (R) = 10% प्रतिवर्ष

$$\text{सूत्रअनुसार, साधारण व्याज (SI)} = \frac{\text{PTR}}{100} = \frac{P \times 2 \times 10}{100} = 0.2P$$

$$\begin{aligned}
\text{फेरी, चक्रीय व्याज (CI)} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \\
&= P \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^2 - 1 \right] \\
&= P \left[\left(\frac{110}{100} \right)^2 - 1 \right] \\
&= P[1.21 - 1] \\
&= 0.21P
\end{aligned}$$

प्रश्न अनुसार, CI - SI = 120

अथवा, 0.21P - 0.2P = 120

अथवा, 0.01P = 120

$$P = \frac{120}{0.01} = \text{रु. } 12,000$$

अतः मूलधन (P) = रु. 12,000

अर्को तरिका :

समय (T) = 2 वर्ष

व्याजदर (R) = 10% प्रतिवर्ष

प्रश्न अनुसार, CI - SI = 120

$$\text{अथवा, } P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] - \frac{PTR}{100} = 120$$

$$\text{अथवा, } P \left[\left(1 + \frac{10}{100} \right)^2 - 1 \right] - \frac{P \times 2 \times 10}{100} = 120$$

$$\text{अथवा, } P \left[\left(\frac{110}{100} \right)^2 - 1 \right] - 0.2P = 120$$

$$\text{अथवा, } P[1.21 - 1] - 0.2P = 120$$

$$\text{अथवा, } 0.21P - 0.2P = 120$$

$$\text{अथवा, } P(0.21 - 0.2) = 120$$

अथवा, $P(0.01) = 120$

अथवा, $P = \frac{120}{0.01} = 12,000$ अतः मूलधन (P) = रु. 12,000

उदाहरण 6

कुनै धनराशिको 2 वर्षमा हुने साधारण व्याज र चक्रीय व्याज क्रमशः रु. 1,000 र रु. 1,050 छन् भने वार्षिक व्याजदर र साँवा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, साधारण व्याज (SI) = रु. 1,000

चक्रीय व्याज (CI) = रु. 1050

समय (T) = 2 वर्ष

व्याजदर (R) = ? साँवा (P) = ?

सूत्रअनुसार,

$$\text{साधारण व्याज (SI)} = \frac{PTR}{100}$$

$$\text{अथवा, } 1,000 = \frac{P \times 2 \times R}{100}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1,000 \times 100}{2} = PR$$

$$\text{अथवा, } 50000 = PR \dots \dots \dots (i)$$

फेरि, चक्रीय व्याज (CI) = $P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$ (∵ वार्षिक व्याजदर भएकोले यो सूत्रको प्रयोग गरिएको हो ।)

$$\text{अथवा, } 1050 = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\text{अथवा, } 1050 = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 - (1)^2 \right] \{ \because a^2 - b^2 \text{ को सूत्र प्रयोग गर्नको लागि } 1 \text{ लाई } (1)^2 \text{ बनाएको} \}$$

अथवा, $1050 = P \left[\left\{ \left(1 + \frac{R}{100} \right) - 1 \right\} \left\{ \left(1 + \frac{R}{100} \right) + 1 \right\} \right] \dots\dots\dots(ii) \{ \because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \}$

अथवा, $1050 = P \left[\left\{ 1 + \frac{R}{100} - 1 \right\} \left\{ 1 + \frac{R}{100} + 1 \right\} \right] \{ \because \text{सानो कोष्ठ हटाएको} \}$

अथवा, $1050 = \frac{PR}{100} \left(2 + \frac{R}{100} \right) \{ \because \text{पहिलो पदमा } +1 \text{ र } -1 \text{ cancel भयो र दोस्रो पदमा } 1 \text{ र } 1 \text{ जोडेर } 2 \text{ भयो} \}$

अथवा, $1050 = \frac{50,000}{100} \left(2 + \frac{R}{100} \right) \{ \because \text{समीकरण(i) बाट PR को मान } 50,000 \text{ राख्दा} \}$

अथवा, $\frac{1,050}{500} = 2 + \frac{R}{100}$

अथवा, $2.1 - 2 = \frac{R}{100}$

अथवा, $0.1 \times 100 = R$

$R = 10\%$ (\because दिइएको मानलाई 100 ले गुणन गरेपछि प्रतिशतमा परिवर्तन हुन्छ)

R को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$50,000 = P \times 10$

अथवा, $\frac{50,000}{10} = P$

अथवा, $5000 = P$

अतः सावाँ (P) = रु. 5000र व्याजदर (R) = 10% प्रति वर्ष छ ।

उदाहरण 7

वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा कुनै रकमको 2 वर्षमा मिश्रधन रु. 15,840 र 3 वर्षमा रु.19,008 पुग्दछ भने

- (क) चक्रीय व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) मूलधन कति होला,पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

पहिलो शर्तअनुसार,

चक्रीय मिश्रधन (CA₁) = रु. 15,840

समय = 2 वर्ष

सूत्र अनुसार,

$$\text{चक्रीय मिश्रधन (CA}_1) = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, रु. 15,840} = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 \dots\dots\dots(i)$$

दोस्रो शर्तअनुसार,

चक्रीय मिश्रधन(CA₁) = रु. 19,008

समय = 3 वर्ष

$$\text{सूत्र अनुसार, चक्रीय मिश्रधन (CA}_2) = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, रु. 19,008} = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 \dots\dots\dots(ii)$$

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा

$$\text{अथवा, } \frac{19,008}{15,840} = \frac{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^3}{\left(1 + \frac{R}{100}\right)^2}$$

$$\text{अथवा, } 1.2 = 1 + \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 1.2 - 1 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 0.2 = \frac{R}{100}$$

$$\text{अथवा, } 0.20 \times 100 = R$$

अर्को तरीका :

2 वर्षको मिश्रधन (C.A₁) = रु.15,840

$$\text{अथवा, } P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = \text{रु.15,840}$$

$$P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 = \text{रु.15,840} \dots\dots\dots(i)$$

फेरी, 3 वर्षको मिश्रधन (C.A₂) = रु.19,008

$$\text{अथवा, } P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 = \text{रु.19,008}$$

$$\text{अथवा, } P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3 = 19,008 \dots\dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$\text{अथवा, } P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^2 \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 19,008$$

$$15,840 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) = 19,008 \text{ [समीकरण (i) बाट]}$$

$$\text{अथवा, } \left(1 + \frac{R}{100}\right) = \frac{19,008}{15,840}$$

$$\text{अथवा, } 1 + \frac{R}{100} = 1.2$$

$$\text{अथवा, } \frac{R}{100} = 1.2 - 1$$

$$\text{अथवा, } R = 0.2 \times 100$$

R = 20% प्रतिवर्ष

R को मान समिकरण (i) मा राख्दा

$$P \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 = \text{रु. 15,840}$$

$$\text{अथवा, } P \left(\frac{120}{100}\right)^2 = 15,840$$

$$\text{अथवा, } P \times 1.44 = 15,840$$

$$\text{अथवा, } P = \frac{15,840}{1.44}$$

अतः मूलधन (P) = रु.11,000

व्याजदर (R) = 10% प्रतिवर्ष

अथवा, $R = 20\%$

R को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$\text{अथवा, } 15,840 = P \left(1 + \frac{20}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } 15,840 = P \left(\frac{120}{100} \right)^2$$

$$\text{अथवा, } 15,840 = P \times 1.44$$

$$\text{अथवा, } P = \frac{15,840}{1.44} = 11,000$$

∴ मूलधन (P) = रु. 11,000र व्याजदर(R) = 20% प्रति वर्ष

उदाहरण 8

रु.40,000 लाई दुई भागमा विभाजन गर्दा वार्षिक 50% चक्रीय व्याजदरमा 2 वर्ष र 3 वर्षको चक्रीय मिश्रधन बराबर हुन्छ भने दुई भागहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, रु. 40,000 का दुई भागहरू

पहिलो भाग = रु. x र दोस्रो भाग = रु. $(40,000 - x)$ छन् ।

व्याजदर (R) = 50%

पहिलो अवस्थाअनुसार, मूलधन (P) = रु. P, समय (T) = 2 वर्ष

$$\begin{aligned} \text{सुत्रानुसार, } (CA_1) &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T \\ &= \text{रु. } P \left(1 + \frac{50}{100} \right)^2 \\ &= \text{रु. } P \left(\frac{150}{100} \right)^2 \\ &= \text{रु. } 2.25 P \end{aligned}$$

फेरी, दोस्रो अवस्थाअनुसार, मूलधन (P) = रु. $x(40,000 - P)$

समय (T) = 3 वर्ष

$$\begin{aligned}
CA_2 &= P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\
&= \text{रु.}(40,000 - P)\left(1 + \frac{50}{100}\right)^3 \\
&= \text{रु.} (40,000 - P) 3.375 \\
&= \text{रु.} 1,35,000 - 3.375 P
\end{aligned}$$

प्रश्नअनुसार, $CA_1 = CA_2$

अथवा, $2.25 P = 1,35,000 - 3.375 P$

अथवा, $2.25 P + 3.375 P = 1,35,000$

अथवा, $P = \frac{1,35,000}{5.625}$

अथवा, $P = 24,000$

अतः रु. 40,000 को दुइ भागहरू, पहिलो भाग = रु. $P = \text{रु.} 24,000$

दोस्रो भाग = रु. $(40,000 - P) = \text{रु.} (40,000 - 24,000) = \text{रु.} 16,000$

उदाहरण 9

रु.2,00,000 लाई 3 वर्षको लागि व्याजदर 8% प्रतिवर्ष पहिलो वर्षका लागि 10% प्रतिवर्ष दोस्रो वर्षका लागि र 12% प्रतिवर्ष तेस्रो वर्षका लागि निर्धारण गरी, लगानी गर्दा तीन वर्ष पछिको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मूलधन (P) = रु.2,00,000, समय (T) = 3वर्ष

पहिलो वर्षको व्याजदर (R_1) = 8%, प्रतिवर्ष

दोस्रो वर्षको व्याजदर (R_2) = 10%, प्रतिवर्ष

तेस्रो वर्षको व्याजदर (R_3) = 12%, प्रतिवर्ष

चक्रीय मिश्रधन (CA) = ? चक्रीय व्याज (C.I) = ?

$$\begin{aligned}
\text{अब, सुत्रानुसार, चक्रीय मिश्रधन (CA)} &= P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \\
&= \text{रु. } 2,00,000 \left(1 + \frac{8}{100}\right) \left(1 + \frac{10}{100}\right) \left(1 + \frac{12}{100}\right) \\
&= \text{रु. } 2,00,000 \times \frac{108}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{112}{100} \\
&= \text{रु. } 2,66,112
\end{aligned}$$

चक्रीय व्याज (CI) = चक्रीय मिश्रधन (CA) - मूलधन (P)

तसर्थ, चक्रीय व्याज (CI) = रु. 2,66,112 - रु. 2,00,000 = रु. 66,112

अभ्यास 2.1

- यदि चक्रीय मिश्रधन (CA), सावाँ (P), समय (T) र व्याजदर (R) भए
(क) वार्षिक चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
(ख) वार्षिक चक्रीय व्याज पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- यदि सावाँ (P), व्याजदर (R) र समय (T) भए अर्धवार्षिक मिश्रधन (CA) लाई P, T र R को रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।
- यदि सावाँ (P), व्याजदर (R) र समय (T) भए अर्धवार्षिक मिश्रधन (CA) भए
(क) CA लाई P, T र R का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।
(ख) CI लाई P, T र R का पदमा व्यक्त गर्नुहोस् ।
- मूलधन (P), व्याजदर (R%) र समय (T) भए त्रैमासिक रूपमा व्याज गणना गर्दा मिश्रधन (CA) लाई P, T र R का रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

- सविनले रु. 8,000 को वार्षिक 8% का दरले चक्रीय व्याज पाउने गरी 2 वर्षका लागि लगानी गरेका छन् ।
(क) 2 वर्षको चक्रीय व्याज कति हुन्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- निर्मलले रु. 75,000 वार्षिक चक्रीय व्याजदर 10% को दरले 3 वर्षको लागि छिमेकीलाई ऋण दिएका छन् भने,

(क) सूत्र प्रयोग गरी चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 2 अनुसार

7. सतिसले रु. 50,000 को अर्धवार्षिक 8% का दरले व्याज तिर्ने गरी ऋण लिएका छन् भने,

(क) 2 वर्षको चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. रु. 1,50,000 को अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजदर 10% ले 2 वर्षको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 अनुसार

9. बिकलले रु 1,25,000 ऋण लिएका छन् । वार्षिक कति प्रतिशत चक्रीय व्याजदरले 3 वर्षमा चक्रीय व्याज रु. 91,000 होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. रु. 10,000 को 2 वर्षमा अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजदरमा चक्रीय व्याज रु. 4641 हुन्छ भने व्याजको दर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 4 अनुसार

11. रु. 15,000 को 8% प्रतिवर्षका दरले 2 वर्षमा हुन आउने साधारण व्याज र अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजको फरक कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. प्रति वर्ष 6% का दरले 3 वर्षका लागि सापट लिएको धन रु. 50,000 मा साधारण व्याज र चक्रीय व्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. अनिलले बैङ्कमा मुद्धति खाता खोली रु. 10,000 जम्मा गरेछन् । त्यसैगरी, अर्को रु. 10,000 एउटा फाइनेन्स कम्पनीमा पनि मुद्धति खातामा नै जम्मा गरेछन् । यी दुवैले वार्षिक 12% का दरले व्याज दिन्छन् । बैङ्कले अर्ध वार्षिक व्याज दिन्छ भने फाइनेन्स कम्पनीले वार्षिक चक्रीय व्याज दिन्छ ।

(क) 2 वर्षमा बैङ्कले कति व्याज दिँदो रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 2 वर्षमा फाइनेन्स कम्पनीले कति व्याज दिँदो रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) फाइनेन्स कम्पनी र बैङ्कले दिने व्याजमा कति फरक छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. एउटा बैङ्कले खाता A मा 10% प्रतिवर्ष अर्धवार्षिक चक्रीय व्याजदर र खाता B मा 12% प्रतिवर्ष वार्षिक चक्रीय व्याजदर कायम गरेको छ । यदि तपाईं 2 वर्षका लागि रु. 30,000 सो बैङ्कमा जम्मा गर्दै हुनुहुन्छ भने कुन खातामा जम्मा गर्नुहुन्छ र किन ? गणना गरी कारण सहित उल्लेख गर्नुहोस् ।
15. रु. 1,00,000 को एक चौथाई वार्षिक चक्रीय व्याजदर 10% का दरले 1 वर्षको
 (क) चक्रीय मिश्रधन पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
16. रु. 2,00,000 को एक चौथाई वार्षिक चक्रीय व्याजदर 10%ले 1 वर्षको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज कति हुन्छ ?
17. रु. 20, 000को 12% प्रतिवर्षका दरले 2 वर्षमा हुन आउने साधारण व्याज र एक चौथाई वार्षिक चक्रीय व्याजको फरक कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
18. रामचन्द्रले रु. 50,000 ऋण सापट लिएका छन् । उक्त ऋण प्रति वर्ष 6% का दरले 2 वर्षमा तिर्नुपर्दछ ।
 क) अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज अनुसार कति व्याज तिर्नुपर्दछ ।
 ख) एक चौथाई वार्षिक चक्रीय व्याजअनुसार कति व्याज तिर्नुपर्दछ ।
 ग) अर्धवार्षिक चक्रीय व्याज र एक चौथाई वार्षिक चक्रीय व्याजको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
19. जैमिनी नगरपालिकामा हालै स्थापना गरिएका A र B दुइओटा सहकारीहरू छन् । उक्त सहकारीहरूबिच ग्राहकलाई आकर्षित गर्ने प्रतिस्पर्धामा चलिरहेको छ । सहकारी A ले मुद्धती खातामा अर्धवार्षिकी 13.5% को दरले व्याज दिने घोषणा गर्‍यो । तर सहकारी B ले मुद्धती खातामा त्रैमासिक 12% को दरले व्याज दिने निति अपनायो । अब सलिनाले आफूसँग भएको रु 1,50,000 रकम 1 वर्षका लागि मुद्धती खातामा राख्ने विचार गरेकी छन् भने कुन सहकारी संस्थामा जम्मा गर्ने सुझाव दिनुहुन्छ ? कारण सहित लेख्नुहोस् ।

उदाहरण 5 अनुसार

20. कुनै रकमको 2 वर्षमा साधारण व्याज र वार्षिक चक्रीय व्याज क्रमशः रु. 1,920 र रु.1,996.80 हुन्छ ।

क) मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) व्याज दर पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. कुनै धनराशिको 10% वार्षिक व्याजदरले दुई वर्षमा चक्रीय व्याज रु. 420 हुन्छ, भने त्यत्तिकै समयका लागि उही नै वार्षिक व्याजदरले सोही सावाँमा लाग्ने साधारण व्याज कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 6 अनुसार

22. तल दिइएको अवस्थालाई अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) कुनै रकमको 2 वर्षको 10% ले हुन आउने चक्रीय व्याज र त्यत्ति नै दर र समयले हुने साधारण व्याजको फरक रु. 124.50 हुन्छ, भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 2 वर्षमा, 10% वार्षिक व्याजदरमा कुनै रकमको चक्रीय व्याज र साधारण व्याजको अन्तर रु. 750 छ । मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् । (Hint: CI - SI = 750)

(ग) 12% वार्षिक व्याजदरले 2 वर्षमा कुनै रकमको साधारण व्याज चक्रीय व्याज भन्दा 36 ले कम हुन्छ, भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् । (Hint: CI - SI = 36)

(घ) प्रति वर्ष 15% व्याजदरले 2 वर्षमा कुनै रकमको चक्रीय व्याज साधारण व्याज भन्दा रु. 180 ले बढी हुन आउँछ, भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् । (Hint: CI - SI = 180)

(ङ) रोसनले कुनै रकम वार्षिक 5% व्याजदरमा 2 वर्षका लागि साधारण व्याजदरमा ऋण लियो । उसले सो रकम उही व्याजदरमा उतिनै समयका लागि वार्षिक चक्रीय व्याजमा लगानी गर्‍यो । यो प्रकृयाबाट उसले रु. 50 नाफा गर्‍यो भने मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् । (Hint: नाफा = CI - SI)

(च) वार्षिक 10% व्याजदरले 3 वर्षमा कुनै धनराशीको चक्रीय व्याज र साधारण व्याजको फरक रु. 3875 छ । सो धनराशी कति होला ?

उदाहरण 7 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

23. वार्षिक चक्रीय व्याजदरमा कुनै रकम 2 वर्षमा रु. 9,680 र 3 वर्षमा रु. 10,648 पुग्दछ, भने,

(क) मूलधन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

24. वार्षिक चक्रीय व्याजदर अनुसार कुनै रकमको मिश्रधन 3 वर्षमा मिश्रधन रु.66,550 र 4 वर्षमा रु.73,205 पुग्दछ भने मूलधन र चक्रीय व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
25. वार्षिक चक्रीय व्याजदर अनुसार कुनै रकमको मिश्रधन 2 वर्षमा रु. 2,420 र 3 वर्षमा रु. 2,662 पुग्दछ भने मूलधन र चक्रीय व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
26. निश्चित वार्षिक चक्रीय व्याजदरले कुनै धनको मिश्रधन 2 वर्षमा रु. 14,520 र 3 वर्षमा रु. 15,972 हुन्छ भने,
- (क) व्याजदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) मूलधन कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 8 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

27. रामले रु.41,000 दुई भागमा विभाजन गरी आफ्ना दुई छोरीहरूका नाममा वार्षिक 5 % चक्रीय व्याज पाउने गरी 2 वर्ष र 3 वर्ष का लागि कुनै बैकमा जम्मा गरिदिन्छन् । उनीहरूले 2 वर्ष र 3 वर्ष पछि पाउने मिश्रधन बराबर हुन्छ भने प्रत्येकले कति कति रकम पाएका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।
28. रु.21,000 लाई दुई भागमा विभाजन गर्नुहोस् । जसअनुसार 10 % वार्षिक चक्रिय व्याजदरले पहिलो भागको 3 वर्षको मिश्रधन र दोस्रो भागको 2 वर्षको मिश्रधन बराबर हुन्छ भने पहिलो भाग र दोस्रो भागमा कति कति रकम पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
29. रु.13,010 लाई दुई भागमा यसरी बाँड्नुहोस् कि दुवै भागलाई वार्षिक 4 % का दरले चक्रीय व्याजमा लगाउँदा बन्ने ठुलो भागको 3 वर्षको चक्रीय मिश्रधन र सानो भागको 5 वर्षको मिश्रधन चक्रीय मिश्रधनसँग बराबर हुन्छ भने ठुलो भाग र सानो भाग पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 9 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

30. (क) कुनै मुलधन (P) को पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षका व्याजदरहरू क्रमशः $R_1\%$, $R_2\%$, $R_3\%$, अनुसार चक्रीय मिश्रधन (CA) पत्ता लगाउने सुत्र लेख्नुहोस् ।

- (ख) रु. 84,000 लाई 3 वर्षको लागि व्याजदर 4% प्रतिवर्ष पहिलो वर्षका लागि 5% प्रतिवर्ष दोस्रो वर्षका लागि र 6% प्रतिवर्ष तेस्रो वर्षका लागि निर्धारण गरी, लगानी गर्दा तीन वर्ष पछिको चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षका लागि क्रमशः 5%, 6% र 10% प्रतिवर्ष व्याजका दरले रु.3,00,000 को 3 वर्षमा हुने चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षका लागि क्रमशः 3%,4% र 5% प्रतिवर्ष व्याजका दरले रु.2,00,000 को 3 वर्षमा हुने चक्रीय मिश्रधन र चक्रीय व्याज पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) $CA = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$ (ख) $CI = P \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T - 1 \right]$
2. $CA = P \left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T}$
3. (क) $CA = P \left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T}$ (ख) $CI = P \left[\left(1 + \frac{R}{200}\right)^{2T} - 1 \right]$
4. $CA = P \left(1 + \frac{R}{400}\right)^{4T}$
5. (क) Rs. 1,331.2 (ख) Rs. 9,331.2
6. (क) Rs. 24,825 (ख) Rs. 99,825
7. (क) Rs. 8,492.928 (ख) Rs. 58,492.928
8. Rs. 1,65,375, Rs. 15,375
9. 20%
10. 20%
11. Rs. 147.87
12. Rs. 550.8
13. (क) Rs. 2,624.76 (ख) Rs. 2,544 (ग) Rs. 80.76
14. Rs. 1,166.8125 खाता B मा धेरै व्याज आउने भएकोले खाता B मा नै जम्मा गर्दछु ।

15. (क) Rs. 46,410 (ख) Rs. 1,46,410
16. Rs. 2,20,726.57, Rs. 20,762.57
17. Rs. 535.4
18. (क) Rs. 6,275.44 (ख) Rs. 6,324.62 (ग) Rs. 49.18
19. Rs. 2,107.12 सहकारी A मा धेरै व्याज आउने भएकोले सोही सहकारीमा जम्मा गर्ने सल्लाह दिन्छु ।
20. Rs. 12,000, 8%
21. Rs. 400
22. (क) Rs. 12,480 (ख) Rs. 75,000 (ग) Rs. 2,500
(घ) Rs. 8,000 (ङ) Rs. 20,000 (च) Rs.
1,25,000
23. Rs. 8,000, 10%
24. Rs. 50,000, 10%
25. Rs. 2,000, 10%
26. Rs. 12,000, 10%
27. Rs. 20,000, Rs. 21,000
28. Rs. 10,000, Rs. 11,000
29. Rs. 6,750, Rs. 6,250
30. (क) $P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{R_3}{100}\right)$ (ख) Rs. 97,231.68, Rs.
13231.68
(ग) Rs. 3,67,290, Rs. 67,290 (घ) Rs. 2,24,952, Rs. 24,952

वृद्धि र ह्रास (Growth and Depreciation)

3.0 परिचय (Introduction)

श्रेयाले रु.5,00,000 वार्षिक 10% व्याजदरमा नेपाल बैङ्कमा जम्मा गरिन्छन् । यदि बैङ्कले प्रत्येक वर्ष व्याजको हिसाब गरी पुनः मुलधनमा जोड्ने रहेछ । 3 वर्ष पछि उनले एकमुष्ट रकम बैङ्कबाट लिन्छन् भने यस्तो अवस्थामा तल प्रश्नहरूका उत्तर अध्ययन गर्नुहोस् ।

(क) 3 वर्षपछि श्रेयाले पाउने एकमुष्ट रकमलाई के भनिन्छ, होला ?

3 वर्षपछि श्रेयाले पाउने एकमुष्ट रकमलाई चक्रीय मिश्रधन (Compound amount) भनिन्छ ।

(ख) कुन सूत्रको प्रयोग गरी एकमुष्ट रकम पत्ता लगाउन सकिन्छ, होला ?

$CA_2 = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$ सूत्रको प्रयोग गरी एकमुष्ट रकम पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(ग) 3 वर्ष पछि श्रेयाले पाउने एकमुष्ट रकम रु.5,00,000 बाट वृद्धि वा ह्रास के भएको हुन्छ ?

पक्कै पनि श्रेयाले पाउने एकमुष्ट रकममा वृद्धि भएको हुन्छ ।

(घ) यदि 3 वर्ष पछि पाउने रकममा वृद्धि भएको छ, भने वृद्धि रकमलाई के भनिन्छ, ?

वृद्धि रकमलाई व्याज भनिन्छ ।

यसरी श्रेयाले जम्मा गरेको रकममा हरेक वर्ष वृद्धि हुँदै गइरहेको देखिन्छ । त्यसैगरी हाम्रो दैनिक जीवनमा धेरै चिजहरूको वृद्धि भएको देखिरहेका हुन्छौं । जस्तै : जनसङ्ख्या, भाइरस, व्याक्टेरिया, बोटविरुवा, कोठा भाडा, गाडी भाडा, देशको वार्षिक बजेट, महङ्गी आदि वृद्धि भइरहेको कुरा सुनेका छौं, कति कुरा दखेका छौं र कति कुरा भोगेका पनि छौं । यदि बाहिरी कुनै कारणहरूले असर नगरेमा उल्लिखित कुराहरू एउटा निश्चित दरमा निश्चित समयमा वृद्धि भइरहेको हुन्छ, यसैलाई नै वृद्धि भनिन्छ । जनसङ्ख्या, बोटविरुवा आदिको वृद्धि साधारण नभई मिश्रित तरिकाले भइरहेको हुन्छ ।

तसर्थ यस्ता वृद्धिका समस्याहरूलाई चक्रीय व्याजका समस्याहरूसँग तुलना गरेर समाधान गर्न सकिन्छ ।

3.1 वृद्धि (Growth)

क्रियाकलाप 1

कुनै गाउँपालिकाको 2068 सालको सुरुको जनसङ्ख्या 22,000 थियो । यदि सो जनसङ्ख्यामा प्रत्येक वर्ष 5% ले वृद्धि हुन्छ । दिइएको अवस्थालाई अध्ययन गर्नुहोस ।

- (क) 2079 सालमा सो गाउँपालिकाको सुरुको जनसङ्ख्या कति होला ?
(ख) 2080 सालमा सो गाउँपालिकाको सुरुको जनसङ्ख्या कति होला ?
(ग) के जनसङ्ख्या वृद्धि पनि चक्रीय व्याजको प्रक्रियासँग समान हुन्छ त ?

यहाँ,

$$\begin{aligned} \text{(क) 2079 सालको सुरुको जनसङ्ख्या} &= 22,000 + 22,000\text{को } 5\% \\ &= 22,000 + 22,000 \times \frac{5}{100} \\ &= 22,000 + 1,100 \\ &= 23,100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ख) त्यसैगरी, 2080 सालको सुरुको जनसङ्ख्या} &= 23,100 + 23,100\text{को } 5\% \\ &= 23,100 + 23,100 \times \frac{5}{100} \\ &= 23,100 + 1,155 \\ &= 24,255 \end{aligned}$$

- (ग) जनसङ्ख्या वृद्धिमा पनि प्रत्येक वर्ष बढेको जनसङ्ख्या पहिलेको जनसङ्ख्यामा जोडिदै जाने हुनाले जनसङ्ख्या वृद्धिको प्रक्रिया पनि चक्रीय व्याजको प्रक्रियासँग समान हुन्छ ।

क्रियाकलाप २

कुनै नगरपालिकाको वि.स.२०७८ सालको जनसङ्ख्यालाई P मानौं । सो नगरपालिकाको जनसङ्ख्या $R\%$ ले प्रत्येक वर्ष वृद्धि भइरहको छ । त्यसो हो भने १ वर्ष पछि, २ वर्ष पछि, ३ वर्ष पछि, T वर्ष पछि, उक्त नगरपालिकाको जनसङ्ख्या कति हुन्छ, होला ?

$$\begin{aligned} 1 \text{ वर्ष पछिको जनसङ्ख्या } (P_1) &= P + P \times \frac{R}{100} \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \text{ हुन्छ ।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ वर्ष पछिको जनसङ्ख्या } (P_2) &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right) + P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \times \frac{R}{100} \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right) \left(1 + \frac{R}{100} \right) \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \text{ हुन्छ ।} \end{aligned}$$

$$\text{त्यसैगरी, ३ वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P_3) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3 \text{ हुन्छ । र}$$

$$(क) \quad T \text{ वर्षपछिको जनसङ्ख्या } (P_T) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T \text{ हुन्छ ।}$$

$$\begin{aligned} (ख) \quad \text{अब बढेको जनसङ्ख्या} &= P_T - P \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - P \\ &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ ।} \end{aligned}$$

(ग) जनसङ्ख्या वृद्धिलाइ, वसाइ सरेर आउने, वसाइ सरेर जाने र मृत्यु जस्ता कुराले असर गर्दछ । यदि T वर्षमा कुनै ठाउँमा वसाइ सरेर आउने जनसङ्ख्या (M_{in}), वसाइ सरेर जाने जनसङ्ख्या (M_{out}) र मृत्यु भएको जनसङ्ख्या (D) छ भने,

$$T \text{ वर्ष पछिको वास्तविक जनसङ्ख्या } (P_T) = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T + M_{in} - M_{out} - D$$

(घ) यदि प्रत्येक वर्षको वृद्धिदर फरक फरक भएमा T वर्ष पछिको जनसङ्ख्या

$$(P_T) = P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \dots \left(1 + \frac{R_T}{100}\right) \text{ हुन्छ ।}$$

जहाँ $R_1, R_2, R_3, \dots, R_T$ ले क्रमशः प्रथम वर्ष, दोस्रो वर्ष, तेस्रो वर्ष, ... गर्दै T औं वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर जनाउँछ ।

यदि जनसङ्ख्याको ठाउँमा कुनै वस्तुको मूल्य, विरुवाको उचाइ, व्याक्टेरिया, पशुपक्षीहरूको सङ्ख्या, देशको वार्षिक बजेट, महङ्गी आदि वृद्धि भएको खण्डमा के हुन्छ ? के यिनै माथिका सूत्रहरूको प्रयोग गर्न सकिन्छ त ? निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

जुनसुकै चिजहरूको पनि सङ्ख्यामा वृद्धि भयो भने माथि उल्लेखित सूत्रहरूको नै प्रयोग गरिन्छ ।

यसैगरी हरेक वस्तुको सङ्ख्या, मूल्यवृद्धि, विरुवाको उचाइ, व्याक्टेरिया, पशुपक्षीहरूको सङ्ख्या, देशको वार्षिक बजेट, महङ्गीमा वृद्धि हुनुको सट्टा घट्यो भने, के यिनै माथिका सूत्रहरूको प्रयोग गर्न सकिन्छ त ? पक्कै पनि सकिँदैन ।

त्यस्तो अवस्थामा तल दिइएको सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

$$P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

कुनै ठाउँको जन्मदर र सोही ठाउँको मृत्युदर दिइएको छ जहाँ मृत्युदर भन्दा जन्मदर धेरै छ भने वृद्धिदर कसरी पत्ता लगाउने होला ?

$$\text{वृद्धिदर (R)} = \text{जन्मदर (B\%)} - \text{मृत्युदर (D\%)}$$

यदि जन्मदर भन्दा मृत्युदर धेरै छ भने त्यस्तो अवस्थामा के हुन्छ होला ?

जन्मदर भन्दा मृत्युदर धेरै छ भने त्यस्तो अवस्थामा तल दिइएको सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

$$P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

उदाहरण 1 : (अहिलेको जनसङ्ख्या, वृद्धिदर र दिइएको समय (T) वर्ष पछिको सङ्ख्या पत्ता लगाउने)

एउटा गाउँको अहिलेको जनसङ्ख्या 60,000 छ । यदि जनसङ्ख्या वृद्धिदर 10% प्रतिवर्ष छ भने 2 वर्षपछि सो गाउँको जनसङ्ख्या कति होला ?

समाधान

यहाँ, 2 वर्ष पहिलेको जनसङ्ख्या (P_0) = 60,000

2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

जनसङ्ख्या वृद्धिदर (R) = 10%

सूत्र अनुसार,

$$\begin{aligned}P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\&= 60,000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 \\&= 60,000 \left(\frac{110}{100}\right)^2 \\&= 60,000 \times 1.21 \\&= 72,600\end{aligned}$$

∴ 2 वर्षपछिको जनसङ्ख्या 72,600 छ ।

उदाहरण 2 : (जन्म, मृत्यु र अन्यत्रबाट बसाइसराइ पछि T वर्ष पछिको सङ्ख्या पत्ता लगाउने)

एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 20,000 थियो । दुई वर्षभित्र 3% जन्मका कारणले र 2% अन्यत्रबाट बसाइसराइ गरी उक्त गाउँमा आएका कारणले जनसङ्ख्या वृद्धि हुन्छ भने दुई वर्षपछि सो गाउँको जनसङ्ख्या कति पुग्छ ?

समाधान

यहाँ, अहिलेको गाउँको जनसङ्ख्या (P) = 20,000

जन्मदर (B) = 3%, अन्यत्रबाट बसाइसराइ दर (M_{in}) = 2%

वृद्धिदर (R) = जन्मदर(B)+अन्यत्रबाट बसाइँसराइ दर (M_{in}) = 3%+2% = 5%

दुई वर्षपछिको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

सूत्र अनुसार,

$$\begin{aligned}P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T = 20,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \\&= 20,000 \left(\frac{105}{100}\right)^2 \\&= 20,000 \times 1.1025 \\&= 22,050\end{aligned}$$

अतः : दुई वर्षपछिको जनसङ्ख्या 22,050 हुन्छ ।

उदाहरण 3 : (T वर्ष पहिलेको सङ्ख्या अथवा मूल्य अथवा भाडा पत्ता लगाउने)

दही जमाउने व्याक्टेरियाको वृद्धि दर 40% प्रति घण्टा रहेको छ । यदि बिहान 7 बजे व्याक्टेरियाको सङ्ख्या 10.12×10^{11} भए 3 घण्टा अघि व्याक्टेरियाको सङ्ख्या कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 3 घण्टा पहिलेको व्याक्टेरियाको सङ्ख्या (P) = ?

अहिले (बिहान 7 बजे) व्याक्टेरियाको सङ्ख्या (P_T) = 10.12×10^{11}

वृद्धिदर (R) = 40%

सूत्र अनुसार, $P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$

अथवा, $10.12 \times 10^{11} = P \left(1 + \frac{40}{100}\right)^2$

अथवा, $10.12 \times 10^{11} = P \left(\frac{140}{100}\right)^2$

अथवा, $10.12 \times 10^{11} = P \times 1.96$

अथवा, $\frac{10.12 \times 10^{11}}{1.96} = P$

∴ 3 घण्टा अघि व्याक्टेरियाको सङ्ख्या (P) = 5.16×10^{11} थियो ।

उदाहरण 4 : (समय (T) पत्ता लगाउने)

प्रत्येक वर्ष 10% का दरले कामदार सङ्ख्या बढाउँदै लगेको एउटा कारखानाले 2078 को सुरुमा 242 जना कामदार सङ्ख्या पुऱ्याएछ । कति वर्ष अघि सो कारखानामा 200 मात्र कामदार थिए ?

समाधान

यहाँ, सुरुको कामदार सङ्ख्या (P) = 200

T वर्ष पछिको कामदार सङ्ख्या (P_T) = 242

वृद्धिदर (R) = 10 %, समय (T) = ?

$$\text{सूत्र अनुसार, } P_T = P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 242 = 200 \left(1 + \frac{10}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{242}{200} = \left(\frac{110}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 1.21 = (1.1)^T$$

$$\text{अथवा, } (1.1)^2 = (1.1)^T$$

$$T = 2$$

अतः 2 वर्ष अघि कामदार सङ्ख्या 200 थियो ।

उदाहरण 5 : (वृद्धिदर (R) पत्ता लगाउने)

कुनै एउटा सहरको वि.सं. 2065 को जनसङ्ख्या 100000 थियो । यदि वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर र बसाइँसराइले 2068 को जनसङ्ख्या 133100 थियो भने जनसङ्ख्या वृद्धिदर कति थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ, वि.सं. 2065 को जनसङ्ख्या (P) = 100000

वि.सं. 2068 को जनसङ्ख्या (P_T) = 133100

समय (T) = 3 वर्ष

जनसङ्ख्या वृद्धिदर (R) = ?

सूत्रअनुसार, $P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$

अथवा, $1,33,100 = 1,00,000 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$

अथवा, $\frac{1,33,100}{1,00,000} = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$

अथवा, $1.331 = \left(1 + \frac{R}{100}\right)^3$

अथवा, $\sqrt[3]{1.331} = 1 + \frac{R}{100}$ [\therefore दुवैतिर तेस्रो घाताङ्क लिँदा]

अथवा, $1.1 - 1 = \frac{R}{100}$

अथवा, $0.1 \times 100 = R$

$R = 10\%$

अतः जनसङ्ख्या वृद्धिदर 10% रहेछ ।

उदाहरण 6 : (बसाइसराइँ, मृत्यु आदि समावेश गरिएका)

कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या 2078 सालको शुरुमा 8,000 थियो । 2079 को शुरुमा 1600 मानिसहरू अन्त्यत्राट बसाइँसराइ गरेर यहाँ बसोबास गर्न आए । त्यस ठाउँको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 5% रहेको भए 2080 सालको अन्त्यमा हुने जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो अवस्था अनुसार,

वि.सं. 2078 सालको (सुरुको) जनसङ्ख्या (P) = 8,000

बसाइसराइँ गरेर आउने मानिसको सङ्ख्या (M_{in}) = 1600

समय (T) = 1 वर्ष

वृद्धिदर (R) = 5%

2079 सालको सुरुको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

सूत्रअनुसार,

$$\begin{aligned}P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T + M_{in} \\&= 8,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^1 + 1600 \\&= 8,000 \left(\frac{105}{100}\right) + 1600 \\&= 8,400 + 1600 \\&= 10,000\end{aligned}$$

फेरी दोस्रो अवस्थाअनुसार,

सुरुको जनसङ्ख्या (P) = 10,000

समय (T) = 2वर्ष

वृद्धिदर (R) = 5%

2080 सालको अन्त्यको जनसङ्ख्या (P_T) = ?

$$\begin{aligned}P_T &= P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T \\&= 10,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \\&= 10,000 \left(\frac{105}{100}\right)^2 \\&= 10,000 \times 1.1025 \\&= 11,025\end{aligned}$$

अतः 2080 सालको अन्त्यमा सो ठाउँको जनसङ्ख्या 11,025 हुन्छ ।

उदाहरण 7 : (प्रत्येक वर्षको वृद्धिदर फरक फरक दिइएको अवस्थामा)

कुनै एउटा सहरको जनसङ्ख्या 25,000 थियो । यदि सो सहरको जनसङ्ख्या पहिलो वर्ष 2% ले, दोस्रो वर्ष 4% ले र तेस्रो वर्ष 5% ले वृद्धि भयो भने तीन वर्ष पछिको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मानौं पहिलो, दोस्रो र तेस्रो वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर क्रमशः $R_1\%$, $R_2\%$ र $R_3\%$ छन् ।

एउटा सहरको सुरुको जनसङ्ख्या $(P) = 25,000$

पहिलो वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर $(R_1) = 2\%$

दोस्रो वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर $(R_2) = 4\%$

तेस्रो वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर $(R_3) = 5\%$

3 वर्ष पछिको जनसङ्ख्या $(P_T) = ?$

सूत्रअनुसार,

$$\begin{aligned}P_T &= P \left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \left(1 + \frac{R_3}{100}\right) \\&= 25,000 \left(1 + \frac{2}{100}\right) \left(1 + \frac{4}{100}\right) \left(1 + \frac{5}{100}\right) \\&= 25,000 \left(\frac{102}{100}\right) \left(\frac{104}{100}\right) \left(\frac{105}{100}\right) \\&= 25,000 \times 1.02 \times 1.04 \times 1.05 \\&= 27,846\end{aligned}$$

अतः उक्त सहरको 3 वर्षपछिको जनसङ्ख्या $(P_T) = 27,846$ हुन्छ ।

अभ्यास 3

उदाहरण 1 मा जस्तै अहिलेको जनसङ्ख्या, वृद्धिदर र दिइएको समय (T) वर्ष पछिको सङ्ख्या पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

1. (क) P, P_T, R र T ले क्रमशः कुनै स्थानको सुरूको जनसङ्ख्या T वर्ष पछिको जनसङ्ख्या, प्रतिवर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर र समय जनाउँछन् भने यिनीहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
 - (ख) शिवपुरी बन्धजन्तु आरक्षणमा वि.स.2079 सालमा पाटेबाघको जनसङ्ख्या M, वार्षिक पाटेबाघको वृद्धिदर R% प्रतिवर्ष भए T वर्ष पछिको पाटेबाघको सङ्ख्या कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
 - (ग) कुनै गाउँको जनसङ्ख्या 2 वर्ष पहिले 64,000 थियो । त्यहाँको जनसङ्ख्या वृद्धिदर 5% प्रतिवर्ष छ भने हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (घ) एउटा नगरपालिकाको हालको जनसङ्ख्या 60,000 छ । प्रत्येक वर्ष 2% बढ्दै गएमा 2 वर्षपछि सो ठाउँको जनसङ्ख्या कति पुग्ला ?
 - (ङ) एउटा घर धनीले वार्षिक 10% प्रतिवर्षका दरले भाडा वृद्धि गर्ने सम्झौता डेरावालासँग गरेका छन् । यदि उक्त कोठाको हालको भाडा रु.10,000 भए 3 वर्षपछि सो कोठाको भाडा कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (च) दही जमाउने ब्याक्टेरियाको वृद्धिदर 10% प्रति घण्टा रहेको छ । यदि बिहान 6 बजे ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या 4×10^{11} भए 2 घण्टा पछि ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (छ) कुनै एउटा संस्थागत विद्यालयको 3 वर्ष अगाडि कक्षा 10 को मासिक शुल्क रु. 6,500 थियो । विद्यालयको आफ्नो विनियम अनुसार प्रत्येक वर्ष 10% ले शुल्क वृद्धि हुन्छ भने 3 वर्षपछिको शुल्क कति होला ?

उदाहरण 2 मा जस्तै जन्म, मृत्यु र अन्यत्रबाट बसाइसराइ पछि T वर्ष पछिको सङ्ख्या पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

2. (क) दुई वर्ष अघि कुनै गाउँको जनसङ्ख्या 40,000 थियो । यदि वार्षिक जन्मदर 4.5% र वार्षिक मृत्युदर 2% भए सो गाउँको हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । (42025)

- (ख) एउटा सहरको हालको जनसङ्ख्या 80,000 छ । यदि जनसङ्ख्या, 2% जन्मका कारणले र अन्यत्रबाट बसाइसराइ गरी यहाँ आएकोले 3% को दरले वृद्धि हुँदा 2 वर्षपछि, उक्त सहरको जनसङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 मा जस्तै T वर्ष पहिलेको सङ्ख्या अथवा मूल्य अथवा भाडा पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

3. (क) एउटा विश्व विद्यालयमा रहेका विद्यार्थी सङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 5% वृद्धि हुँदै गइरहेको छ । यदि सो विश्वविद्यालयको विद्यार्थी सङ्ख्या हाल 11,025 छ भने 2 वर्ष अघिको सङ्ख्या कति थियो ?
- (ख) कुनै ठाउँको घडेरीको मूल्य प्रतिवर्ष 10% ले वृद्धि भइरहेको छ । अहिले सो घडेरीको मूल्य रु. 6,25,000 पर्दछ भने 2 वर्ष अघि सो घडेरीको मूल्य कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) कुनै एउटा महानगरपालिकाको अहिलेको जनसङ्ख्या 11,24,864 र जनसङ्ख्या वृद्धिदर 4% भए 3 वर्ष अघि सो गाउँपालिकाको जनसङ्ख्या कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) वार्षिक 5% का दरले 2 वर्ष लगातार पाउण्ड स्टर्लिङको अवमूल्यन पछि अहिले पाउण्ड स्टर्लिङ (£) 1= नेपाली रूपैया 154.35 छ भने 2 वर्ष अगाडी पाउण्ड स्टर्लिङ 1 बराबर कति नेपाली रुपियाँ थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) एउटा मेवाको रुख 3 वर्ष अगाडि रोपिएको थियो । यो प्रतिवर्ष 20% का दरले बढिरहेको छ । यदि अहिले सो मेवाको रुख 1.8 m अग्लो छ भने रोप्ने वेलामा (3 वर्ष अगाडी) कति अग्लो थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 4 मा जस्तै समय (T) पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

4. (क) कति वर्षमा 5% वार्षिक वृद्धिदरले एउटा सहरको जनसङ्ख्या 1,90,000 बाट बढेर 2,09,475 पुगला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा सहरको अहिलेको जनसङ्ख्या 50,000 छ । यदि जनसङ्ख्या हरेक वर्ष 10% ले बढ्दै जान्छ भने कति वर्षपछि त्यो सहरको जनसङ्ख्या 66,550 होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ग) अम्बाको विरुवा वैशाखको सुरुमा 4 मिटर थियो । सो अम्बाको विरुवाको वृद्धि दर 4% छ भने कति महिना पछि उक्त विरुवाको उचाइ 4.3264 मिटर हुन्छ ?
- (घ) कुनै महिनामा विदेश जाने नेपालीको सङ्ख्या 24,000 थियो । यदि सो सङ्ख्या प्रतिवर्ष 10% को दरले बढेको छ भने कति वर्षपछि सो सङ्ख्या 31, 944 पुग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 5 मा जस्तै वृद्धिदर (R) पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

5. (क) एउटा गाउँको 2 वर्ष अघिको जनसङ्ख्या 5,400 र हालको जनसङ्ख्या 5,934 छ । जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) दुई वर्ष पहिले एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 10,000 थियो । दुई वर्ष पछिको जनसङ्ख्या 13,310 हुन्छ । जहाँ जनसङ्ख्या वृद्धिदर प्रत्येक वर्ष एउटै छ । उक्त जनसङ्ख्या वृद्धिदर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) वि.सं.2069 को सुरुमा र वि.सं. 2070 को अन्त्यमा एउटा गाउँको जनसङ्ख्या क्रमशः 5,000 र 5,408 थियो भने वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) एउटा जग्गाको हालको मूल्य रु.7,98,600 प्रतिआना रहेको छ । यदि उक्त जग्गाको 3 वर्ष अगाडि प्रति आनाको मूल्य रु 6,00,000 थियो । जग्गाको वार्षिक मूल्य वृद्धिदर कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 6 मा जस्तै बसाइसराइँ, मृत्यु आदि समावेश गरिएका प्रश्नहरू

6. (क) वि.सं. 2079 सालको सुरुमा एउटा सहरको जनसङ्ख्या 1,00,000 थियो । जनसङ्ख्या वृद्धिदर वर्षेनी 2% छ । वि.सं. 2080 को सुरुमा 8,000 जना अन्यत्र ठाउँबाट बसाइँ सरेर आए भने वि.सं. 2082 को सुरुमा सो सहरको जनसङ्ख्या कति पुग्ला ? हिसाब गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) 2 वर्ष पहिले एउटा गाउँको जनसङ्ख्या 25,000 थियो । वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 3% छ । यसपाली 500 जना मानिसहरू कोरोनाको माहामारीमा परी ज्यान गुमाए भने सो गाउँको एक वर्ष पछिको जनसङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा जिल्ला सदरमुकामको जनसङ्ख्या 3 वर्ष अघि 30,000 थियो । उक्त सदरमुकामको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 6% छ । एकवर्ष अगाडि

700 जना मानिसहरू सो सदरमुकामबाट अन्यत्र बसाइँसरेर गए भने उक्त सदरमुकामको हालको जनसङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (घ) 3 वर्ष पहिले 3,75,000 जनसङ्ख्या भएको एउटा जिल्लाको वार्षिक जनसङ्ख्या वृद्धिदर 2% छ । यदि दोस्रो वर्षको अन्त्यमा 1480 जना मानिसहरू बसाइँसराइँ सरेर आए र प्राकृतिक प्रकोपका कारण 2750 जनाको मृत्यु भयो भने सो जिल्लाको अहिलेको जनसङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 7 मा जस्तै प्रत्येक वर्षको वृद्धिदर फरक फरक दिइएको अवस्थामा प्रश्नहरू

7. (क) यदि सुरुको जनसङ्ख्या P र पहिलो, दोस्रो, र तेस्रो वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर क्रमशः $R_1\%$, $R_2\%$ र $R_3\%$ भए 3 वर्ष पछिको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) कुनै सहरको 3 वर्ष अगाडिको जनसङ्ख्या 1,50,000 थियो । यदि सो सहरको जनसङ्ख्या पहिलो वर्ष 2% ले, दोस्रो वर्ष 4% ले, र तेस्रो वर्ष 5% ले वृद्धि भयो भने हालको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) कुनै सहरको 3 वर्ष अगाडिको जनसङ्ख्या 2,00,000 थियो । यदि पहिलो 2 वर्षको जनसङ्ख्या वृद्धिदर क्रमशः 2% र 2.5% छ । तर तेस्रो वर्षमा प्राकृतिक प्रकोपले गर्दा 1% ले जनसङ्ख्या घट्न गयो भने 3 वर्षमा जनसङ्ख्या कतिले बढ्यो वा घट्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) कुनै सहरको जनसङ्ख्या 1,77,336 छ । यदि गएको 3 वर्षमा जनसङ्ख्या वृद्धिदर क्रमशः 3%, 2.5% र 5% भए सो सहरको 3 वर्ष अघिको जनसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) $P_T = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$ (ख) $P_T = M \left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$ (ग) 70,560 (घ) 62,424

(ङ) 13,310 (च) 484×10^9 (छ) 8651.5

2. (क) $P_2 = 40,000 \left(1 + \frac{2.5}{100}\right)^2 = 42025$ हुन्छ ।

(ख) $P_2 = 80,000 \left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 88,200$ हुन्छ ।

3. (क) $9025 = P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$, $P = 10,000$ हुन्छ (ख) 5,00,000
(ग) 10,00,000
(घ) $154.35 = P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$, $P = 140$ हुन्छ (ङ) 62.5 cm
4. (क) 2 years (ख) 3 years (ग) 2 years (घ) 3 years
- 5 (क) 5% (ख) 10% (ग) 8.16% (घ) 10%
- 6 (क) 1,14,444 (ख) 26,804 (ग) 34,980 (घ) 3,96,658
- 7 (क) $P\left(1 + \frac{R_1}{100}\right) \times \left(1 + \frac{R_2}{100}\right) \times \left(1 + \frac{R_3}{100}\right)$ (ख) 1,67,076
(ग) 2,07,009 (घ) 1,59,973

3.2 हास (Depreciation)

3.2.0 परिचय (Introduction)

प्रणयको बाबाले 2 वर्ष अगाडि एउटा नयाँ मोटरसाइकल रु.4,50,000 मा किनेर ल्याउनु भएको थियो । अहिले उनको दिदीको पढाइको लागि पैसा नपुगेर होला सो मोटरसाइकल बेचन खोज्नु भएको छ । मानिसहरू किन्नका लागि आइरहेका पनि छन् तर कसैले पनि किनेको मूल्य भन्दा बढी दिँदैनन् । घडरी बेच्छु भन्दा त 2 वर्ष अघिको भन्दा निकै बढी नै दिन्छु भन्दै थिए । मोटरसाइकलको मूल्य त रु. 50,000 मात्र बढी पनि दिँदैनन्, किन होला ? किनेको मूल्य 4,50,000 पनि दिँदैनन् त । कसैले रु.4,00,000 दिन्छु भन्छन् त कसैले रु.3,50,000 मात्रै । अरु पनि यस्तै यस्तै मूल्यहरू भन्दै थिए । प्रणय मनमनै सोच्दै थियो, किन पुरा पैसा नदिएको होला ? उसलाई भित्र भित्र रीस पनि उठेको जस्तो देखिन्छ । यसै बेलामा उनको साथी रमेश टुप्लुक्क आइपुग्छ ।

रमेश : ओ हो ! के भयो हाम्रो प्रणयलाई । निकै चिन्तित र रिसाएको जस्तो देखिन्छौ त ।

- प्रणय :** हो त । चिन्ता भन्दा नि केही विषयमा निकै सोचिरहेको छु । त्यसैले होला ।
- रमेश :** भन न भन मलाइ के भयो । म पनि समाधान गर्न सक्छु कि ?
- प्रणय :** ल सुन है त । हाम्रो मोटरसाइकल 2 वर्ष अघि रु.4,50,000 मा किनेको हो तर अहिले बेचन खोज्दा कसैले हामीले किनेको मूल्य नै दिँदैन । किन होला ? हाम्रो मोटरसाइकल त किन्दा जस्तो नै नयाँ छ ।
- रमेश :** ए ए त्यसो पो हो । अनि कहाँ बिक्री हुन्छ त किनेकै मूल्यमा ।
- प्रणय :** किन नहुनु त ? हेर त जस्तै : जग्गा, गाई वस्तुहरू, खाद्य सामग्रीहरू, खेतालाहरू, लत्ताकपडाहरू, पेट्रोल अदि सबै चिजहरूको दाम बढेको नै देखिन्छ तर हाम्रो मोटरसाइकलको मूल्य मात्र किन घट्ने ?
- रमेश :** ल सुन प्रणय । मैले जाने अनुसार, मोटरसाइकल निश्चित अवधिका लागी तयार पारिएको हुन्छ । यसको क्षमता पनि सञ्चालन अवधि बढ्दै जाँदा क्रमशः कम हुँदै जान्छ । तसर्थ, कुनै पनि मेसिनरी सामानहरूको प्रयोगपछि निश्चित दरमा तिनीहरूको मूल्यमा गिरावट आउँछ ।
- प्रणय :** मोटरसाइकल जस्तै अरु के के वस्तुहरूको मूल्यमा गिरावट आउँछ नि ?
- रमेश :** जस्तै : घर, गाडी, फोटोकपी मेसिन, फर्निचर आदि । कहिलेकाही विशेष कारणवश जस्तै: महामारीले गर्दा कुनै ठाउँको जनसङ्ख्या निश्चित समयको लागि घट्न सक्छ, चोरी सिकारीको कारणले निकुञ्जमा बाघ, हात्ती, गैंडा आदिको सङ्ख्या पनि घट्न सक्छ ।
- प्रणय :** मेसिनरी सामानलाई प्रयोग गरपछि यसको मूल्य कम हुन्छ । भनेपछि सेकेन्ड ह्यान्ड सामान खरिद गर्दा कुनै वस्तुको मूल्य नयाँ भन्दा केही
- रमेश :** घटाएर पाइन्छ भनी बुझ्नु पर्छो है न त रमेश । पक्कै पनि हो प्रणय । यसरी मेसिनरी सामानहरूको प्रयोगपछि मूल्य घट्नुलाई नै मूल्यमा भएको ह्रास भनिन्छ । यसरी कुनै निश्चित समय अवधिमा घटेको मूल्यलाई (compound depreciation) मिश्रह्रास भनिन्छ ।
- प्रणय :** धन्यवाद रमेश ! अब त बुझे । हाम्रो मोटरसाइकलको मूल्य घटाएर नै बेच्नु
- रमेश :** पर्ने रहेछ किनकी यसको मूल्यमा ह्रास हुँदो रहेछ । जानेका कुरा सिकाउन पाउँदा म पनि साह्रै खुशी छु । ढिलो पनि भइसके छ । ल त अहिले छुट्टिउँ है त । फेरी भेटौंला ।

प्रणय : ल ल बाई बाई । अर्को दिन भेटौंला ।

3.2.1 ह्रास (Depreciation)

क्रियाकलाप 1

रामेश्वर खुला विश्वविद्यालयबाट BBA गर्दै गरेका विद्यार्थी हुन् । उनलाई कम्प्युटर चाहिएर रु. 25,000 मा खरिद गरे । सो कम्प्युटरको प्रतिवर्ष 4% का दरले ह्रास कट्टी हुन्छ । केही वर्ष प्रयोग गरेपछि रु. 23,040 मा बेचेछन् । भने उनले सो कम्प्युटर कति वर्ष प्रयोग गरेर बेचेका थिए होला ?

कुनै वस्तुको शुरुको मूल्य P, त्यसैगरी, प्रतिवर्ष ह्रासदर = R%, समय अवधि = T वर्ष र T वर्ष पछिको मूल्य = P_T लिनुहोस् ।

त्यसैले कम्प्युटरको शुरुको मूल्य (P) = रु. 25,000, प्रतिवर्ष ह्रासदर (R%) = 4% र T वर्ष पछिको मूल्य (P_T) = रु. 23,040

यस अवस्थामा T वर्ष भन्नाले कति वर्ष होला ? सो समय कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ? अध्ययन गर्नुहोस् ।

समय	उदाहरण	सूत्रात्मक रूपमा
1 वर्ष पछिको मूल्य	$(P_1) = \text{रु. } 25,000 - 4\% \text{ को रु. } 25,000$ $= \text{रु. } 25,000 - \frac{4}{100} \times \text{रु. } 25,000$ $= \text{रु. } 25,000 \left(1 - \frac{4}{100}\right)$ $= \text{रु. } 24,000$	$(P_1) = P - P \text{ को } R\%$ $= P - P \times \frac{R}{100}$ $= P \left(1 - \frac{R}{100}\right)$
2 वर्ष पछिको मूल्य	$(P_2) = P_1 - P_1 \text{ को } R\%$ $= \text{रु. } 24,000 - 4\% \text{ को रु. } 24,000$ $= \text{रु. } 24,000 - \frac{4}{100} \times \text{रु. } 24,000$	$(P_2) = P_1 - P_1 \text{ को } R\%$ $= P \left(1 - \frac{R}{100}\right) -$ $P \left(1 - \frac{R}{100}\right) \text{ का } R\%$ $= P \left(1 - \frac{R}{100}\right) -$

	$= \text{रु. } 24,000 \left(1 - \frac{4}{100}\right)$ $= \text{रु. } 23,040$	$P \left(1 - \frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$ $= P \left(1 - \frac{R}{100}\right) \left(1 - \frac{R}{100}\right)$ $= P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^2$
--	--	--

दोस्रो वर्षको लागि, सुरुको मूल्य (P) = 1 वर्ष पछिको मूल्य (P₁) हुन्छ ।

यसरी 2 वर्ष प्रयोग गरी उनले सो कम्प्युटर बेचेका रहेछन् । किनकी 2 वर्ष पछिको मूल्य रु. 23,040 आयो ।

त्यसैगरी, 3 वर्ष पछिको मूल्य (P₃) = $P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$ बाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

सोहीअनुसार,

(क) T वर्ष पछिको सो कम्प्युटरको मूल्य (P_T) = $P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$ हुन्छ ।

(ख) फेरी, ह्रास भएको मूल्य कसरी पत्ता लगाउने होला ?

ह्रास भएको मूल्य = P_T - P

$$= P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T - P$$

$$= P \left[\left(1 - \frac{R}{100}\right)^T - 1 \right] \text{ हुन्छ ।}$$

(ग) के हरेक वर्ष कुनै सामानको मूल्य एउटै दरमा ह्रास हुन्छ त ? अध्ययन गर्नुहोस् ।

यदि R₁%, R₂% र R₃%R_T% क्रमशः पहिलो, दोस्रो, तेस्रो.....T औं वर्षको ह्रासदर हुन् भने T वर्ष पछिको मूल्य

$$(P_T) = P \left(1 - \frac{R_1}{100}\right) \left(1 - \frac{R_2}{100}\right) \left(1 - \frac{R_3}{100}\right) \dots \dots \dots \left(1 - \frac{R_T}{100}\right) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1 (चक्रीय ह्रास पछिको मूल्य पत्ता लगाउने)

बिनोदले 2077 सालको सुरुमा एउटा मोटरसाइकल रु. 1,10,000 मा किनेछन् । 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि, वार्षिक 5% का दरले ह्रास कट्टी गरी बेचे भने सो मोटरसाइकल कतिमा बेचेका थिए ? चक्रीय ह्रासको रकम समेत पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, मोटरसाइकलको खरिद मूल्य (P) = रु. 1,10,000

समय (T) = 2 वर्ष

वार्षिक ह्रास दर (R) = 5%

2 वर्ष पछिको मोटर साइकलको मूल्य (P₂) = ?

$$\begin{aligned} \text{सूत्रअनुसार, ह्रास कट्टी गरी 2 वर्षपछिको मूल्य (P}_T) &= P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T \\ &= \text{रु. } 1,10,000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 \\ &= \text{रु. } 1,10,000 \left(\frac{95}{100}\right)^2 \\ &= \text{रु. } 1,10,000 (0.95)^2 \\ &= \text{रु. } 1,10,000 \times 0.9025 \\ &= \text{रु. } 99,275 \end{aligned}$$

चक्रीय ह्रासको रकम = P - P_T = रु. 1,10,000 - रु. 99,275 = रु. 10,725

उक्त मोटरसाइकल 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि रु. 99,275 मूल्य कायम हुन्छ ।

उदाहरण 2 (सुरुको मूल्य पत्ता लगाउने)

नेपालका पहाडी जिल्लाहरूबाट बसाइँसराइ गरेर तराइ भर्नाले त्यहाको जनसङ्ख्या घटिरहेको छ । त्यसैले नेपाल राष्ट्रिय माध्यमिक विद्यालयको वर्तमान विद्यार्थी सङ्ख्या 1,200 छ । प्रत्येक वर्ष 5% का दरले विद्यार्थी सङ्ख्या घट्दै गएको छ । 2 वर्षअघि सो विद्यालयमा कति विद्यार्थी थिए ? 2 वर्ष पछि, सो विद्यालयमा विद्यार्थी सङ्ख्या कति पुग्ला ?

समाधान

यहाँ, पहिलो अवस्थाअनुसार,

अहिलेको विद्यार्थी सङ्ख्या (P_T) = 1,200

समय (T) = 2 वर्ष

वार्षिक ह्रास दर (R) = 5%

2 वर्ष अघिको विद्यार्थी सङ्ख्या (P) = ?

$$\text{सूत्रअनुसार, } P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, } 1,200 = P \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 1,200 = P \left(\frac{95}{100}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 1,200 = P(0.95)^2$$

$$\text{अथवा, } 1,200 = P \times 0.9025$$

$$\text{अथवा, } \frac{1,200}{0.9025} = P$$

$$P = 1329.6$$

∴ 2 वर्ष अघिको विद्यार्थी सङ्ख्या 1,330 जना (लगभग) थियो ।

दोस्रो अवस्था अनुसार,

फेरी, 2 वर्षपछिको विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल्दा

$$P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

$$= 1,200 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1,200 \left(\frac{95}{100}\right)^2$$

$$= 1200 \times 0.9025$$

$$= 1083$$

सो विद्यालयको विद्यार्थी सङ्ख्या 2 वर्षपछि 1,083 जना पुग्नेछ ।

उदाहरण 3 (चक्रीय ह्रासको दर पत्ता लगाउने)

आकास थपलियाले रु.6,00,000 मा एउटा कार किनेका थिए । सो कार 3 वर्ष प्रयोग गरेपछि रु. 4,37,400 बेचे भने उनले कति प्रतिशतका दरले मिश्रह्रास कटाएर बेचेका थिए ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सुरुको मूल्य (P) = रु. 6,00,000

ह्रासकट्टी पछिको मूल्य (P₂) = रु. 4,37,400

समय अवधि (T) = 3वर्ष

ह्रास दर (R) = ?

$$\text{सूत्रअनुसार, } P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$$

$$\text{अथवा, रु. 4,37,400} = \text{रु. 6,00,000} \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } \frac{4,37,400}{6,00,000} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } 0.729 = \left(1 - \frac{R}{100}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } \sqrt[3]{0.729} = \left(1 - \frac{R}{100}\right)$$

$$\text{अथवा, } \frac{R}{100} = 1 - 0.9$$

$$\text{अथवा, } R = 0.1 \times 100$$

$$\therefore R = 10\%$$

अतः ह्रास दर (R) = 10%

उदाहरण 4: (समय पत्ता लगाउने)

चेतनाथले एउटा कम्प्युटर रु. 25,000 मा खरिद गरी प्रतिवर्ष 4% का दरले ह्रास कट्टा गरी केही वर्षपछि रु. 23,040 मा बेचेछन् भने उनले सो कम्प्युटर कति वर्ष प्रयोग गरेर बेचेका थिए ?

समाधान

यहाँ, कम्प्युटरको सुरुको मूल्य (P) = रु. 25,000

ह्रास दर (R) = 4%

पछिको मूल्य (P_T) = रु. 23,040

समय अवधि(T) = ?

$$\text{सूत्रअनुसार, } P_T = P \left(1 - \frac{R}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, रु. 23,040} = \text{रु. 25,000} \left(1 - \frac{4}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } \frac{23,040}{25,000} = \left(\frac{96}{100} \right)^T$$

$$\text{अथवा, } 0.9216 = (0.96)^T$$

$$\text{अथवा, } (0.96)^2 = (0.96)^T$$

$$\therefore T = 2 \text{ वर्ष}$$

अतः 2 वर्षसम्म सो कम्प्युटर प्रयोग गरिएको थियो ।

उदाहरण 5: (हरेक वर्षको फरक फरक दरमा चक्रीय ह्रास पछिको मूल्य पत्ता लगाउने)

एउटा मेसिनको अहिलेको मूल्य रु. 5,00,000 छ । यदि उक्त मेसिनको मूल्य पहिलो वर्ष, दोस्रो वर्ष, र तेस्रो वर्ष क्रमशः 15%, 10% र 5% ले ह्रास हुँदै जान्छ भने 3 वर्ष पछि सो मेसिनको मूल्य कति होला

समाधान

यहाँ, मेसिनको अहिलेको मूल्य (P) = रु. 5,00,000

पहिलो वर्षको ह्रास दर (R₁) = 15%

दोस्रो वर्षको ह्रास दर (R_2) = 10%

तेस्रो वर्षको ह्रास दर (R_3) = 5%

समय अवधि(T) = 3 वर्ष = (1 + 1 + 1) वर्ष

$$\begin{aligned} \text{सूत्रअनुसार, } P_T &= P \left(1 - \frac{R_1}{100}\right) \left(1 - \frac{R_2}{100}\right) \left(1 - \frac{R_3}{100}\right) \\ &= \text{रु. } 5,00,000 \left(1 - \frac{15}{100}\right) \left(1 - \frac{10}{100}\right) \left(1 - \frac{5}{100}\right) \\ &= \text{रु. } 5,00,000 \left(\frac{85}{100}\right) \left(\frac{90}{100}\right) \left(\frac{95}{100}\right) \\ &= \text{रु. } 5,00,000 \times 0.85 \times 0.90 \times 0.95 \\ &= \text{रु. } 3,63,375 \end{aligned}$$

$\therefore P_T = \text{रु. } 3,63,375$

अतः 3 वर्ष पछि सो मेसिनको मूल्य = रु. 3,63,375 हुन्छ ।

अभ्यास 3.2.1

- (क) यदि एउटा मेसिनरी सामानको क्रयमूल्य P , T वर्ष पछिको घटेको मूल्य P_T र निश्चित रूपमा घट्ने दर $R\%$ भए P_T, P, R र T को सम्बन्ध देखाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) सिटौला एक बस व्यवसायी हुन् । उनले रु. 25,00,000 मा किनेको एउटा यात्रुवाहक बस 3 वर्ष प्रयोग गरी प्रतिवर्ष 10%का दरले ह्रास कट्टी गरी कतिमा बेचे होलान् ?
- (ग) रु. 16, 800 पर्ने एउटा दराजको प्रतिवर्ष 15% का दरले चक्रीय ह्रास हुन्छ भने 2 वर्ष पछिको मूल्य र चक्रीय ह्रासको रकम समेत पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) 3 वर्ष अगाडि एउटा ल्यापटपको मूल्य रु.45,000 थियो । उक्त ल्यापटपको मूल्यमा प्रतिवर्ष 5% का दरले ह्रास आउँछ भने त्यसको हालको मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) एउटा घडीको हालको मूल्य रु. 8,000 छ । यदि यसको मूल्यमा प्रतिवर्ष 8% का दरले ह्रास आउँछ भने 2 वर्षको अन्त्यमा यसको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् । साथै त्यसको मूल्यमा कतिले ह्रास हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 2 मा जस्तै सुरुको मूल्य (P) पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

2. (क) एउटा विश्व विद्यालयमा रहेका विद्यार्थी सङ्ख्या प्रत्येक वर्ष 5% घट्दै गएछन् । यदि सो विश्वविद्यालयको विद्यार्थी सङ्ख्या हाल 9,025 छ, भने 2 वर्ष अघिको सङ्ख्या कति थियो ? र 1 वर्षपछि कति पुग्ला ?
- (ख) सुदीपले आफ्नो मोटरसाइकल 3 वर्षसम्म प्रयोग गरेपछि, प्रतिवर्ष 10% का दरले ह्रास कट्टा गरी रु. 91125मा बेचेछन् भने उनले सो मोटरसाइकल कतिमा किनेका थिए ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) सुरेन्द्रले एउटा माइक्रोबस खरिद गरी 3 वर्ष प्रयोग गरी प्रतिवर्ष 20% ह्रास कट्टागरी रु.3,07,200 मा बेचे भने उनले सो माइक्रोबस कतिमा खरिद गरेका थिए ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) प्रतिवर्ष 15% का दरले मूल्य ह्रास हुँदा एउटा मोटरसाइकलको मूल्य 3 वर्षपछि रु. 107471.88 पुग्छ भने सो मोटरसाइकलको सुरुको मूल्य कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) औषधी प्रयोगका कारणले प्रतिघण्टा 10% ले भाइरसको सङ्ख्या घटिरहेको छ । विहानको 7 बजे सो सङ्ख्या 8×10^7 भए कति घण्टा पछि, व्याक्टरियाको सङ्ख्या 5.832×10^7 हुन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 मा जस्तै चक्रीय ह्रासको दर (R) पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

3. (क) रु. 75,000 मा किनेको स्कुटर 2 वर्ष चलाएर रु. 67,687.50 मा बेचियो भने प्रतिवर्ष ह्रासदर कति थियो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) काव्याले एउटा स्कुटर रु. 90,000 मा किनिन् । 2 वर्षपछि रु. 84,100 मा बेचिन भने कति प्रतिशत दरमा उक्त स्कुटरको मूल्य ह्रास भयो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एक जना शिक्षकले रु. 2,50,000 मा किनेको मोटरसाइकल 2 वर्ष प्रयोग गर्नुभयो । त्यसपछि, विभिन्न कारण देखाउँदै सो मोटरसाइकल रु. 1,60,000 मा विक्री गर्नुभयो भने मिश्रह्रास दर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) मनिसा BIT मा भर्ना भइन् । उनले आफ्नो पढाइको लागि एउटा कम्प्युटर रु. 40,000 मा किनेकी थिइन् । 2 वर्ष प्रयोग गरेपछि, यसको मूल्यमा रु. 7,600 ले ह्रास भयो भने ह्रासदर पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ड) एक जना मानिसले रु. 5,000 तिरेर किनेको एउटा घडी 3 वर्ष प्रयोग गरेपछि बिक्री गर्दा उनले रु. 625 मात्र पाए भने उक्त घडीको ह्रास दर कति भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 4 मा जस्तै समय (T) पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

4. (क) प्रतिवर्ष 6% का दरले ह्रास कट्टी हुँदा रु. 2,40,000 मा किनिएको एउटा छापा मेसिन कति वर्षपछि रु. 2,12,064 मा बेचिनु पर्दछ ?
- (ख) रु. 30,000 मा किनेको एउटा मेसिनको मूल्य वार्षिक 10% का दरले ह्रास हुँदै जान्छ । कति समयमा उक्त मेसिनको मूल्य रु. 24300 हुन्छ ?
- (ग) रु. 15,00,000 मा किनिएको घरको मूल्य वार्षिक 10%का दरले ह्रास हुँदा कति वर्ष पछि सो घरको मूल्य रु. 12,15,000 होला ?
- (घ) एउटा धानकुट्ने मेसिन केही वर्ष पहिले रु. 4,00,000 मा किनिएको थियो । अहिले यसको मूल्य रु. 1,96,000 मात्र पर्दछ । उक्त मेसिनको मूल्य 30% प्रति वर्ष ह्रास भइरहेको छ भने उक्त मेसिन कति वर्ष अगाडि किनिएको रहेछ ?
- (ड) एउटा कारको हालको मूल्य रु. 20,48,000 छ । यदि वार्षिक 15% का दरले मिश्रह्रास हुने भए कति वर्षपछि उक्त कारको मूल्य रु. 12, 57,72 8 हुन्छ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 5 मा जस्तै हरेक वर्षको फरक फरक दरमा चक्रीय ह्रास पछिको मूल्य पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

5. (क) एउटा मोबाइलको सुरुको मूल्य रु. 50,000 छ । यदि उक्त मोबाइलको मूल्य पहिलो वर्ष, दोस्रो वर्ष, र तेस्रो वर्ष क्रमशः 5%, 4% र 3% ले ह्रास हुँदै जान्छ भने 3 वर्ष पछि सो मोबाइलको मूल्य कति होला ?
- (ख) एउटा मेसिनको मूल्य 2 वर्षमा ह्रास हुँदै गइरहेको छ । पहिलो वर्ष र दोस्रो वर्षमा क्रमशः 4% र 5% ले ह्रास भएको सो मेसिनको अहिलेको मूल्य रु. 24,168 । 2 वर्ष अगाडिको मूल्य कति थियो होला ?
- (ग) एउटा रेफ्रिजेरेटरको मूल्य पहिलो वर्ष 3%, दोस्रो वर्ष 4% र तेस्रो वर्ष 5%का दरले चक्रीय ह्रास भएको छ । यदि त्यो रेफ्रिजेरेटर अहिले रु. 22,116 बेचियो भने त्यसको 3 वर्ष अगाडिको मूल्य कति थियो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य :

जनसङ्ख्या वृद्धिको कारण जन्म र बसाइँ सराई हो । आफ्नो छरछिमेकमा अथवा नजिकको पसलहरूमा जनसङ्ख्या वृद्धि र चक्रीय हास के कसरी हुन्छ ? सम्बन्धित व्यक्तिलाई सोधी जानकारी लिनुहोस् र सो जानकारी र आफ्नो अध्ययनका आधारमा एउटा प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) $P_T = P \left(1 - \frac{R}{100}\right)^T$ (ख) Rs. 18,22,500
(ग) Rs. 12,138, Rs. 4,662 (घ) Rs. 38,581.87
(ङ) Rs. 6,771.2, Rs. 1,228.6
2. (क) 10,000, 8145 (ख) 1,25,000 (ग) 6,00,000
(घ) 1,75,000 (ङ) 3 hours
3. (क) 5% (ख) $3\frac{1}{3}\%$ (ग) 20%
(घ) 10% (ङ) 50%
4. (क) 2 years (ख) 2 years (ग) 2 years
(घ) 2 years (ङ) 3 years
5. (क) 44,232 (ख) 26,500 (ग) 25,000

मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate)

4.0 परिचय (Introduction)

बिकल अध्ययनको शिलशिलामा अमेरिकाको एउटा विश्वविद्यालयमा जाने पक्का भएको छ । उसको मनमा पनि विभिन्न कुराहरू खेलिरहेका छन् त्यो भन्दा बढी उसको बाबाको मनमा कुराहरू खेलको आभास हुन्छ । त्यही बेलामा उँहाले विकललाइ सोध्नु हुन्छ ।

बाबा : बाबु (बिकल) तिमी त्यहाँ जाँदा नेपाली रूपैयाँ लिएर जान्छौ ? नेपाली रूपैयाँले त्यहाँको पढामा लाग्ने खर्च तिर्न मिल्छ, नि है ?

बिकल : बाबा, त्यहाँ नेपाली रूपैयाँ त कामै लाग्दैन नि । त्यसबाट न त पढाइको खर्च नै तिर्न मिल्छ न केहि किन्न नै पाइन्छ ।

बाबा : त्यसो भए त पढाइको खर्च कसरी तिर्ने । साथै खान र खान बस्नको लागि पनि त तिमीलाई समस्या हुने भयो नि । के गर्छौ बाबु ?

बिकल : यसको बारेमा बाबाले चिन्ता लिन नै पर्दैन नि । ल सन्नुहोस बाबा । म जाने बेलामा मेरो पढाइको खर्च तिर्न बैङ्कबाट नेपाली रूपैयाँबाट अमेरिकन डलर साटेर बैकमार्फत वा अरु कुनै माध्यमबाट त्यहाँ पठाइन्छ । जाने बेलामा पनि केही अमेरिकन डलर साथमै लिएर जान पाइन्छ ।

बाबा : ए त्यसो पो हो । अनि त्यहाँ तिमीले जागिर गर्नु भन्ने त आम्दानी पनि डलरमा नै हुन्छ होला नि ?

बिकल : हो बाबा ।

बाबा : अनि जागिरबाट आम्दानी हुन थालेपछि तिमीलाई लाग्ने खर्च कटाएर यहाँको ऋण तिर्न पठाउँछु भन्थ्यो, त्यो कसरी पठाउँछौ ? अनि त्यो डलर यहाँ चल्दैन, के गर्ने होला ?

बिकल : हजुर पनि..... । मैले कमाएको केही वचत गर्न सके भने त रेमिट्यान्स मार्फत नेपालमा पठाइहाल्छु नि । अनि हजुरले उक्त रकम बराबरको नेपाली रूपैयाँ पाइहाल्नु हुन्छ ।

बाबा : बाबु अनि व्यापारीहरूले विदेशबाट सामान किनेर ल्याउँछन् के उनले सामानको रकम भुक्तानी गर्दा नेपाली रूपैयाँमा गर्न सक्छन् त ?

बिकल : बाबालाई पनि चाहिने नचाहिने कुरा सोध्नु पर्ने । ल सुन्नुहोस् । व्यापारीले जुन देशबाट सामान किन्ने हो उसलाइ तिर्नको लागि त्यही देशको मुद्रा प्रयोग गर्नु पर्छ । बुझ्नुभयो ?

बाबा : न भर्क न बाबु । मैले कसलाइ सोध्नु त नि । अब त धेरै कुरा बुझे बाबु । ल राम्रोसँग गए, मेहनत गरेर पढ्नु । उत्कृष्ट नतिजाको लागि हामी बाबु आमाको सधैं तिमिलाई आर्शिवाद छ

बिकल : हस् बाबा । म कहाँ भोलि नै जाने हो र अबै प्रशस्तै दिन बाँकी छन् । सुतम् अब त अवेर पनि भइसकेछ । गुड नाइट बाबा ।

बाबा : ल ल शुभरात्री छोरा ।

उल्लिखित बाबा र छोराको छलफलबाट के प्रष्ट हुन्छ भने जुन देशमा पढ्न वा घुम्न वा काम गर्न गइन्छ वा जुन देशसँग व्यापार गरिन्छ त्यही देशको मुद्रा प्रयोग गर्ने गरिन्छ । फरक फरक देशबाट जुनसुकै माध्यमको प्रयोग गरी पैसा नेपाल पठाउँदा परिवारले पाउने रकम नेपाली मुद्रा नै हुने गर्दछ ।

4.1 मुद्रा र विनिमय दर (Currency and Exchange Rate)

क्रियाकलाप 1

नेपाल राष्ट्र बैङ्कले मिति 2079 कार्तिक 8 गते (October 26,2022) का लागि निर्धारण गरेको केही राष्ट्रहरूको मुद्राको विनिमय दर अध्ययन गर्नुहोस् र तल सोधिएका प्रश्नहरूको सही उत्तर के हुन्छ ? रेडियो सुनेर वा टेलिभिजन हेरेर वा पत्रपत्रिका पढेर वा गुगलमा खोजेर जानकारी लिनुहोस् ।

नेपाल राष्ट्र बैङ्क
केन्द्रीय कार्यालय, विदेशी विनिमय व्यवस्थापन विभाग

कार्तिक ८ गते २०७९ (October 26, 2022)

देश	मुद्रा	एकाइ	खरिद दर (रु)	विक्री दर (रु)
भारत	भारतीय रुपियाँ	100	160.00	160.15
खुला बजार विनिमय दर (नेपाल राष्ट्र बैङ्कको प्रयोजनका लागि)				
	मुद्रा	एकाइ	खरिद दर (रु)	विक्री दर (रु)
अमेरिका	अमेरिकी डलर	1	132.07	132.67
युरो प्रयोग पर्ने देशहरू	युरो	1	130.33	130.92
बेलायत	पाउण्ड स्टर्लिङ	1	149.67	150.35
स्विजरल्याण्ड	स्विस फेड्क	1	131.77	132.37
अष्ट्रेलिया	अष्ट्रेलियन डलर	1	83.29	83.67
क्यानडा	क्यानेडियन डलर	1	96.13	96.57
सिङ्गापुर	सिङ्गापुर डलर	1	92.70	93.12
जापान	जापानी येन	10	8.87	8.91
चीन	चिनिया युआन	1	18.07	18.15
साउदी अरब	साउदी अरवियन रियाल	1	35.13	35.29
कतार	कतारी रियाल	1	36.27	36.43
थाइल्याण्ड	थाइ भाट	1	3.45	3.47

सम्युक्त अरब इमिरेट्स	सम्युक्त अरब इमिरेट दिराम	1	35.96	36.12
मलेसिया	मलेसियन रिङ्गोट	1	27.89	28.02
दक्षिण कोरिया	दक्षिण कोरियन वन	100	9.19	9.23
स्विडेन	स्विडिस क्रोनर	1	11.85	11.90
डेनमार्क	डेनिस क्रोनर	1	17.52	17.60
हङकङ	हङकङ डलर	1	16.82	16.90
कुवेत	कुवेती डिनार	1	425.66	427.60
वहराइन	वहराइन दिनार	1	350.34	351.93

- (क) मुद्रा विनिमय भन्नाले के बुझिन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- (ख) हाम्रो देशमा मुद्राको विनिमय दर कसले निर्धारण गर्दछ ?
- (ग) नेपालको कुन देशसँग मुद्रा विनिमय दर हरेक दिन परिवर्तन हुँदैन ? कुन कुन देशहरूसँग खुला बजार विनिमय दर छ ?
- (घ) माथि दिइएको मुद्राको विनिमय दर अनुसार खरिद दर भन्दा बिक्री दर किन बढी छ होला ?
- (ङ) खरिद दर र बिक्री दर भन्नाले के बुझिन्छ ? छलफल गर्नुहोस् ।
- (च) यदि तपाईं अमेरिका जाँदै हुनुहुन्छ र तपाईंसँग भएको नेपाली रूपैयाँलाई अमेरिकी डलरमा साट्न जाँदा बैङ्कले कुन दर प्रयोग गर्दछ ?

एउटा देशको मुद्रा लिएर वा दिएर सो को मूल्य बराबरको अर्को देशको मुद्रा दिने वा लिने प्रक्रिया विश्वका हरेक देशमा भइरहन्छ, यसलाई नै मुद्रा विनिमय भनिन्छ ।

कुनै एक देशको मुद्रा अर्को देशको मुद्रामा रूपान्तरण गरेमा मात्र कारोवार गर्न सकिन्छ, वा कारोवार सहज हुन्छ । त्यसकारण कुनै आर्थिक कारोवार गर्नका लागि एक देशको मुद्राको मूल्य अर्को देशमा कति हुने भनी सरकारको आधिकारीक निकाय वा सरकारको केन्द्रीय बैङ्कले निश्चित दर निर्धारण गरेको हुन्छ । उक्त दरलाई नै विदेशी मुद्रा विनिमय दर भनिन्छ । यो दर देशको आर्थिक स्थिति वा कारोवार अनुसार निर्धारण गरिन्छ ।

हाम्रो देशको विनिमय दर भारतसँग स्थिर छ भने अरु देशसँग चलायमान छ । हाम्रो देशमा मुद्राको विनिमय दर नेपाल राष्ट्र बैङ्कले निर्धारण गरेको हुन्छ । बैङ्क वा वित्तिय संस्थाले विदेशी मुद्रा खरिद गर्दा दिने विनिमय दरलाई खरिद दर र बिक्री गर्दा दिने विनिमय दरलाई बिक्री दर भनिन्छ । वाणिज्य बैङ्कहरूले नेपाली रूपैयाँबाट डलर साट्टा कमिशन लिने गर्दछ । कमिशनलाई प्रतिशतमा व्यक्त गरिएको हुन्छ ।

नोट: यो विनिमय दरलाई बैङ्कले आवश्यकता अनुसार जुनसुकै समयमा पनि संशोधन गर्न सक्नेछ । वाणिज्य बैङ्कहरूले तोक्ने दर भने फरक हुन सक्नेछ । अद्यावधिक विनिमय दर बैङ्कको वेबसाइट www.nrb.org.npमा उपलब्ध हुनेछ ।

उदाहरण 1 (खरिद दर र बिक्री दरको आधारमा मुद्रा विनिमय गर्दाको फरक)

विनिमय दर माथि दिइएको छ । सो विनिमय दरका आधारमा 300 अमेरिकी डलरको खरिद दर र बिक्री दर नेपाली रूपैयाँमा कति फरक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दिइएको अमेरिकी डलर = 300

विनिमय दर तालिकाअनुसार, 1 अमेरिकी डलरको खरिद दर = रु.132.07

अब, 300 अमेरिकी डलरको खरिद मूल्य = रु.132.07 × 300 = रु.39,621

फेरी, बिक्री दरअनुसार, 1 अमेरिकी डलरको बिक्री दर = रु.132.67

300 अमेरिकी डलरको बिक्री मूल्य = रु.132.67 × 300 = रु.39,801

तसर्थ, खरिद मूल्य र बिक्री मूल्यको फरक = रु. 39,801– रु.39,621 = रु.180

उदाहरण 2

नेपाल राष्ट्र बैङ्कको मुद्रा विनिमय दरअनुसार अमेरिकी डलर 1 को खरिद दर र बिक्री दर क्रमशः 132.07 र 132.67 छन् भने,

- (क) नेपाली रु. 92,471 को कति अमेरिकन डलर साट्न सकिन्छ ?
(ख) तपाइँले अमेरिकन डलर (\$) 600 सँग कति नेपाली रुपियाँ साट्न सक्नुहुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, प्रश्नअनुसार, अमेरिकी डलर 1 को बिक्री दर = रु.132.67

अमेरिकी डलर 1 को बिक्री दर = रु.132.67

(क) बिक्री दर अनुसार,

नेपाली रु.132.67 = अमेरिकी डलर 1

नेपाली रु.1 = अमेरिकी डलर $\frac{1}{132.67}$ (*: एकिक नियम अनुसार)

नेपाली रु. 92,471 = अमेरिकी डलर $\frac{1}{132.67} \times 92,471 = \697

अतः नेपाली रु. 92,471 को अमेरिकन डलर \$697 साट्न सकिन्छ ।

(ख) दर अनुसार, अमेरिकी डलर (\$) 1 = नेपाली रु.132.07

अमेरिकी डलर \$600 = नेपाली रु.132.07 \times 600 = नेपाली रु.79,242

अतः अमेरिकी डलर \$600 सँग नेपाली रु.79,242 साट्न सकिन्छ ।

उदाहरण 3

माथि दिइएको विदेशी मुद्रा विनिमयको खरिद दर प्रयोग गरी विभिन्न देशका मुद्राहरूलाई नेपाली रूपैयाँमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) 8,000 पाउण्ड स्टर्लिङ (ख) 20,000 चिनिया युआन (ग) 9,000 कतारी रियाल

समाधान : यहाँ,

(क) 8,000 पाउण्ड स्टर्लिङ

विनिमय दर तालिका अनुसार,

1 पाउण्ड स्टर्लिङको खरिद दर = रु.130.33

अब, 8,000 पाउण्ड स्टर्लिङको खरिद मूल्य = रु.130.33× 8,000 = रु. 10,42,640

अतः 8,000 पाउण्ड स्टर्लिङको खरिद मूल्य नेपाली रु. 10,42,640 हुन्छ ।

(ख) 20,000 चिनिया युआन

1 चिनिया युआनको खरिद दर = रु.132.67

20,000 चिनिया युआनको खरिद मूल्य = रु.132.67× 20,000 = रु. 3,61,400

अतः 20,000 चिनिया युआनको खरिद मूल्य नेपाली रु. 3,61,400 हुन्छ ।

(ग) 9,000 कतारी रियाल

1 कतारी रियालको खरिद दर = रु.36.27

9,000 कतारी रियालको खरिद मूल्य = रु.36.27 × 9,000 = रु. 3,26,430

अतः 9,000 कतारी रियालको खरिद मूल्य नेपाली रु. 3,26,430 हुन्छ ।

उदाहरण 4

यहाँ दिइएको बिक्री दर अनुसार, 1 युरो = रु.130.92, 100 दक्षिण कोरियन वन = रु.9.23, 1 क्यानेडियन डलर = रु.96.57 प्रयोग गरी नेपाली रुपियाँमा बदल्नुहोस् ।

(क) 8,888 युरो

(ख) 2,60,000 दक्षिण कोरियन वन

(ग) 6,550 क्यानेडियन डलर

समाधान : यहाँ,

(क) 8,888 युरो

1 युरो = रु.130.92

8,888 युरोको बिक्री मूल्य = रु.130.92× 8,888 = रु. 11,63, 616.96

अतः 8,888 युरोको बिक्री मूल्य नेपाली रु. 11,63, 616.96 हुन्छ ।

(ख) 2,60,000 दक्षिण कोरियन वन

100 दक्षिण कोरियन वन = रु.9.23

100 दक्षिण कोरियन वन = रु. $\frac{9.23}{100}$

$$2,60,000 \text{ दक्षिण कोरियन वनको बिक्री मूल्य} = \text{रु.} \frac{9.23}{100} \times 2,60,000 = \text{रु.} 23,998$$

अतः 2,60,000 दक्षिण कोरियन वनको बिक्री मूल्य नेपाली रु. 23,998 हुन्छ ।

(ग) 6,550 क्यानेडियन डलर

$$1 \text{ क्यानेडियन डलर} = \text{रु.} 96.57$$

$$6,550 \text{ क्यानेडियन डलरको बिक्री मूल्य} = \text{रु.} 96.57 \times 6,550 = \text{रु.} 6,32,533.5$$

अतः 6,550 क्यानेडियन डलरको बिक्री मूल्य नेपाली रु. 6,32,533.5 हुन्छ ।

उदाहरण 5

यदि भारतीय रुपियाँ 100 = नेपाली रुपियाँ 160 भए 48000 नेपाली रुपियाँसँग कति भारतीय रुपियाँ साट्न सकिन्छ ।

समाधान : यहाँ,

यहाँ, नेपाली रुपियाँ 160 = भारतीय रुपियाँ 100

$$\text{नेपाली रुपियाँ } 1 = \text{भारतीय रुपियाँ } \frac{100}{160}$$

$$\text{नेपाली रुपियाँ } 48,000 = \text{भारतीय रुपियाँ } \frac{100}{160} \times 48,000 = 30,000 \text{ भारतीय रुपियाँ}$$

अतः नेपाली रुपियाँ 48,000 सँग भारतीय रुपियाँ 30,000 साँट्न सकिन्छ ।

अभ्यास 4.1

उदाहरण 1 अनुसार खरिद दर र बिक्री दरको आधारमा मुद्रा विनिमय गर्दाको फरक पत्ता लगाउने प्रश्नहरू

1. विनिमय दर माथि दिइएको छ । सो विनिमय दरका आधारमा तल दिइएका देशहरूको मुद्राको खरिद दर र बिक्री दर नेपाली रूपैयाँमा कति फरक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

क) अष्ट्रेलियन डलर (\$) 250

ख) अमेरिकी डलर (\$) 500

ग) युरो (€) 330

घ) संयुक्तअरब इमिरेट दिराम (।.) 1500

ङ) मलेसियन रिङ्गेट (RM) 672

च) सिङ्गापुर डलर (\$) 572

उदाहरण 2 अनुसार खरिद दर र बिक्री दरको आधारमा समाधान गर्ने प्रश्नहरू

2. नेपाल राष्ट्रबैङ्को मुद्रा विनिमय दर अनुसार पाउण्ड स्टर्लिङ 1 को खरिद दर र बिक्री दर क्रमशः 149.67 र 150.35 छन् भने,
- (क) नेपाली रु. 95,000 को कति पाउण्ड स्टर्लिङ(£) साट्न सकिन्छ ?
- (ख) तपाईंले पाउण्ड स्टर्लिङ (£) 550 संग कति नेपाली रूपैयाँ साट्न सक्नुहुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. नेपाल राष्ट्र बैङ्को मुद्रा विनिमय दर अनुसार युरो 1 को खरिद दर र बिक्री दर क्रमशः 130.33 र 130.92 छन् भने,
- (क) नेपाली रु. 85,600 को कति युरो(€) साट्न सकिन्छ ?
- (ख) तपाईंले युरो (€) 450 संग कति नेपाली रुपियाँ साट्न सक्नुहुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

4. अधिल्लो पृष्ठमा दिइएको तालिकाबाट खरिद दर प्रयोग गरी नेपाली रुपियाँमा बदल्नुहोस् ।

(क) 1,350 मलेसियन रिङ्गेट	(ख) 2,700 कुवेती डिनार
(ग) 50,000 थाइ भाट	(घ) 28,000 साउदीअरब रियाल
(ङ) 12,000 भारतीय रुपियाँ	(च) 17,000 चिनियाँ युआन
(छ) 2,500 डेनिस कोनर	(ज) 2,800 वहराइन दिनार
(झ) 3,500 स्विस फ्रेङ्क	

उदाहरण 4 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

5. यहाँ दिइएको बिक्री दरअनुसार, 1 कतारी रियाल = रु.36.43, 1 स्विडिस कोनर = रु.11.90, 1 सम्युक्त अरब इमिरेट दिराम = रु.36.12 प्रयोग गरी नेपाली रुपियाँमा बदल्नुहोस् ।
- (क) 5, 000 कतारी रियाल (ख) 50,000 स्विडिस कोनर

(ग) 4,550 सम्युक्त अरब इमिरेट दिराम

उदाहरण 5 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

6. यदि नेपाली रु.132.67 = 1 अमेरिकन डलर भए ने.रु. 216860 लाई अमेरिकन डलरमा बदल्नुहोस् ।
7. यदि नेपाली रु.427.60 = 1 कुवेती दिनार भए ने.रु. 1064250 सँग कति कुवेती दिनार साट्न सकिन्छ ?
8. यदि ने.रु. 18.15 = 1 चिनियाँ युआन भए ने.रु. 62600 सँग कति चिनियाँ युआन साट्न सकिन्छ ।

उत्तर :

1. (क) Rs. 95 (ख) Rs. 300 (ग) Rs. 194.7
(घ) Rs. 240 (ङ) Rs. 87.36 (च) Rs. 240.24
2. (क) £ 631.85 (ख) Rs. 82,318.5
3. (क) € 653.83 (ख) Rs. 58,648.5
4. (क) Rs. 48,586 (ख) Rs. 11,49,282 (ग) Rs. 1,72,500
(घ) Rs. 9,83,640 (ङ) Rs. 1920 (च) Rs. 3,07,190
(छ) Rs. 43,800 (ज) Rs. 9,80,952 (झ) Rs. 4,61,195
5. (क) Rs. 1,82,150 (ख) Rs. 5,95,000 (ग) Rs. 1,64,346
6. \$ 1634.58
7. KD 2488.89
8. CNY(¥) 3449.03

नोट : ने.रु. = नेपाली रूपैयाँ

4.2 चेन रुलको प्रयोग गरी मुद्रा विनिमय (Money Exchange by Using Chain Rule)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको जानकारी अध्ययन गर्नुहोस् ।

यदि ने.रु. 3,200 सँग भा.रु. 2,000 तथा 75,000 अमेरिकन डलरसँग भा.रु. 67,50,000 साट्न सकिन्छ । सविनलाई पनि ने.रु. 64,000 सँग अमेरिकन डलर साट्नु पर्ने थियो । कति अमेरिकन डलर हुन्छ होला ? प्रश्नमा भा.रु. किन दिएको होला ? त्यसको प्रयोग कसरी गर्ने होला ? सविन यस्तै कुराहरू सोच्दै बसिरहेको थियो । त्यही बेलामा उसले गणित शिक्षक आफ्नो घरतिर आइरहेको देख्छ । हेर्दा हेर्दै सर पनि आउनु भयो ।

सविन : सर नमस्कार !

शिक्षक : नमस्कार ! नमस्कार ! के गर्दै छौ सविन ?

सविन : सर मलाइ त एउटा प्रश्नले टाउको नै दुखायो । के गर्ने होला ?

शिक्षक : खै के रहेछ हेरौ त । ए यो प्रश्न ! यसमा हामीले ने.रु. 64,000 लाई अमेरिकन डलरमा साट्नु पर्ने छ । ल कापी लेउ त म सिकाउँछु । यस्तो अवस्थामा मानौं,
 x अमेरिकन डलर = ने.रु. 64000 भनेर लिनुपर्दछ ।

सविन : हामीले ने.रु.लाई अमेरिकन डलरमा साट्नु छ त्यसैले ने.रु. 64000 = x अमेरिकन डलर लेख्यौं हो सर ।

शिक्षक : हो । अब हेरौं है त । दिएको जानकारीलाई निम्नअनुसार मिलाएर लेख्नु पर्छ ।

$$x \text{ अमेरिकन डलर} = \text{ने.रु. } 64000$$

$$\text{ने.रु. } 3200 = \text{भा.रु. } 2000$$

$$\text{भा.रु. } 6750000 = 75000 \text{ अमेरिकन डलर}$$

सविन : पहिलो लाइनको दाँया पट्टि ने. रु. भएकोले दोस्रो लाइनको बायाँ ने. रु. बाट शुरु गर्ने । त्यसैगरी दोस्रो लाइनको दायाँ भागमा भा. रु. भएकोले तेस्रो लाइनको बायाँ भा. रु. लेखी दायाँ भागमा अमेरिकन डलर लेखेको हो सर ?

शिक्षक : एकदम ठीक भन्यौ सविन । त्यति मात्र कहाँ हो र सविन शुरु अमेरिकन डलरबाट गन्यौ अनि अमेरिकन डलरबाट नै टुङ्गायौं । त्यसैले पहिलो लाइनमा जुन देशको मुद्राबाट सुरु भयो अन्तिम लाइनमा त्यही देशको मुद्राबाट टुङ्गाउनु पर्छ

सविन : अब x को मान पत्ता लगाउन के गर्नुपर्छ ।

शिक्षक : हरेक लाइनको बायाँको मान बायाँका अर्का मानहरूसँग गुणन गर्ने । त्यसैगरी दायाँको मान दायाँका अरु मानहरूसँग गुणन गर्नुपर्छ । जसअनुसार,

$$x \times 3200 \times 6750000 = 64000 \times 2000 \times 75000$$

अनि समाधान गर्दा,

$$\text{अथवा, } x = \frac{64000 \times 2000 \times 75000}{3200 \times 6750000}$$

$$x = 444.44$$

सविन : अनि x पत्ता लगाउन x बाहेक अरु मानहरू गुणन गरी अर्कोतिर भाग गर्ने । त्यसकारण, ने.रु. 64000 सँग 444.44 अमेरिकन डलर साट्न सकिन्छ ।

शिक्षक : हो सविन तिमिले ठीक भन्यौ । अनि यस तरिकालाई नै श्रृङ्खला (चेन) नियम भनिन्छ । बुझ्यौ त ? के यस्तै अरु प्रश्नहरू पनि समाधान गर्न सक्छौ त सविन ?

सविन : सक्छु सर ।

शिक्षक : ल अँध्यारो पो हुन थालेछ । म गए है सविन ।

सविन : हस् सर । सर आएको भएर सिक्न पाएँ । सरलाई धेरै धेरै धन्यवाद ।

यसरी अज्ञात चरहरूको मान पत्ता लगाउन ऐकिक नियम, अनुपात र समानुपातको वैकल्पिक तरिका श्रृङ्खला (चेन) नियम हो । चेन नियमको प्रयोग गर्दा समस्याको समाधान गर्न सजिलो हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि 1.05 अमेरिकन डलर = 1 युरो र भा.रु. 71.85 = 1 युरो भए 7,500 अमेरिकन डलरसँग कति भारतीय रूपैया साट्न सकिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

यहाँ, मानौँ भा.रु. $x = 7,500$ अमेरिकन डलर

1.05 अमेरिकन डलर = 1 युरो

1 युरो = भा.रु. 71.85

चेन नियमको प्रयोग गर्दा

$$x \times 1.05 \times 1 = 7,500 \times 1 \times 71.85$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{7,500 \times 1 \times 71.85}{1.05 \times 1}$$

$$\text{अथवा, } x = 5,13,214.28$$

अतः 7,500 अमेरिकन डलरसँग भा.रु. 5,13,214.28 साट्न सकिन्छ ।

नोट : भारतीय रूपैया = भा.रु.

यसलाई अर्को तरीकाबाट पनि समाधान गर्न सकिन्छ ।

हामीलाई थाहा छ

$$1.05 \text{ अमेरिकन डलर} = 1 \text{ युरो}$$

$$1 \text{ अमेरिकन डलर} = \frac{1}{1.05} \text{ युरो}$$

$$7,500 \text{ अमेरिकन डलर} = \frac{1}{1.05} \times 7,500 \text{ युरो} = 7,142.8571429 \text{ युरो}$$

$$\text{फेरी, } 1 \text{ युरो} = \text{भारतीय रु.} 71.85$$

$$7,142.8571429 \text{ युरो} = \text{भारतीय रु.} 71.85 \times 7,142.8571429 = \text{भा.रु.} 513214.28$$

अतः 7,500 अमेरिकन डलरसँग भारतीय रु. 5,13,214.28 साट्न सकिन्छ ।

उदाहरण 2

विकास अध्ययनको लागि अमेरिका जान लागेका छन् । उनले आफूसँगै जाँदा अमेरिकन डलर (\$)4,000 लिएर जान पाउने भएकोले उनले सो रकम लिएर जान चाहन्छन् । यदि बाणिज्य बैङ्कले उक्त रकम साट्दा 2% कमिसन लिने गर्दछ भने उनलाई जम्मा कति नेपाली रूपैयाँ आवश्यक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् । (अमेरिकन डलर 1 = रु.132.67)

समाधान : यहाँ,

$$\text{अमेरिकन डलर} = \$4,000, \text{ कमिसनको दर} = 2\%$$

$$\text{अमेरिकन डलर } (\$1) = \text{रु.} 132.67$$

$$\text{अमेरिकन डलर } (\$) 4000 = \text{रु.} 132.67 \times 4000 = \text{रु.} 5,30,680$$

$$\text{फेरी, कमिसन वापतको रकम} = \text{रु. } 5,30,680 \text{ को } 2\% = \text{रु. } 5,30,680 \times \frac{2}{100} = \text{रु. } 10,613.6$$

$$\text{अतः विकासलाई आवश्यक नेपाली रूपैयाँ} = \text{रु. } 5,30,680 + \text{रु. } 10,613.6 = \text{रु. } 5,41,293.6$$

उदाहरण 3 (विदेशी मुद्राको तुलनामा नेपाली मुद्रा अवमूल्यन वा अधिमूल्यन भएको अवस्थामा)

एक जना व्यक्तिले अष्ट्रेलियन डलर 1 = रु. 83.67को दरमा नेपाली मुद्रा रु. 1,50,000 को अष्ट्रेलियन डलर किने । चार दिनपछि अष्ट्रेलियन डलरको तुलनामा नेपाली मुद्रा 5% ले अवमूल्यन भयो । उक्त दिनमा उसँग भएको अष्ट्रेलियन डलरको पुनः नेपाली मुद्रामा साट्यो ।

क) रु.1,50,000 बराबर कति अष्ट्रेलियन डलर हुन्छ ?

ख) नेपाली मुद्रा 5% ले अवमूल्यन हुँदा अष्ट्रेलियन डलर 1 बराबर कति नेपाली रूपैयाँ हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

ग) उक्त व्यक्तिलाई कति नाफा वा नोक्सान भए होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$$\text{अष्ट्रेलियन डलर } 1 = \text{रु. } 83.67$$

एक जना व्यक्तिले रु.1,50,000 को अष्ट्रेलियन डलर किन्यो ।

अवमूल्यनको दर = 5%, नाफा वा नोक्सान = ?

क) अब, रु. 83.67 = अष्ट्रेलियन डलर 1

$$\text{रु. } 1 = \text{अष्ट्रेलियन डलर } \frac{1}{83.67}$$

$$\text{रु. } 1,50,000 = \text{अष्ट्रेलियन डलर } \frac{1}{83.67} \times 1,50,000 = \text{अष्ट्रेलियन डलर } 1792.75$$

चार दिनपछि नेपाली मुद्रा 5% ले अवमूल्यन भयो तसर्थ चार दिन पछिको विनिमय दर

$$\text{अष्ट्रेलियन डलर } 1 = \text{रु. } 83.67 + \frac{5}{100} \times \text{रु. } 83.67$$

$$= \text{रु. } 83.67 + \text{रु. } 4.18 = \text{रु. } 87.85$$

पुनः उसले आफूसँग भएको अष्ट्रेलियन डलर नेपाली रूपैयाँमा साट्यो ।

$$\text{त्यसैले, अष्ट्रेलियन डलर } 1792.75 = \text{रु. } 87.85 \times 1792.75 = \text{रु. } 1,57,493.08$$

यहाँ, $\text{रु.}1,57,493.08 > \text{रु.}1,50,000$ त्यसैले उसलाई नाफा भयो

तसर्थ, नाफा रकम = $\text{रु.}1,57,493.08 - \text{रु.}1,50,000 = \text{रु.}7,493.08$

अभ्यास 4.2

उदाहरण 1 अनुसार (मुद्रा विनिमय र 3 प्रकारको मुद्रा)

1. यदि भा.रु. $839125 = 10000$ पाउण्ड स्टर्लिङ र 1 पाउण्ड स्टर्लिङ $= 8.60$ चिनियाँ युआन भए 5000 चिनियाँ युआनसँग कति भा.रु. साट्न सकिन्छ ?
2. यदि ने.रु. $7958 = 100$ अस्ट्रेलियन डलर र 85.10 जापानी येन $= 1$ अस्ट्रेलियन डलर भए 382950 जापानी येनसँग कति ने.रु. साट्न सकिन्छ ?

उदाहरण 2 अनुसार (मुद्रा विनिमय र कमिशन)

3. अमेरिकी डलर 1 को विनिमय दर रु. 132.67 छ । मुद्रा सट्टी गर्दा बैङ्कले 2% कमिसन लिन्छ । यदि एक जना मानिसलाई अमेरिकी डलर $(\$5,000)$ आवश्यक छ भने उसले कति नेपाली रूपैयाँ तिर्नुपर्दछ ?
4. शशाङ्कले विभिन्न देशहरूको भ्रमण गर्ने निधो गरेका छन् । त्यसका लागि उनलाई अमेरिकन डलर $(\$45,000)$ चाहिन्छ । मुद्रा सट्टी गर्दा बैङ्कले 2% कमिसन लिन्छ । उनलाई जम्मा कति नेपाली रूपैयाँ आवश्यक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् । (अमेरिकन डलर $1 = \text{रु.}132.67$)

उदाहरण 3 अनुसार (बिदेशी मुद्राको तुलनामा नेपाली मुद्रा अवमूल्यन वा अधिमूल्यन)

5. एकजना व्यापारीले अमेरिकन डलर $1 =$ नेपाली रु. 130 को दरमा, नेपाली मुद्रा रु. $12,40,000$ को अमेरिकन डलर साटेछन् । एक हप्ता पछि नेपाली मुद्रा 10% ले अवमूल्यन भयो । त्यही अवमूल्यन भएको समयमा उसले पुनः उक्त डलर नेपाली मुद्रामा साटेछन् ।
 - (क) रु. $12,40,000$ बराबर कति अमेरिकन डलर हुन्छ ?
 - (ख) नेपाली मुद्रा 10% ले अवमूल्यन हुँदा अमेरिकन डलर 1 बराबर कति नेपाली रूपैयाँ हुन्छ ?
 - (ग) उक्त व्यक्तिलाई कति नाफा वा नोक्सान भयो होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. एक जना व्यापारीले पाउण्ड स्टर्लिङ (£) $1 =$ रु. 150 को दरमा रु. $8,40,000$ को पाउण्ड स्टर्लिङ साट्यो । पाँच दिन पछि नेपाली मुद्रा 5% ले अधिमूल्यन भयो र उक्त दिनमा

उसँग भएको पाउण्ड स्टर्लिङ पुनः नेपाली मुद्रामा साट्टा उसलाई कति नाफा वा नोक्सान भए होला ?

क) रु. 8,40,000 बराबर कति पाउण्ड स्टर्लिङ हुन्छ ?

ख) नेपाली मुद्रा 5% ले अवमूल्यन हुँदा पाउण्ड स्टर्लिङ 1 बराबर कति नेपाली रूपैयाँ हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

ग) उक्त व्यक्तिलाई कति नाफा वा नोक्सान भए होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य :

पत्रपत्रिका वा गुगलबाट खोजी आजको दिनको विदेशी मुद्रा विनिमय दर पत्ता लगाउनुहोस् । दुईदिन अगाडी र आजको दिनमा मुद्रा विनिमय दरमा कतिको फरक पाउनुहुन्छ वा एउटै पाउनुहुन्छ ? साथै उक्त दिनमा अन्तर्राष्ट्रिय बजारमा सुन प्रति के.जी. वा प्रति तोला वा प्रति ग्राम कति छ ? अमेरिकामा कति छ ? बेलायतमा कति छ ? अष्ट्रेलियामा कति छ ? संयुक्त अरब इमिरेटमा कति छ ? उक्त दिनमा कुन देशको कुन सहरमा किन्दा कतिले सस्तो पर्दछ ? यसबारेमा अध्ययन गर्नुहोस् ।

उत्तर :

1. IC 487.63

2. Rs. 3,58,110

3. Rs. 6,76,617

4. Rs. 60,89,553

5. (क) \$ 9538.461538 (ख) Rs. 143 (ग) Profit = Rs. 1,24,000

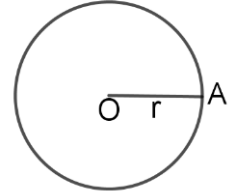
6. (क) £ 5600 (ख) Rs. 157.5 (ग) Profit = Rs. 42,000

क्षेत्रफल र आयतन (Area and Volume)

5.0 परिचय (Introduction)

वृत्त (Circle):

(क) कुनै वृत्तको अर्धव्यास 'r' भए यसको क्षेत्रफल (A) = πr^2 र परिधि (P) = $2\pi r$ हुन्छ ।



(ख) यदि प्रति इँटा, ढुङ्गा अथवा प्रति मिटर, वर्गमिटर, घनमिटरको खर्च दिइएको वस्थामा,

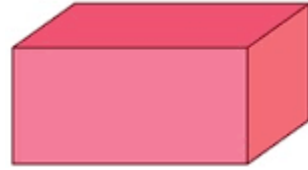
जम्मा लाग्ने खर्च (T) = वस्तुहरूको सङ्ख्या (N) × एकाइ मूल्य/क्षेत्रफल (a) हुन्छ ।

षड्मुखा र घन (Cuboid and Cube):

षड्मुखाको 6 ओटा सतहहरू हुन्छन् । विपरितमा रहेका सतहहरूका क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् ।

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $2(lb + bh + hl)$

आयतन(V) = $l \times b \times h = A \times h$



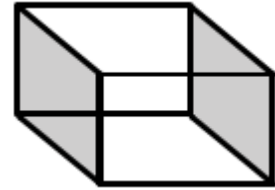
घन (cube):

घनकार वस्तुमा लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर हुन्छन् । यसमा 6 ओटा वर्ग आकारका सतहहरू हुन्छन् । सबै सतहका क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् । एउटा सतहको क्षेत्रफल = l^2 हुन्छ भने 6 ओटा सतहको क्षेत्रफललाई पूरा सतहको क्षेत्रफल भनिन्छ ।

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $6l^2$

छड्के सतहको क्षेत्रफल = $2h(l + b)$

आयतन (V) = l^3

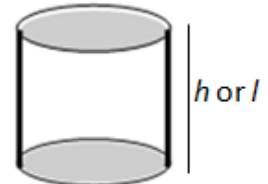


बेलना (Cylinder):

आधारको अर्धव्यास (r) र उचाइ/लम्बाइ (h) दिइएको अवस्थामा

(क) आयतन(V) = आधारको क्षेत्रफल × उचाइ/लम्बाइ

= $\pi r^2 h$ अथवा $\pi r^2 l$



(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल = आधारको परिधि \times उचाइ

$$= 2\pi rh \text{ अथवा } \pi dh \text{ जहाँ } d \text{ (व्यास)} = 2r$$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल = 2 ओटा वृत्ताकार (आधार) को क्षेत्रफल + वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$= 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$= 2\pi r(r + h)$$

बेलनालाई आधार वृत्त भएको प्रिज्म पनि भनिन्छ ।

गोला (Sphere):

यदि गोलाको व्यास (d) अथवा अर्धव्यास (r) दिइएको अवस्थामा,

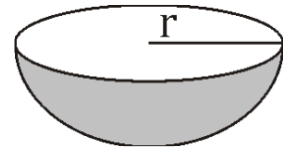


(क) आयतन (v) = $\frac{4}{3}\pi r^3$ अथवा $\frac{1}{6}\pi d^3$

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल = $4\pi r^2$ अथवा πd^2

अर्धगोला (Hemisphere): आधारको अर्धव्यास (r) र व्यास (d) दिइएको अवस्थामा अर्धगोलाको,

(क) आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$ अथवा $\frac{1}{12}\pi d^3$



(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल = $2\pi r^2$ अथवा $\frac{1}{2}\pi d^2$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल = $3\pi r^2$ अथवा $\frac{3}{4}\pi d^2$

अर्ध गोलाको आधारलाई "Great Circle" पनि भनिन्छ ।

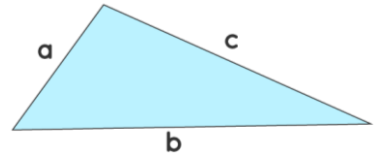
प्रिज्म (Prism):

आधारको क्षेत्रफल (त्रिभुज आधार भएको प्रिज्ममा)

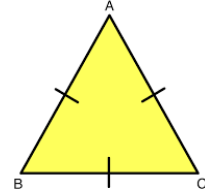
(क) त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}$ आधारको लम्बाइ \times उचाइ = $\frac{1}{2} \times b \times h$



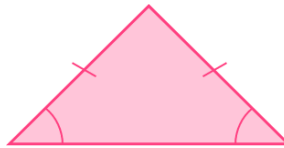
- (ख) विषमबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{4}$ जहाँ $S = \frac{a+b+c}{2}$



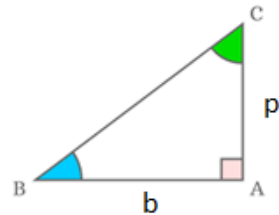
- (ग) समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
जहाँ a = समबाहु त्रिभुजको भुजाहरूको लम्बाइ



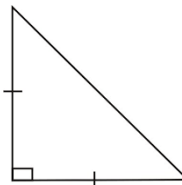
- (घ) समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$ जहाँ b = समद्विबाहु त्रिभुजको आधारको लम्बाइ र a = समद्विबाहु त्रिभुजको बराबर दुई भुजाहरूको लम्बाइ



- (ङ) समकोणी त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times b \times p$
जहाँ b = आधार र p = लम्ब भुजा



- (च) समद्विबाहु समकोणी त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} p^2$ जहाँ $p = b$ हुने भएकोले ।



- (छ) आयताकार सतहको क्षेत्रफल (छड्के सतहको क्षेत्रफल) (L.S.A) = $P \times h$, जहाँ P = आधारको परिमिती र h = पिज्मको उचाइ

(ज) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = $2 \times$ आधारको क्षेत्रफल(A) + छड्के सतहको क्षेत्रफल
 $= 2 \times A + P \times h$

(झ) आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल(A) \times उचाइ (h) = $A \times h$

आयतनका एकाइहरू विचको सम्बन्ध (Relation between the units of volume):

1 लिटर = 1000 cm^3 र

1000 लिटर = 1 m^3

लागत अनुमान (Cost Estimation):

1. फरक फरक अवस्थामा जम्मा खर्च पत्ता लगाउन तल दिइएका सूत्रहरू प्रयोग गर्नु पर्दछ ।

(क) जम्मा खर्च (T) = $A \times R$ (ख) जम्मा खर्च (T) = $P \times R$

(ग) जम्मा खर्च (T) = $N \times R$

2. ईटा, ढुङ्गा आदिको सङ्ख्या (N) = $\frac{A}{a}$ (क्षेत्रफल दिइएको अवस्थामा) = $\frac{V}{v}$
 (आयतन दिइएको अवस्थामा)

3. भुँईको क्षेत्रफल (Area of floor) = कार्पेटको क्षेत्रफल (Area of carpet)

4. भुँईको क्षेत्रफल (Area of floor) = $l \times b$

5. चार भित्ताको क्षेत्रफल (Area of 4 walls) (A) = $2h(l + b)$

6. चार भित्ता र भुँईको क्षेत्रफल (Area of 4 walls and floor) (A) = $2h(l+b) + lb$

7. चार भित्ता, भुँई र छानाको क्षेत्रफल (Area of 4 walls, floor and ceiling)
 (A) = $2(lb + bh + hl)$

8. आयताकार बगैँचाको बाहिरपट्टि चारैतिर बाटोको क्षेत्रफल (A) = $2d(l + b + 2d)$

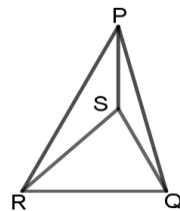
9. आयताकार बगैँचाको बाहिरपट्टि चारैतिर बाटोको क्षेत्रफल (A) = $2d(l + b - 2d)$

10. आयताकार बगैँचाको भित्रपट्टि काटिएको बाटोको क्षेत्रफल (A) = $d(l + b - d)$

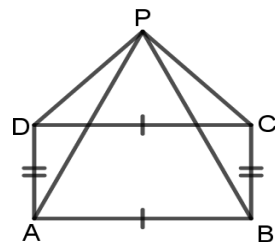
5.1.1 पिरामिडको परिचय (Introduction of Pyramid)

क्रियाकलाप 1

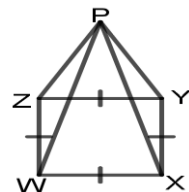
- (क) दिइएको चित्रलाई के भनिन्छ ? के यो प्रिज्म हो ? हैन भने यसलाई के भनिन्छ ? चित्रको आधार त्रिभुज QRS छ । यसका शिर्षविन्दुहरू Q, R र S एउटै शिर्षविन्दु P मा जोडिएका छन् । यसरी बनेको चित्रलाई त्रिभुज आधार भएको पिरामिड अथवा टेट्राहेड्रन भनिन्छ ।



- (ख) दिइएको चित्रको आधार आयत ABCD छ । आयतका प्रत्येक शिर्षविन्दुहरू A, B, C र D एउटै शिर्षविन्दु P मा जोडिएका छन् । जसले गर्दा यसमा चार ओटा त्रिभुजहरू बनेका छन् । ति त्रिभुजहरू ABP, BCP, CDP र ADP हुन् । यसरी बनेको चित्रलाई आयत आधार भएको पिरामिड भनिन्छ । आधार लम्बाइ भएर बनेका त्रिभुजहरू ABP र CDP को क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् । त्यसैगरी, आधार चौडाइ भएर बनेका त्रिभुजहरू BCP र ADP को क्षेत्रफलहरू बराबर हुन्छन् ।

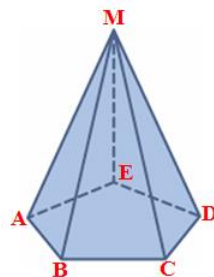


- (ग) दिइएको चित्रको आधार वर्ग WXYZ छ । वर्गका प्रत्येक शिर्षविन्दुहरू W, X, Y र Z एउटै शिर्षविन्दु P मा जोडिएका छन् । जसले गर्दा यसमा चार ओटा त्रिभुजहरू बनेका छन् । ती त्रिभुजहरू WXP, XYP, YZP र WZP हुन् । यसरी बनेको चित्रलाई वर्ग आधार भएको पिरामिड भनिन्छ । वर्ग आधार भएको पिरामिडमा बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।



ΔWXP को क्षेत्रफल = ΔXYP को क्षेत्रफल = ΔYZP को क्षेत्रफल = ΔWZP को क्षेत्रफल यसरी माथि दिइएका पिरामिडका आधारहरू त्रिभुज, आयत र वर्ग आकारका छन् । यिनीहरूमा आधार बाहेकका सतहहरू त्रिभुज आकारमा देख्न सकिन्छ । प्रत्येक पिरामिडमा एउटा मात्र शिर्षविन्दु छ ।

- (घ) दिइएको चित्रको आधार नियमित पञ्चभुज ABCDE छ । पञ्चभुजका प्रत्येक शिर्षविन्दुहरू A, B, C, D र E एउटै शिर्षविन्दु M मा जोडिएका छन् । जसले गर्दा यसमा पाँच ओटा त्रिभुजहरू बनेका छन् । ति त्रिभुजहरू BCM, CDM, DEM, AEM र ABM हुन् । यसरी बनेको चित्रलाई पञ्चभुज आधार भएको पिरामिड भनिन्छ । नियमित पञ्चभुज आधार भएको पिरामिडमा बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ।

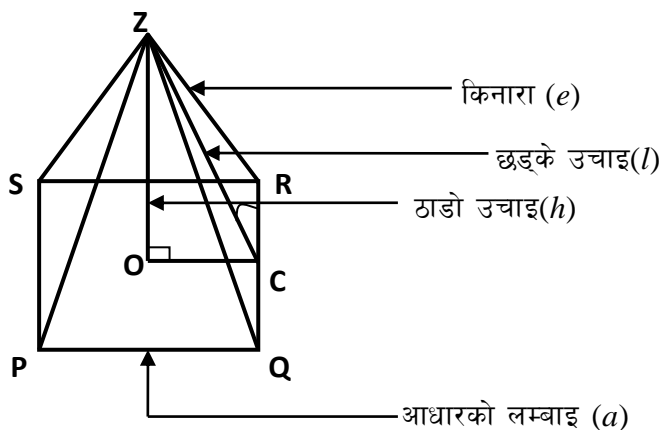


आधार त्रिभुज, चतुर्भुज वा अन्य बहुभुज भएको र छड्के सतहहरूको एउटा साभ्ना शिर्षविन्दु भएको त्रिआयामिक (three dimensional) ठोस वस्तुलाई पिरामिड (pyramid) भनिन्छ ।

5.1.2 पिरामिडका विभिन्न भागहरूको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 2

वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको नामाकरण सहितको चित्र दिइएको छ । तल दिइएको जस्तै पिरामिड आफ्नो कापिमा वा चार्टपेपरमा बनाउनुहोस् । भागहरूको जानकारी प्राप्त गर्न तल दिइएका प्रश्नहरूमा अध्ययन गर्नुहोस् ।



- क) पिरामिडमा ठाडो उचाइ भन्नाले के बुझिन्छ ?
- ख) छड्के उचाइ भन्नाले के बुझिन्छ ?
- ग) पिरामिडको किनारालाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

विभिन्न भागहरूको सम्बन्ध

- (क) दिइएको चित्रबाट, $OC = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} SR = \frac{1}{2} a$ हुन्छ ।
- (ख) छड्के उचाइ (l), ठाडो उचाइ (h) र आधार भुजा (a) बिचको सम्बन्ध:

समकोण त्रिभुज ΔZOC मा पाइथागोरस साध्यअनुसार

$$(ZC)^2 = (ZO)^2 + (OC)^2$$

अतः $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \dots\dots\dots(i)$

(ग) किनारा (e), छड्के उचाइ (l), र आधार भुजा (a) बिचको सम्बन्ध :

समकोण त्रिभुज ΔZCR मा पाइथागोरस साध्य अनुसार $(ZR)^2 = (ZC)^2 + (CR)^2$

$$\text{अतः } e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \dots\dots\dots(ii)$$

(घ) किनारा (e), ठाडो उचाइ (h) र आधार भुजा (a) बिचको सम्बन्ध :

समीकरण (ii) बाट हामीलाई थाहा छ कि,

$$e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

अथवा, $e^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ [∵ समीकरण(i) बाट]

अथवा, $e^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$

अथवा, $e^2 = h^2 + \frac{a^2 + a^2}{4}$

अथवा, $e^2 = h^2 + \frac{2a^2}{4}$

अथवा, $e^2 = h^2 + \frac{a^2}{2}$

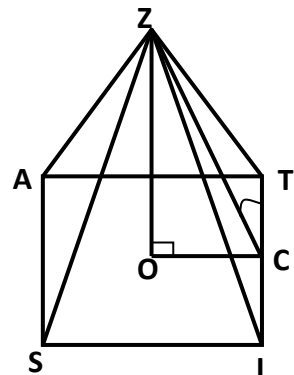
$$\text{अतः } e^2 = h^2 + \frac{a^2}{2} \dots\dots\dots(iii)$$

हाम्रो पाठ्यक्रमअनुसार हामीले यस पाठमा वर्गाकार पिरामिडको बारेमा मात्र अध्ययन गर्छौं ।

5.1.3 पिरामिडको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of Pyramid)

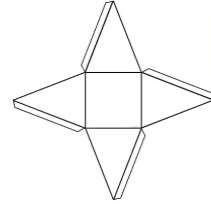
क्रियाकलाप 3

एक एकओटा आयातकार पेपर लिनुहोस् । त्यसलाई आवश्यकता अनुसार पट्टाउने र कैंचीको सहयोगबाट काट्नुहोस् र वर्ग आधार भएको पिरामिड बनाउनुहोस् । यसको जाली चित्र कस्तो हुन्छ ?



त्यस बारेमा खोजी गरी तलका प्रश्नहरूमा अध्ययन गर्नुहोस् र उत्तर के होला सोच्नुहोस् त ।

क) के यो सँगै बनाएको चित्रलाई पिरामिडको जाली चित्र भन्न सकिन्छ ?



ख) जाली चित्रका सँगैका भुजाहरू क्रमशः जोड्दा बन्ने चित्र कस्तो हुन्छ ? एकछिन् अनुमान गर्नुहोस् त ?

ग) आधार बाहेकको क्षेत्रफललाई के भनिन्छ ?

घ) वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा कतिओटा त्रिभुजाकार सतहहरू हुन्छन् ?

ङ) वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा के सबै त्रिभुजहरूका क्षेत्रफल बराबर हुन्छन् ?

आधार बाहेकको क्षेत्रफललाई छड्के सतहको क्षेत्रफल अथवा त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल भनिन्छ । वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा चारओटा त्रिभुजाकार सतहहरू हुन्छन् र ती सबै सतहहरू एक आपसमा बराबर हुन्छन् ।

सँगै देखाइएको वर्गाकार पिरामिडमा, छड्के उचाइ (l) र आधार भुजा (a) को नाप दिएको छ भने,

(क) वर्गको क्षेत्रफल (आधारको क्षेत्रफल) = (भुजा)² = a^2 वर्ग एकाइ

(ख) एउटा त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ आधार \times उचाइ

= $\frac{1}{2} \times a \times l$ वर्ग एकाइ (पिरामिडको छड्के उचाइ त्रिभुजको लागि ठाडो उचाइ हुन्छ)

(ग) पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल (L.S.A) = त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल(A)

= $4\left(\frac{1}{2} \times a \times l\right)$ वर्ग एकाइ = $2al$ वर्ग एकाइ

(घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = आधारको क्षेत्रफल + छड्के सतहको क्षेत्रफल

= $(a^2 + 2al)$ वर्ग एकाइ

उदाहरण 1

वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ (a) = 10 cm र छड्के उचाइ (l) = 6 cm छ । सो पिरामिडको छड्के सतह र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, आधारको भुजाको लम्बाइ (a) = 10 cm

छड्के उचाइ (l) = 6 cm

सूत्र अनुसार, आधारको क्षेत्रफल = $a^2 = (10 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2$

छड्के सतहको क्षेत्रफल = $2al = 2 \times 10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$

फेरी, पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल + छड्के सतहको क्षेत्रफल

$$= 100 \text{ cm}^2 + 120 \text{ cm}^2 = 220 \text{ cm}^2$$

तसर्थ, पूरा सतहको क्षेत्रफल = 220 cm²

उदाहरण 2

वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिडको आधारको भुजाको लम्बाइ 10 cm र किनाराको लम्बाइ 13 cm छ। उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा,

आधारको भुजाको लम्बाइ (a) = 10 cm

किनाराको लम्बाइ (e) = 13 cm

पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

सूत्र अनुसार, $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

अथवा, $(13 \text{ cm})^2 = l^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$

अथवा, $169 \text{ cm}^2 = l^2 + 25 \text{ cm}^2$

अथवा, $169 \text{ cm}^2 - 25 \text{ cm}^2 = l^2$

अथवा, $144 \text{ cm}^2 = l^2$

$$l = 12 \text{ cm}$$

∴ छड्के उचाइ (l) = 12 cm

फेरी, आधारको क्षेत्रफल (A) = $a^2 = (10 \text{ cm})^2 = 100 \text{ cm}^2$

छड्के सतहको क्षेत्रफल (L.S.A) = $2al = 2 \times 10 \text{ cm} \times 12 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$

अब, पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल (A) + छड्के सतहको क्षेत्रफल (L.S.A)

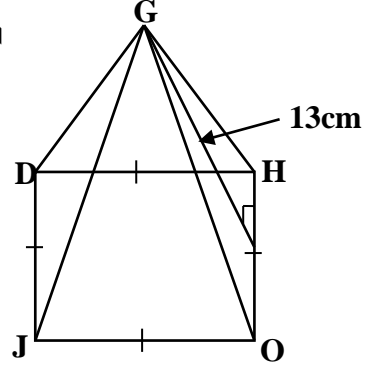
$$= 100 \text{ cm}^2 + 240 \text{ cm}^2 = 340 \text{ cm}^2$$

अतः पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल = 340 cm²

उदाहरण 3

दिइएको चित्र, वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिड हो । उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 360 cm^2 र छड्के उचाइ 13 cm छ ।

- (क) आधार भुजाको लम्बाइ कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) पिरामिडको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) किनाराको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ, वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा,
 पूरा सतहको क्षेत्रफल(T.S.A) $=360 \text{ cm}^2$
 छड्के उचाइ (l) $= 13 \text{ cm}$

ठाडो उचाइ (h) $= ?$ र किनाराको लम्बाइ (e) $= ?$

- (क) सूत्र अनुसार, पूरा सतहको क्षेत्रफल $= a^2 + 2al$

$$\text{अथवा, } 360 = a^2 + 2a \times 13$$

$$\text{अथवा, } 360 = a^2 + 26a$$

$$\text{अथवा, } a^2 + 26a - 360 = 0$$

$$\text{अथवा, } a^2 + (36 - 10)a - 360 = 0$$

$$\text{अथवा, } a^2 + 36a - 10a - 360 = 0$$

$$\text{अथवा, } a(a + 36) - 10(a + 36) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a + 36)(a - 10) = 0$$

$$\text{अथवा, } (a + 36) = 0, a = -36 \text{ (आविस्कार, किनकी लम्बाइ कहिल्यै ऋणात्मक हुँदैन ।)}$$

$$\text{अथवा } (a - 10) = 0, a = 10$$

$$\therefore \text{आधार भुजाको लम्बाइ } (a) = 10 \text{ cm}$$

- (ख) फेरी, $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{अथवा, } (13)^2 = h^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 169 = h^2 + 25$$

[\because खण्डीकरण गर्दा, गुणा गरेर 360 आउने र घटाउँदा 26 हुने सङ्ख्याहरू 36 र 10 भएकोले]

$$\text{अथवा, } 169 - 25 \text{ cm}^2 = h^2$$

$$\text{अथवा, } 144 \text{ cm}^2 = h^2$$

$$h = 12 \text{ cm}$$

∴ ठाडो उचाइ (h) = 12 cm

(ग) अन्त्यमा, e को लागि, $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{अथवा, } e^2 = (13)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } e^2 = 169 + 25$$

$$\text{अथवा, } e^2 = 194$$

$$\text{अथवा, } e = \sqrt{194} = 13.92$$

अतः ठाडो उचाइ (h) = 12 cm र किनाराको लम्बाइ (e) = 13.92cm

उदाहरण 4

दिइएको चित्र वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिड हो । सो पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल 240 cm^2 र आधारको लम्बाइ (DU) = 12 cm र

(क) पिरामिडको छड्के उचाइ (PG)

(ख) ठाडो उचाइ (PO) पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

आधारको लम्बाइ (UT) = $a = 12 \text{ cm}$

छड्के सतहको क्षेत्रफल (L.S.A) = 240 cm^2

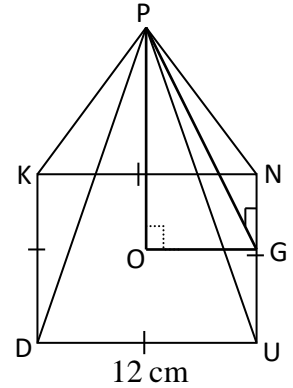
ठाडो उचाइ (PO) = $h = ?$ र छड्के उचाइ (PQ) = $l = ?$

सूत्र अनुसार,

छड्के सतहको क्षेत्रफल = $2al$ (∴ प्रश्नमा किनकी छड्के सतहको क्षेत्रफल दिएको छ ।)

$$\text{अथवा, } 240 \text{ cm}^2 = 2 \times 12 \text{ cm} \times l$$

$$\text{अथवा, } \frac{240}{2 \times 12} \text{ cm} = l$$



$$l = 10 \text{ cm}$$

$$\text{अब, } l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } (10 \text{ cm})^2 = h^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$$

$$\text{अथवा, } 100 \text{ cm}^2 = h^2 + 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{अथवा, } 100 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = h^2$$

$$\text{अथवा, } 64 \text{ cm}^2 = h^2$$

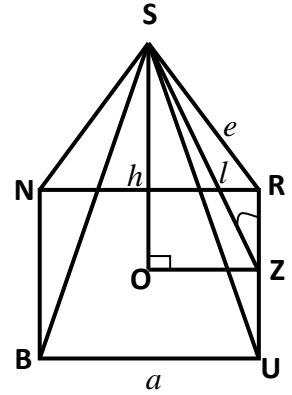
$$h = 8 \text{ cm}$$

- ∴ तसर्थ, दिइएको पिरामिडको छड्के उचाइ (PQ) = $l = 10 \text{ cm}$ र
ठाडो उचाइ (PO) = $h = 8 \text{ cm}$

अभ्यास 5.1

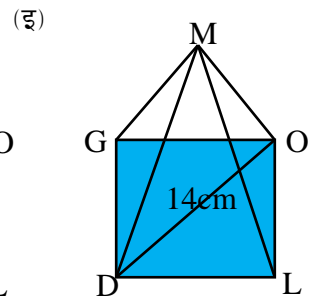
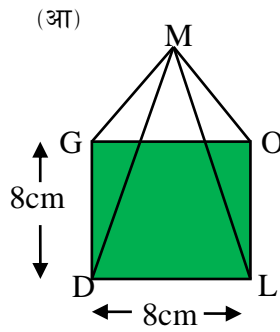
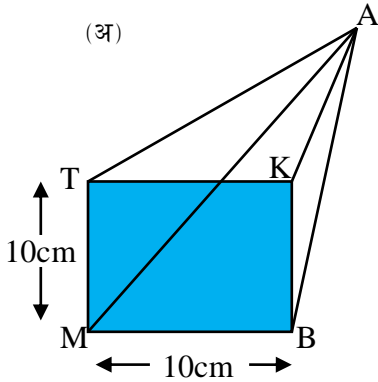
1. दिइएको चित्र वर्गाकार आधार भएको पिरामिड हो । तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् ।

- (क) यदि $BU = a \text{ cm}$ छ भने OZ को लम्बाइ कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- (ख) यदि पिरामिडको ठाडो उचाइ = (h) , छड्के उचाइ = (l) र आधारको भुजा = (a) भए यिनीहरूबाट बन्ने कुनै एउटा सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ग) आधारको क्षेत्रफल (A) पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (घ) चित्रमा SR र SU लाई के भनिन्छ ? के SR र SU बराबर हुन्छन् ?
- (ङ) चित्रमा SRU कस्तो प्रकारको त्रिभुज हो ? यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

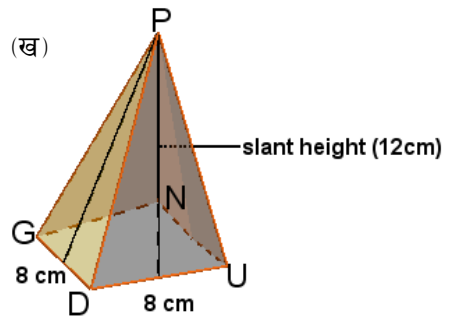
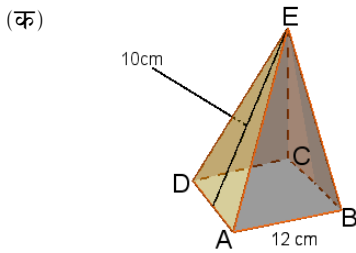


2. (क) आधार भूजाको लम्बाइ 'k' एकाई भएको वर्ग आधार पिरामिडको आधारको सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- (ख) आधार भुजा 'a' cm र छड्के उचाइ 'b' cm भएको वर्गाकार पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- (ग) आधार भुजा 'x' cm र छड्के उचाइ 'y' cm भएको वर्ग आधार पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

- (घ) एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल 'm' sq. unit र बक सतहको क्षेत्रफल 'n' sq. unit छन् । सो पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. (क) एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 500 cm^2 र त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल 256 cm^2 छन् । उक्त पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- ख) दिइएको चित्रहरू वर्गाकार आधार भएका पिरामिडहरू हुन् । आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

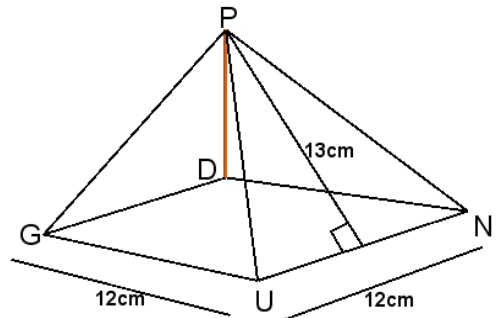


4. दिइएको चित्रहरू वर्गाकार आधार भएका पिरामिडहरू हुन् । त्रिभुजाकार सतह (छड्के सतह) को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. दिइएको चित्र वर्गाकार आधार भएका पिरामिड हो । जसमा आधार भुजाको लम्बाइ 12 cm र छड्के उचाइ 13 cm छ भने,

- (क) आधारको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
- (ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?



6. एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ 15 cm र छड्के उचाइ 18 cm छ । उक्त पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको ठाडो उचाइ 4 cm र छड्के उचाइ 5 cm छ । उक्त पिरामिडको
- (क) आधारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) छड्के सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. वर्गाकार आधार भएको ठोस पिरामिडको आधारको लम्बाइ 30 cm र ठाडो उचाइ 20 cm छ । सो पिरामिडको
- (क) छड्के उचाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) छड्के सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

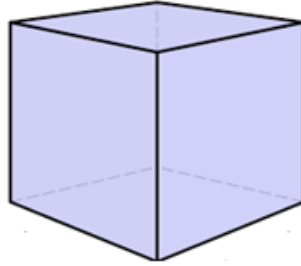
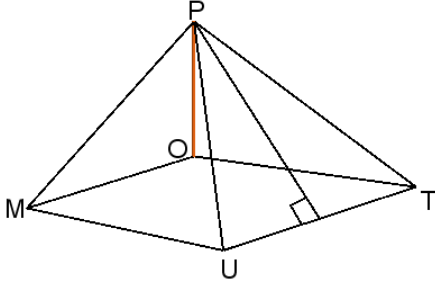
1. (क) $\frac{a}{2}$ cm (ख) $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (ग) $a^2 \text{ cm}^2$
- घ) पिरामिडका किनाराहरू, बराबर हुन्छन् (ङ) समद्विबाहु त्रिभुज, $\frac{1}{2} \times a \times l$
2. (क) k^2 वर्ग एकाई (ख) $2ab$ (ग) $h = (x^2 + 2xy) \text{ cm}^2$
- (घ) $(m + n) \text{ sq. unit}$
3. (क) 244 cm^2 (ख) (अ) 100 cm^2 , (आ) 64 cm^2 , (इ) 98 cm^2
4. (क) 240 cm^2 (ख) 192 cm^2
5. (क) 144 cm^2 (ख) 312 cm^2 (ग) 456 cm^2
6. 765 cm^2
7. (क) 6 cm (ख) 36 cm^2 (ग) 60 cm^2 (घ) 96 cm^2
8. (क) 25cm (ख) 90 cm^2 (ग) 1500 cm^2 (घ) 1590 cm^2

5.1.3 पिरामिडको आयतन (Volume of Pyramid)

क्रियाकलाप 1

पिरामिडको आयतन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ? के यसको आयतन पत्ता लगाउन सूत्रको प्रयोग गर्न सकिन्छ ? त्यो सूत्र के हो ?

चित्रमा देखाइए जस्तै समान उचाइ र आधारको क्षेत्रफल बराबर भएको एउटा वर्ग आधार भएको पिरामिड र घन दिइएको छ । उक्त पिरामिडमा बालुवा वा माटोको धुलो भरेर घनमा खन्याउने हो भने उक्त घन कति पटकमा भरिन्छ होला, अनुमान लगाउनुहोस् ।



चित्रमा देखाइए जस्तै कुनै एउटा नाप लिएर वर्ग आकार भएको पिरामिड बनाउनुहोस् । त्यसैगरी पिरामिडको उचाइसँग बराबर उचाइ र आधारको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुनेगरी आधारको नाप लिइ एउटा घन तयार पार्नुहोस् । अब पिरामिडमा बालुवा भर्दै घनमा खन्याउनुहोस् । कति पटक खन्याउँदा घन भरियो त ? के तपाईंले सुरुमा गरेको अनुमान मिल्यो त ? के तीन पटक पिरामिडमा बालुवा भरेर घनमा खन्याउँदा घन भरियो त ?

हो पक्कै पनि तीन पटकमा भरिन्छ । यसबाट के प्रमाणित हुन्छ भने घनको आयतन उक्त वर्ग आधार भएको पिरामिडको तीन गुणा हुन्छ ।

तसर्थ, $3 \times$ वर्ग आधार भएको पिरामिड = घनको आयतन

अथवा, वर्ग आधार भएको पिरामिड = $\frac{1}{3}$ घनको आयतन (V)

अथवा, वर्ग आधार भएको पिरामिडको आयतन = $\frac{1}{3}$ आधारको क्षेत्रफल \times ठाडो उचाइ = $\frac{1}{3} \times A \times h$

वर्ग आधार भएको पिरामिडको आधारको लम्बाइ 'a' र ठाडो उचाइ 'h' ले जनाइन्छ ।

तसर्थ, पिरामिडको आयतन = $\frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \times a^2 \times h$

उदाहरण 1

एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको ठाडो उचाई 24 से.मी. र आधारको भूजाको लम्बाई 14 से.मी. भए आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

आधारको भूजाको लम्बाइ(a) = 24 से.मी.

त्यसैले, आधारको क्षेत्रफल (A) = $a^2 = (24)^2$ वर्ग से.मी. = 576 वर्ग से.मी.

ठाडो उचाई (h) = 24 से.मी.

सूत्रअनुसार,

आयतन (V) = आधारको क्षेत्रफल(A) × ठाडो उचाई(h) = $576\text{cm}^2 \times 24\text{cm} = 13824\text{cm}^3$

उदाहरण 2

वर्गाकार आधार भएको एउटा पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ 12cm र आयतन 384cm^3 छ ।

- (क) पिरामिडको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) छड्के उचाइ कति हुन्छ होला ? गणना गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
- (घ) छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) पूरा सतहको सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (च) पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल भन्दा छड्के सतहको क्षेत्रफल कति प्रतिशतले बढी छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा, पिरामिडको आयतन(V) = 384cm^3

आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 12 cm

छड्के सतहको क्षेत्रफल = ?

(क) सूत्रानुसार, पिरामिडको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times a^2 \times h$

$$\text{अथवा, } 384\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times (12\text{ cm})^2 \times h$$

$$\text{अथवा, } 384\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times 144\text{ cm}^2 \times h$$

$$\text{अथवा, } \frac{384}{144} \times 3\text{ cm} = h$$

$$h = 8\text{ cm}$$

(ख) अब, $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

अथवा, $l^2 = (8 \text{ cm})^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$

अथवा, $l^2 = 64 \text{ cm}^2 + 36 \text{ cm}^2$

अथवा, $l^2 = 100 \text{ cm}^2$

$l = 10 \text{ cm}$

(ग) पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल (A) = $a^2 = (12)^2 = 144 \text{ cm}^2$

(घ) फेरी, (LSA) = $2al = 2 \times 12 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 240 \text{ cm}^2$

(ङ) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = (A) + (LSA) = $144 \text{ cm}^2 + 240 \text{ cm}^2 = 384 \text{ cm}^2$

(च) फरक प्रतिशत = $\frac{\text{LSA} - \text{A}}{\text{A}} \times 100\% = \frac{240 - 144}{144} \times 100\% = 66.67\%$

अतः आधारको क्षेत्रफल भन्दा छड्के सतहको क्षेत्रफल 66.67% प्रतिशतले बढी छ ।

उदाहरण 3

दिइएको चित्र वर्ग आधार भएको पिरामिड हो । जसको आधारको भूजाको लम्बाई 18 से.मी. र किनारको लम्बाइ = 15 से.मी. छ । उक्त पिरामिडको

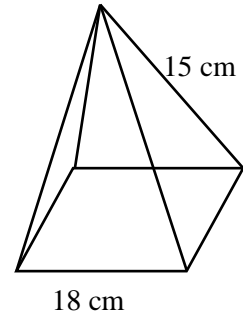
(क) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ख) ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?

(ग) सूत्रको प्रयोग गरी छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 18 cm

किनारको लम्बाइ (e) = 15 से.मी.

छड्के उचाइ ठाडो (l) = ? ठाडो उचाइ(h) = ? छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = ?

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = ? पिरामिडको आयतन (V) = ?

(क) हामीलाई थाहा छ, $e^2 = l^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

अथवा, $15^2 = l^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2$

अथवा, $225 - 81 = l^2$

अथवा, $l = 12\text{cm}$

(ख) फेरी, $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

अथवा, $12^2 = h^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2$

अथवा, $144 - 81 = h^2$

अथवा, $h^2 = 63$

अथवा, $h = \sqrt{63}\text{ cm}$

(ग) छड्के सतहको क्षेत्रफल (LSA) = $2al = 2 \times 18\text{ cm} \times 12\text{ cm} = 432\text{ cm}^2$

(घ) पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA) = $a^2 + 2al = 18^2 + 2 \times 18\text{ cm} \times 12\text{ cm} = 756\text{ cm}^2$

(ड) पिरामिडको आयतन(V) = $\frac{1}{3} \times a^2 \times h = \frac{1}{3} \times (18)^2 \times \sqrt{63}\text{ cm} = 108\sqrt{63}\text{ cm}^3$

उदाहरण 4

एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल 96 cm^2 र आधार भुजाको लम्बाइ 6 cm छ। उक्त पिरामिडको

(क) त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस्।

(ख) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ग) ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?

(घ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान : यहाँ,

वर्गाकार आधार भएको पिरामिडमा,

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 96 cm^2

आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 6 cm

पिरामिडको आयतन (V) = ?

(क) त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र (LSA) = $2al$

(ख) सूत्रानुसार, पूरा सतहको क्षेत्रफल = $a^2 + 2al$

$$\text{अथवा, } 96 \text{ cm}^2 = (6 \text{ cm})^2 + 2 \times 6 \text{ cm} \times l$$

$$\text{अथवा, } 96 \text{ cm}^2 - 36 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm} \times l$$

$$\text{अथवा, } 60 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm} \times l$$

$$\text{अथवा, } l = \frac{60}{12} \text{ cm}$$

$$\text{अथवा, } l = 5 \text{ cm}$$

(ग) अब, $l^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$$\text{अथवा, } (5 \text{ cm})^2 = h^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$$

$$\text{अथवा, } 25 \text{ cm}^2 = h^2 + 9 \text{ cm}^2$$

$$\text{अथवा, } 25 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2 = h^2$$

$$h^2 = 16 \text{ cm}^2$$

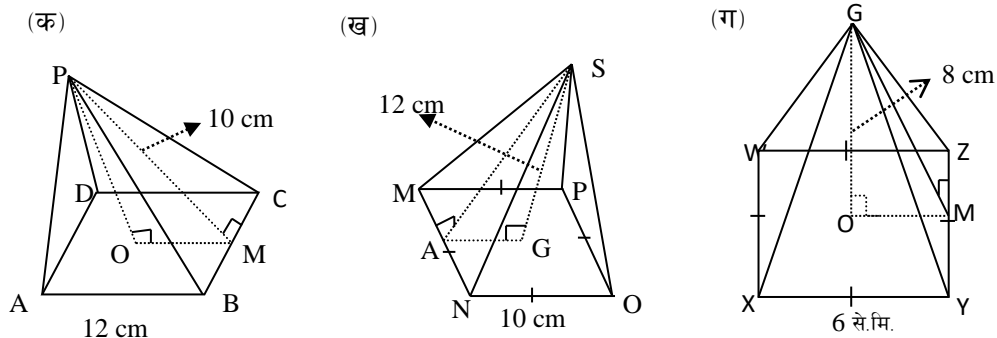
$$\text{अथवा, } h = 4 \text{ cm}$$

(घ) फेरी, पिरामिडको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times (6 \text{ cm})^2 \times 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^3$

अभ्यास 5.2

- (क) वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आधार भुजाको लम्बाइ ' r ' cm र ठाडो उचाइ ' h ' cm छ भने उक्त पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ख) आधारको क्षेत्रफल ' m ' वर्ग एकाइ र ठाडो उचाइ ' n ' एकाइ भएको वर्गाकार पिरामिडको आयतन कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- (ग) एउटा वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आधारको क्षेत्रफल 64 cm^2 र उचाइ 15 cm भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् । 960 cm^3

2. दिइएको नाप अनुसार, वर्गाकार आधार भएका पिरामिडहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



3. वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल 600 cm^2 र छड्के उचाई 15 cm भए उक्त पिरामिडको

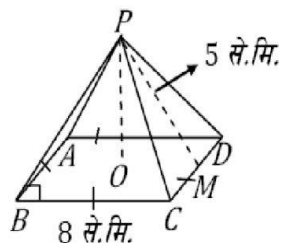
- (क) आधारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) पिरामिडको ठाडो उचाइ कति होला ?
- (ग) किनारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल 700 cm^2 र छड्के उचाइ 15 cm भए उक्त पिरामिडको

- (क) आधारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) पिरामिडको ठाडो उचाइ कति होला ?
- (ग) किनारको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. चित्रमा वर्ग आधार भएको एउटा पिरामिड दिइएको छ ।

- (क) उक्त पिरामिडको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) पिरामिडको पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

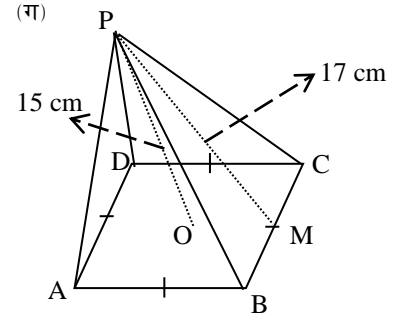
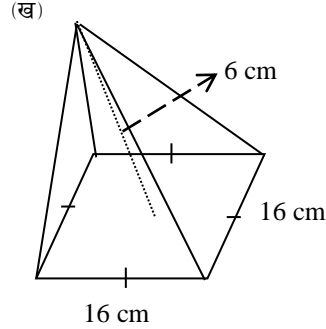
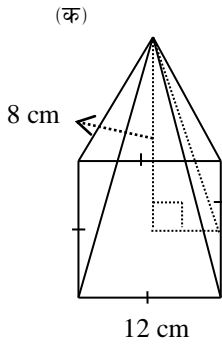


6. वर्ग आधार भएको पिरामिडमा आधार भूजाको लम्बाइ 18 से.मी. र किनारको लम्बाइ $(e) = 15 \text{ से.मी.}$ छ ।

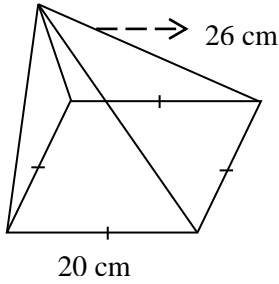
- (क) उक्त पिरामिडको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) पिरामिडको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) पिरामिडको पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) आयतन कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

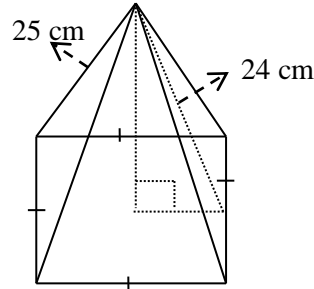
7. दिइएको नाप अनुसार, वर्गाकार आधार भएका पिरामिडहरूको आयतन र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



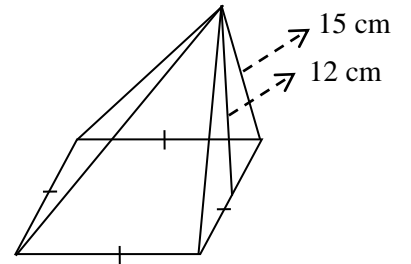
(घ)



(ङ)



(च)



8. वर्ग आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल 600 वर्ग से.मी. र छड्के उचाइ 15 से.मी. भए उक्त पिरामिडको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. पूरा सतहको क्षेत्रफल 800 cm^2 भएको एउटा वर्गाकार पिरामिडको आधारको भुजा 16 cm छ । उक्त पिरामिडको त्रिभुजाकार सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. पर्यटकको समूह राख्नको लागि एउटा रिसोर्टले वर्गाकार आधार भएको पिरामिड आकारको टेन्ट निर्माण गर्नु पर्ने छ । जसको आधारका हरेक भुजा 32 मिटर र उचाइ 50 मिटर छन् ।
- (क) यो टेन्ट बनाउन कति वर्गमिटर कपडा आवश्यक होला ?
- (ख) एक वर्गमिटर कपडाको रु. 500 का दरले उक्त टेन्ट बनाउन जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

उत्तर :

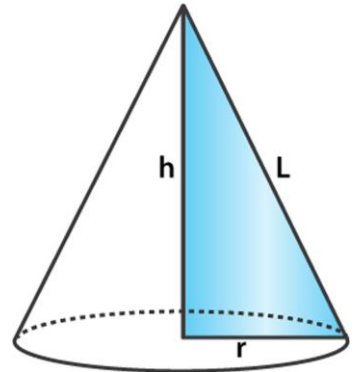
1. (क) $\frac{1}{3} r^2 h \text{ cm}^3$ (ख) $\frac{1}{3} \text{ mn cubic unit}$ (ग) 320 cm^3
2. (क) 384 cm^3 (ख) 96 cm^3 (ग) 144 cm^3
3. (क) 20 cm (ख) $5\sqrt{5} \text{ cm}$ (ग) $5\sqrt{13} \text{ cm}$ (घ) 1496.71 cm^3
4. (क) 23.3 cm (ख) 9.43 cm (ग) 19 cm (घ) 1710.88 cm^3
5. (क) 3 cm (ख) 64 cm^2 (ग) 144 cm^2 (घ) 64 cm^3
6. (क) 12 cm (ख) $3\sqrt{7} \text{ cm}$ (ग) 756 cm^2 (घ) 857.22 cm^3
7. (क) $384 \text{ cm}^3, 384 \text{ cm}^2$ (ख) $512 \text{ cm}^3, 576 \text{ cm}^2$ (ग) $1280 \text{ cm}^3, 800 \text{ cm}^2$
(घ) $2908.98 \text{ cm}^3, 1360 \text{ cm}^2$ (ङ) $1499.82 \text{ cm}^3, 868 \text{ cm}^2$
(च) $857.22 \text{ cm}^3, 756 \text{ cm}^2$
8. 1490.71 cm^3 9. $544 \text{ cm}^2, 1280 \text{ cm}^3$ 10. $3359.84 \text{ cm}^2, \text{Rs.}16,79,923.80$

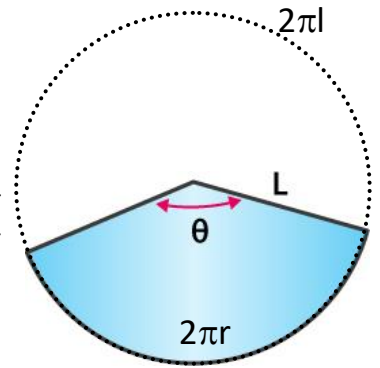
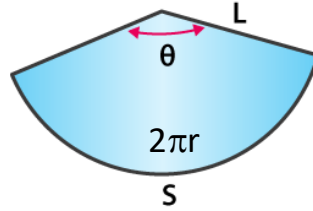
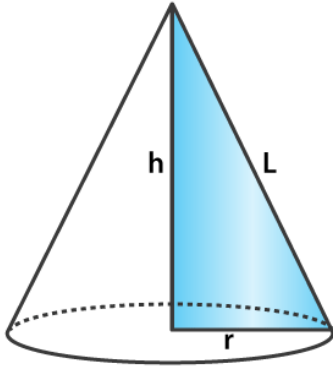
5.2.1 सोलिको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of Cone)

क्रियाकलाप 1

आफुसँग भएको कागजको प्रयोग गरी सोलीको निर्माण गर्नुहोस् । चित्रमा देखाए जस्तै एक ओटा कागजबाट बनेको सोली लिनुहोस् ।

उक्त सोलीको आधार कस्तो पाउनु भयो त ? के सो सोलीको आधार वृत्त छ ? हो पक्कै पनि । उक्त सोलीको आधार वृत्त छ । अब सोलीको आधारको अर्धव्यास r , उचाइ h र छड्के उचाइ l लिउं । यसको आधार समतल सतह हुन्छ भने बाँकी सतह वक्रसतह हुन्छ । उक्त सोलिलाइ चक्कु वा कैचीको सहायताले चित्रमा देखाए जस्तै गरी काट्नुहोस् र यसलाई पूर्ण रूपमा खोल्नुहोस् । खोल्दा बन्ने भागलाई क्षेत्रक (sector) भनिन्छ । जुन सँगैको चित्रमा देखाइएको छ । क्षेत्रक (sector) को एउटा लम्बाइ छड्के उचाइ (l) सँग बराबर हुन्छ र क्षेत्रकको अर्को भागको लम्बाइ सोलीको आधारको परिधि $2\pi r$ सँग बराबर हुन्छ जुन चित्रमा देखाइएको छ ।





माथि चित्रमा देखाइएको क्षेत्रक तल देखाइएको वृत्तको एउटा भाग हो । जसको अर्धव्यास सोलीको छड्के उचाइ l सँग बराबर छ । त्यसैले वृत्तको क्षेत्रफल $= \pi l^2$ र वृत्तको परिधि $2\pi l$ हुन्छ ।

क्षेत्रकको क्षेत्रफल = वृत्तको क्षेत्रफल \times वृत्तको कति गुणा यो क्षेत्रक हो

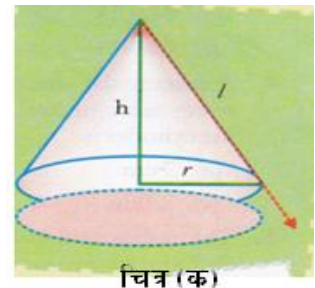
$$= \pi l^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi l} = \pi r l$$

सोलीलाइ काट्टयो भने क्षेत्रक बन्छ, भने क्षेत्रकलाई पट्टयायो भने सोली बन्छ । त्यसैले

$$\text{क्षेत्रकको क्षेत्रफल} = \text{सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = \pi r l$$

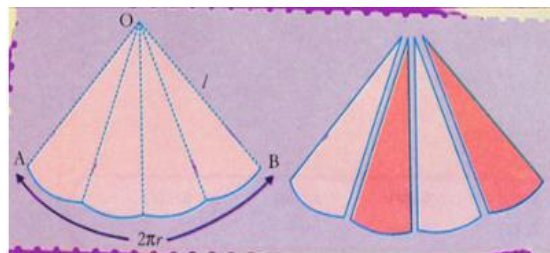
क्रियाकलाप 2

विद्यार्थीहरूले एउटा चार्टपेपर लिनुहोस् । चार्टपेपरको प्रयोग गरी चित्रमा देखाए जस्तै एउटा सोलीको निर्माण गर्नुहोस् । जसको आधारको अर्धव्यास ' r ' छड्के उचाइ ' l ' र ठाडो उचाइ ' h ' ले जनाउनुहोस् । तपाइँहरूले तयार गर्नु भएको सोलीलाइ तलको चित्र (क) मा रातो थोप्ला रेखामा देखाइए अनुसार छड्के उचाइबाट काटनुहोस् ।



चित्र (क)

काटीसकेपछि उक्त सोलीलाइ खोलुहोस् । चित्र (ख) मा देखाइए अनुसारको क्षेत्रक प्राप्त भयो या भएन जाँच गर्नुहोस् । सो क्षेत्रकलाई OAB नाम दिनुहोस् र तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।



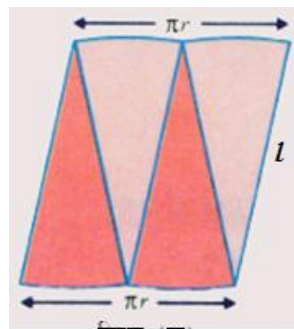
चित्र (ख)

(क) के क्षेत्रक OAB को चापको लम्बाइ (AB) = सोलीको

आधारको परिधिको लम्बाइ ($2\pi r$) हुन्छ त ?

(ख) के क्षेत्रक OAB को अर्धव्यास = सोलीको छड्के उचाइ (l) सँग बराबर हुन्छ ?

चित्र (ख) मा देखाइएको क्षेत्रक OAB लाई चार बराबर भाग हुने गरी काट्नुहोस् । दुई टुकालाई एउटा रड लगाउनुहोस् र अरु दुई टुकालाई अर्को रड लगाई दुई चित्र ((ग) मा देखाए जस्तै विपरित दिशामा मिलाएर राख्नुहोस् । कुन ज्यामितिय आकार बन्यो ? के यो समानान्तर चतुर्भुज हो ? के यो आयत हो ? पक्कै पनि थाहा पाउनु भए होला हैन त । यो एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।



चित्र (ग)

अब, समानान्तर चतुर्भुजको आधारको लम्बाइ = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रक OAB को लम्बाइ = $\frac{1}{2} 2\pi r = \pi r$

समानान्तर चतुर्भुजको उचाइ = सोलीको छड्के उचाइ (l)

समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)

$$= \text{आधारको लम्बाइ} \times \text{उचाइ}$$

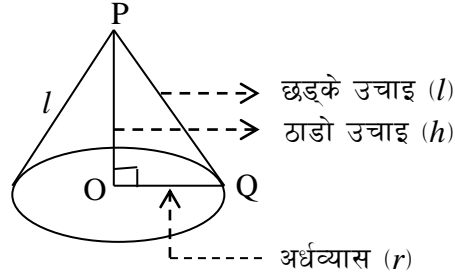
$$= \pi r \times l = \pi r l$$

पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = सोलीको आधारको क्षेत्रफल + बक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)

$$= \pi r^2 + \pi r l$$

$$= \pi r(r+l)$$

के सोलीलाइ आधार वृत्त भएको पिरामिड पनि भन्न सकिन्छ त ? हो यसलाई वृत्त आधार भएको पिरामिड भनिन्छ । तल दिइएको चित्रमा सोलीका विभिन्न भागहरू देखाइएको छ । पाइथागोरस साध्य अनुसार त्रिभुज POQ मा सोलीको आधारको अर्धव्यास ' r ' छड्के उचाइ ' l ' र ठाडो उचाइ ' h ' को विचमा सम्बन्ध स्थापित गर्न सकिन्छ । उक्त सम्बन्धलाई तल प्रस्तुत गरिएको छ ।



विभिन्न भागहरू छड्के उचाइ (l), ठाडो उचाइ (h) र आधारको अर्धव्यास (r) बिचको को सम्बन्ध :

(क) $l^2 = h^2 + r^2$ अथवा $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

(ख) $h^2 = l^2 - r^2$ अथवा $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

(ग) $r^2 = l^2 - h^2$ अथवा $r = \sqrt{l^2 - h^2}$

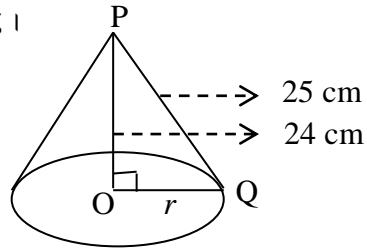
उदाहरण 1

चित्रमा एउटा सोली र यसका केही भागहरू दिइएको छ ।

(क) सोलीको आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

सोलीको ठाडो उचाइ (PO) = (h) = 24 cm

सोलीको छड्के उचाइ (PQ) = (l) = 25 cm

(क) सोलीको आधारको क्षेत्रफल = ?

(ख) सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = ?

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

चित्रमा, POQ एउटा समकोण त्रिभुज हो, त्यसैले पाइथागोरस साध्य अनुसार

$$PQ^2 = PO^2 + OQ^2 (\because h^2 = p^2 + b^2)$$

अथवा, $(25)^2 = (24)^2 + r^2$

अथवा, $625 - 576 = r^2$

$$\text{अथवा, } r^2 = 49$$

$$\text{अथवा, } r = 7 \text{ cm}$$

$$\text{अब, सूत्रानुसार, आधारको क्षेत्रफल (A) = } \pi r^2 = \frac{22}{7} \times (7)^2 \text{ cm}^2 = 154 \text{ cm}^2$$

$$\text{सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल(CSA) = } \pi r l = \frac{22}{7} \times 7 \times 25 \text{ cm}^2 = 550 \text{ cm}^2$$

$$\text{(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल = A + CSA = } 154 \text{ cm}^2 + 550 \text{ cm}^2 = 704 \text{ cm}^2$$

उदाहरण 2

सोलीको आधारको परिधि $\frac{528}{7}$ cm र यसको ठाडो उचाइ 9 cm भए

(क) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ?

(ख) सोलीको छड्के लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस्

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$$\text{सोलीको आधारको परिधि (C) = } \frac{528}{7} \text{ cm}$$

$$\text{सोलीको ठाडो उचाइ (h) = } 9 \text{ cm}$$

(क) हामीलाई थाहा छ, आधारको परिधि (C) = $2\pi r$

$$\text{अथवा, } \frac{528}{7} = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\text{अथवा, } r = \frac{528}{7} \times \frac{7}{22} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{अथवा, } r = 12 \text{ cm}$$

(ख) सोलीको छड्के लम्बाइ = ?

$$\text{सूत्रानुसार, } l^2 = h^2 + r^2 = (9)^2 + (12)^2$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 81 + 144$$

$$\text{अथवा, } l^2 = 225$$

$$\text{अथवा, } l = 25 \text{ cm}$$

अतः सोलीको छड्के लम्बाइ (l) = 25 cm

(ग) सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?

$$\begin{aligned}\text{सूत्रअनुसार, सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल} &= \pi r (r+l) = \frac{22}{7} \times 12 \text{ cm} \times (12\text{cm} + 25 \text{ cm}) \\ &= \frac{22}{7} \times 12 \text{ cm} \times 37\text{cm} \\ &= 1395.43 \text{ sq. cm}\end{aligned}$$

उदाहरण 3

सोलीको आधारको अर्धव्यास र छड्के उचाइको योगफल 64 cm छ । यसको पूरा सतहको क्षेत्रफल 2816 sq. cm छ ।

(क) आधारको व्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ग) वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = 2816 sq. cm

आधारको अर्धव्यास (r) + छड्के उचाइ (l) = 64 cm(i)

(क) सूत्रअनुसार, सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $\pi r (r+l)$

$$\text{अथवा, } 2816 \text{ sq. cm} = \frac{22}{7} \times r \times (64 \text{ cm})$$

$$\text{अथवा, } r = \frac{2816 \times 7}{22 \times 64} \text{ cm} = 14 \text{ cm}$$

अतः आधारको व्यास (d) = $2r = 2 \times 14 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$

(ख) फेरी, r को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$\text{अथवा, } 14 + \text{छड्के उचाइ } (l) = 64 \text{ cm}$$

$$\text{अथवा, छड्के उचाइ } (l) = 64 - 14 = 50 \text{ cm}$$

अतः छड्के उचाइ (l) = 50 cm

(ग) सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $\pi r l = \frac{22}{7} \times 14 \times 50 = 2200 \text{ sq. cm}$

उदाहरण 4

एउटा सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल 1320 sq. cm र वक्र सतहको क्षेत्रफल 704 sq. cm छ ।

- (क) छड्के उचाइ (l), ठाडो उचाइ (h) र आधारको अर्धव्यास (r) विचको को सम्बन्ध लेख्नहोस् ।
(ख) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
(घ) ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?
(ङ) उक्त सोलीको आधारको परिधिको लम्बाइ कति हुन्छ ?

समाधान : यहाँ,

पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.S.A) = 1320 sq. cm

वक्र सतहको क्षेत्रफल (C.S.A) = 704 sq. cm

(क) छड्के उचाइ (l), ठाडो उचाइ (h) र आधारको अर्धव्यास (r) विचको सम्बन्ध: $l^2 = h^2 + r^2$ हुन्छ ।

(ख) आधारको अर्धव्यास (r) = ?

सूत्रअनुसार, सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल + वक्र सतहको क्षेत्रफल

अथवा, $1320 = \pi r^2 + 704$

अथवा, $1320 - 704 = \frac{22}{7} r^2$

अथवा, $\frac{616}{22} \times 7 = r^2$

अथवा, $r^2 = 196$

अथवा, $r = 14$ cm

अतः आधारको अर्धव्यास (r) = 14 cm

(ग) फेरी, वक्रसतहको क्षेत्रफल (C.S.A) = $\pi r l$

अथवा, $704 = \frac{22}{7} \times 14 \times l$

अथवा, $\frac{704 \times 7}{22 \times 14} = l$

अथवा, $l = 16$ cm

अतः छड्के उचाइ (l) = 16 cm

(घ) फेरी, सूत्रअनुसार, $h^2 = l^2 - r^2$

अथवा, $h^2 = 16^2 - 14^2 = 256 - 196 = 60$

अतः ठाडो उचाइ (h) = $\sqrt{60}$ cm = $2\sqrt{15}$ cm

(ङ) अन्त्यमा, परिधिको लम्बाइ (C) = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 14$ cm = 88 cm

तसर्थ, परिधिको लम्बाइ (C) = 88 cm

अभ्यास 5.2.1

1. चित्रमा सोली र यसका भागहरूलाई विभिन्न सङ्केतबाट जनाइएको छ । दिइएको जानकारीको आधारमा, तलका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

(क) सोलीको आधार कुन आकारमा हुन्छ ?

(ख) चित्रमा (BC) = h ले के जनाउँछ ? लेख्नुहोस् ।

(ग) l , h र r को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

(घ) यदि $h = 15$ cm र $r = 8$ cm भए छड्के उचाइ (l) को मान कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. (क) आधारको अर्धव्यास ' p ' cm र छड्के उचाइ ' q ' cm भएको सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) आधारको अर्धव्यास ' r ' cm र छड्के उचाइ ' l ' cm भएको सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

3. सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल 250 cm² र आधारको सतहको क्षेत्रफल 118 cm² छन् । उक्त सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. छड्के उचाइ 14m भएको सोली आकारको टेन्ट बनाउन 770 sq.m कपडा चाहिन्छ भने सो टेन्टको

(क) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ? (ख) आधारको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

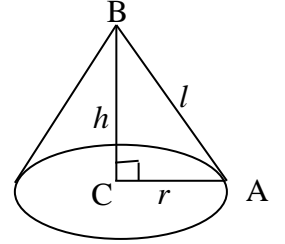
(ग) आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) टेन्टमा वक्रसतहको क्षेत्रफल नै कपडाको पूरा सतहको क्षेत्रफल हो, यस भनाइलाई कारणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

5. व्यास 8 cm र ठाडो उचाइ 21 cm भएको एउटा सोली छ ।

(क) उक्त सोलीको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) आधारको परिमिती कति हुन्छ ?



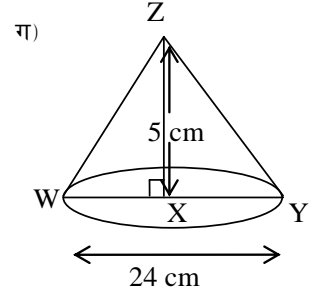
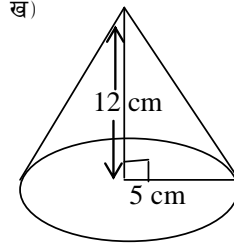
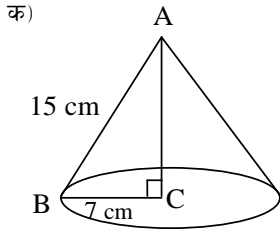
(ग) छड्के सतहको क्षेत्रफल भन्दा पूरा सतहको क्षेत्रफल कति प्रतिशतले बढी हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. दिइएको जानकारीको आधारमा तल दिइएका सोलीहरूको

(अ) आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) बक्रसतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(इ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



7. एउटा सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल 550 वर्ग से.मी. र छड्के उचाइ 25 से.मी छ

(क) सोलीको आधारको अर्धव्यास (r) कति हुन्छ ?

(ख) सोलीको ठाडो उचाइ (h) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा सोलीको पूरा सतहको क्षेत्रफल र बक्र सतहको क्षेत्रफल क्रमशः 704 वर्ग से.मी. र 550 वर्ग से.मी. भए सो सोलीको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) छड्के उचाइ (l), ठाडो उचाइ (h) र आधारको अर्धव्यास (r) विचको सम्बन्ध लेख्नहोस् ।

(ख) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(घ) ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?

(ङ) उक्त सोलीको आधारको परिधिको लम्बाइ कति हुन्छ ?

उत्तर :

1. (क) वृत्ताकार (ख) ठाडो उचाइ (ग) $l^2 = h^2 + r^2$ (घ) 17cm

2. (क) $\pi pq \text{ cm}^2$ (ख) $\pi r(r+l) \text{ cm}^2$

3. 132 cm^2

4. (क) 17.5 cm (ख) 110 cm (ग) 962.5 cm^2

5. (क) $\sqrt{457} \text{ cm}$ (ख) 25.14 cm (ग) 18.75%

6. (क) 154 cm^2 , 330 cm^2 , 484 cm^2 (ख) 78.57 cm^2 , 204.28 cm^2 , 282.85 cm^2
(ग) 452.57 cm^2 , 490.28 cm^2 , 942.85 cm^2

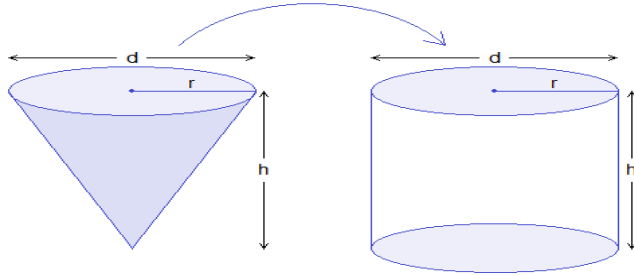
7. (क) 7 cm (ख) 24 cm (ग) 704 cm^2

8. (क) $l^2 = h^2 + r^2$ (ख) 7 cm (ग) 25 cm (घ) 24 cm (ङ) 44 cm

5.2.2 सोलीको आयतन (Volume of Cone)

क्रियाकलाप 1

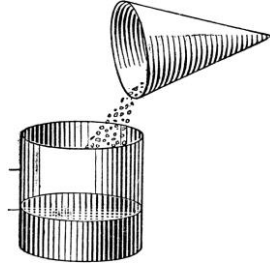
विद्यार्थीहरूले आफ्नो नजिकको पुस्तक पसलबाट चार्टपेपर किन्नुहोस् । चार्टपेपर प्रयोग गरी चित्रमा देखाए जस्तै: आधारको अर्धव्यास र उचाइ बराबर ($r = h$) भएको एउटा सोली बनाउनुहोस् । साथै आधारको अर्धव्यास र ठाडो उचाइ सोलीको अर्धव्यास र उचाइसँग बराबर ($r = h$) भएको एउटा सिलिण्डर पनि बनाउनुहोस् ।



यसरी बनाएको सोलीमा बालुवा वा धुलो माटो वा पिठो भर्नुहोस् । सो बालुवा वा धुलो माटो वा पिठोलाई सिलिण्डरमा खन्याउनुहोस् ।

(क) कति पटक खन्याउँदा सो सिलिण्डर बालुवा वा धुलो माटो वा पिठोले भरिन्छ ? राम्रोसँग गन्ती गर्दै खन्याउनुहोस् है त ।

(ख) के यो दुई पटकमा भरिन्छ, त ? हैन होला । के यो तीन पटकमा भरिन्छ ?



हो पक्कै पनि तपाइँहरूले तीन पटकसम्म बालुवा वा धुलो माटो वा पिठो भदैं खन्याउँदै गर्दा सो बेलना (सिलिण्डर) भरिन्छ । यसबाट के प्रमाणित हुन्छ भने

सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3}$ सिलिण्डरको आयतन हुन्छ । त्यसैले,

$$\text{सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \times A \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad [\because \text{बेलनाको आयतन} = \pi r^2 h]$$

उदाहरण 1

एउटा सोलीको छड्के उचाइ 10 cm र आधारको व्यास 12 cm छ ।

- (क) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ?
- (ख) सोलीको ठाडो उचाइ कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

सोलीको ठाडो उचाइ (l) = 10 cm

आधारको व्यास (d) = 12 cm

(क) आधारको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$

अतः आधारको अर्धव्यास (r) = 6cm

(ख) फेरी, सूत्रअनुसार, $h^2 = l^2 - r^2$

अथवा, $h^2 = (10)^2 - (6)^2$

अथवा, $h^2 = 100 - 36 = 64$

अतः सोलीको ठाडो उचाइ (h) = 8 cm

(ग) सूत्रअनुसार,

$$\text{सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 8 \text{ cm}^3 = 301.71 \text{ cm}^3$$

$$\text{अतः सोलीको आयतन (V)} = 301.71 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 2

एउटा सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल 2200 cm^2 र आधारको अर्धव्यास 14 cm भए,

(क) सोलीको पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) सोलीको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ग) सोलीको ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?

(घ) उक्त सोलीको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$$\text{वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = 2,200 \text{ cm}^2$$

$$\text{आधारको अर्धव्यास (r)} = 14 \text{ cm}$$

$$(क) \text{ सोलीको पूरासतहको क्षेत्रफल (TSA)} = \pi r (r + h)$$

$$(ख) \text{ फेरी, सूत्रअनुसार, वक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = \pi r l$$

$$\text{अथवा, } 2,200 = \frac{22}{7} \times 14 \times l$$

$$\text{अथवा, } 2,200 \times 7 = 22 \times 14 \times l$$

$$\text{अथवा, } \frac{2200 \times 7}{22 \times 14} = l$$

$$\text{अथवा, } l = 50 \text{ cm}$$

$$\text{अतः छड्के उचाइ (l)} = 50 \text{ cm}$$

$$(ग) \text{ फेरी, सूत्रअनुसार, } h^2 = l^2 - r^2$$

$$\text{अथवा, } h^2 = (50)^2 - (14)^2$$

$$\text{अथवा, } h^2 = 2500 - 196$$

$$\text{अथवा, } h^2 = 2500 - 196$$

$$\text{अथवा, } h^2 = 2304$$

$$\text{अथवा, } h = \sqrt{2304} = 48 \text{ cm}$$

अतः ठाडो उचाइ (h) = 48 cm

(घ) सूत्रअनुसार, सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

अथवा, आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 48$

अथवा, आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 48$

अथवा, आयतन (V) = $\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 196 \times 48 = 9856 \text{ cm}^3$

अतः सोलीको आयतन (V) = 9856 cm^3

उदाहरण 3

एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 5:12 तथा आयतन 314.29 cm^3 छ भने

(क) आधारको अर्धव्यास र ठाडो उचाइ कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ग) उक्त सोलीको बक्रसतहको क्षेत्रफल र पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) पूरासतहको क्षेत्रफल बक्रसतहको क्षेत्रफलभन्दा कति प्रतिशतले बढी हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात 5:12, मानौं, अर्धव्यास (r) = $5x$ र उचाइ (h) = $12x$

आयतन (V) = 314.29 cm^3

(क) सूत्रअनुसार, सोलीको आयतन (V) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (5x)^2 \times 12x$

अथवा, $314.29 \times 21 = 22 \times 25x^2 \times 12x$

अथवा, $\frac{314.29 \times 21}{22 \times 25 \times 12} = x^3$

अथवा, $x = 1.000004 \approx 1 \text{ cm}$

अतः अर्धव्यास (r) = $5 \times 1 \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ र ठाडो उचाइ (h) = $12 \times 1 \text{ cm} = 12 \text{ cm}$

$$(ख) \text{ छड्के उचाइ}(l) = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} \text{ cm} = \sqrt{144 + 25} \text{ cm}$$

$$= \sqrt{144 + 25} \text{ cm} = 13 \text{ cm}$$

$$(ग) \text{ फेरी, सूत्रअनुसार, सोलीको बक्र सतहको क्षेत्रफल (CSA)} = \pi r l = \frac{22}{7} \times 5 \text{ cm} \times 13 \text{ cm}$$

$$= 204.28 \text{ cm}^2$$

$$\text{र पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} = \pi r (r + l) = \frac{22}{7} \times 5 \text{ cm} (5 \text{ cm} + 13 \text{ cm})$$

$$= 282.85 \text{ cm}^2$$

$$(घ) \text{ पूरा सतहको क्षेत्रफल र बक्र सतहको क्षेत्रफलको फरक} = 282.85 \text{ cm}^2 - 204.28 \text{ cm}^2$$

$$= 78.57 \text{ cm}^2$$

$$\text{अतः फरक प्रतिशत} = \frac{78.57 \text{ cm}^2}{204.28 \text{ cm}^2} \times 100\% = 38.46\%$$

उदाहरण 4

एउटा ठोस सोलीको ठाडो उचाइ व्यासको तीनगुणा छ। उक्त सोलीको आयतन $54\pi \text{ cm}^3$ भए,

- (क) आधारको व्यास कति हुन्छ ? (ख) सोलीको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) छड्के उचाइ निकाल्नुहोस् । (घ) बक्रसतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ङ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, आधारको व्यास (d) = $x \text{ cm}$ र ठाडो उचाइ (h) = $3x \text{ cm}$

आयतन (V) = $54\pi \text{ cm}^3$, आधारको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{x}{2}$

$$(क) \text{ सूत्रअनुसार, (V)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{अथवा, } 54\pi = \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 \times 3x$$

$$\text{अथवा, } 54\pi \times 3 = \pi \times \frac{x^2}{4} \times 3x$$

$$\text{अथवा, } \frac{54\pi \times 3 \times 4}{3\pi} = x^3$$

$$\text{अथवा, } \frac{54\pi \times 3 \times 4}{3\pi} = x^3$$

$$\text{अथवा, } 216 = x^3$$

$$\text{अथवा, } x = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{अतः आधारको व्यास (d) = 6 cm}$$

$$\text{(ख) ठाडो उचाइ (h) = } 3 \times 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$\text{(ग) फेरी, } l^2 = h^2 + r^2 = (18)^2 + (3)^2 = 324 + 9 = 333$$

$$\text{अतः } l = \sqrt{333} = 3\sqrt{37} \text{ cm}$$

$$\text{(घ) बक्रसतहको क्षेत्रफल(CSA) = } \pi r l = \frac{22}{7} \times 3 \times 3\sqrt{37} \text{ cm} = 172.05 \text{ cm}^2$$

$$\text{(ङ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र (TSA) = } \pi r(r + l) \text{ वर्ग एकाइ}$$

उदाहरण 5

सोलीको आधारको अर्धव्यास 3 cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल $\frac{1980}{7} \text{ cm}^2$ छ भने,

$$\text{(क) छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्} \quad \text{(ख) सोलीको उचाइ कति हुन्छ ?}$$

$$\text{(ग) बक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।} \quad \text{(घ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।}$$

समाधान : यहाँ,

मानौं, आधारको अर्धव्यास (r) = 3 cm, पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $\frac{1980}{7} \text{ cm}^2$,

$$\text{(क) सूत्रअनुसार, (TSA) = } \pi r (r + l)$$

$$\text{अथवा, } \frac{1980}{7} = \frac{22}{7} \times 3(3 + l)$$

$$\text{अथवा, } \frac{1980}{66} = (3 + l)$$

$$\text{अथवा, } 30 = 3 + l$$

$$\text{अथवा, } 30 - 3 = l$$

$$\text{अथवा, } 27 = l$$

$$\text{अतः छड्के उचाइ (l) = 27 cm}$$

$$\text{(ख) फेरी, } h^2 = l^2 - r^2$$

$$\text{अथवा, } h^2 = (27)^2 - (3)^2 = 729 - 9 = 720$$

$$\text{अथवा, } h = \sqrt{720} = 12\sqrt{5} \text{ cm}$$

अतः सोलीको उचाइ (h) = $12\sqrt{5}$ cm

(ग) बक्र सतहको क्षेत्रफल(CSA) = $\pi r l = \frac{22}{7} \times 3 \times 27 \text{ cm} = 254.57 \text{ cm}^2$

(घ) आयतन (V) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3)^2 \times 12\sqrt{5} \text{ cm} = 252.99 \text{ cm}^3$

अभ्यास 5.2.1

- (क) सोलीको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) आधारको अर्धव्यास 'm'ft र ठाडो उचाइ 'n'ft भएको सोलीको आयतन कति हुन्छ ?

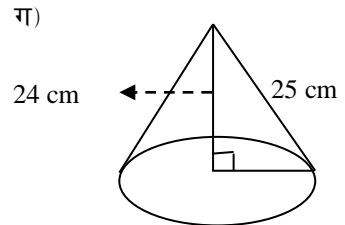
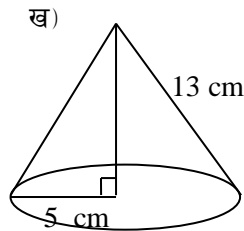
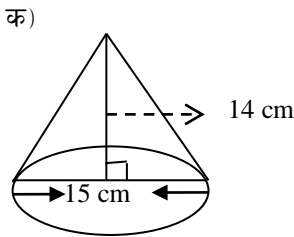
(ग) एउटा सोलीको आधारको व्यास 'p' cm र ठाडो उचाइ 'q' cm छ । उक्त सोलीको आयतन कति हुन्छ ?
- (क) एउटा सोलीको आधारको क्षेत्रफल 306 cm^2 र उचाइ 20 cm भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) एउटा सोलीको छड्के उचाइ 13 cm र आधारको व्यास 10 cm भए

(अ) उक्त सोलीको अर्धव्यास कति हुन्छ ?

(आ) सोलीको ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?

(इ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- दिइएको जानकारीको आधारमा तल दिइएका सोलीहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



- एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास 7 से.मी. र उचाइ 21 से.मी. भए त्यसको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा समकोणी सोलीको आयतन $100\pi \text{ cm}^3$ र उचाइ 12 cm भए,

(क) अर्धव्यास कति हुन्छ ?

(ख) उक्त सोलीको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- आधारको परिधि 44 से.मि भएको एउटा सोली आकार टेन्टको आयतन 1232 घन से.मि. छ ।

- (क) टेन्टका आधारको अर्धव्यास (ख) टेन्टको उचाइ
 (ग) आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
7. एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास 7cm र बक्रसतहको क्षेत्रफल 550cm^2 छ भने,
 (क) सोलीको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सोलीको ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?
 (ग) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. एउटा सोलीको आधारको अर्धव्यास र उचाइको अनुपात $7:24$ तथा आयतन 9856cm^3 छ भने
 (क) आधारको अर्धव्यास र ठाडो उचाइ कति कति हुन्छ ?
 (ख) छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
 (ग) उक्त सोलीको बक्रसतहको क्षेत्रफल र पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) पूरासतहको क्षेत्रफल बक्रसतहको क्षेत्रफल भन्दा कति प्रतिशतले बढी हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. एउटा ठोस सोलीको ठाडो उचाइ व्यासको तीनगुणा छ । उक्त सोलीको आयतन 2156 cm^3 भए पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (क) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) आधारको व्यास कति हुन्छ ?
 (ग) सोलीको ठाडो उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) छड्के उचाइ निकाल्नुहोस् ।
 (ङ) बक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा सोली जसको व्यास 8 cm र उचाइ 21 cm छ ।
 (क) छड्के उचाइ निकाल्नुहोस् ।
 (ख) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) बक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
11. सोलीको छड्के उचाइ 27 cm र पूरा सतहको क्षेत्रफल $90\pi\text{ cm}^3$ छ भने,
 (क) आधारको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) सोलीको उचाइ कति हुन्छ ?
 (ग) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ (ख) $\frac{1}{3} \pi m^2 n$ cu. ft (ग) $\frac{1}{12} \pi p^2 q$ cm³

2. (क) 2040 cm³ (ख) (अ) 5 cm (आ) 12 cm (इ) 100π cm³

3. (क) 825 cm³ (ख) 100π cm³ (ग) 1232 cm³

4. 1078 cm³

5. (क) 5 cm (ख) 13 cm

6. (क) 7 cm (ख) 24 cm (ग) 154cm

1. (क) 25 cm (ख) 24 cm (ग) 1232 cm³

2. (क) 14 cm, 48 cm (ख) 50 cm (ग) 2200 cm², 2816 cm² (घ) 28%

3. (क) $\pi r(r+l)$ वर्ग एकाइ (ख) 14 cm (ग) 42cm (घ) $7\sqrt{37}$ cm (ङ) $154\sqrt{37}$ cm²

4. (क) $\sqrt{457}$ cm (ख) 352 cm² (ग) 268.74 cm² (घ) 319.03 cm²

5. (क) 3 cm (ख) $12\sqrt{5}$ cm (ग) 252.99 cm³

5.3.1 संयुक्त ठोस (Combined Solid)

दुई वा दुईभन्दा बढी त्रिआयामिक वस्तुहरू मिलेर बनेका ठोस वस्तुहरूलाई संयुक्त ठोस वस्तु (Combined Solid) भनिन्छ ।

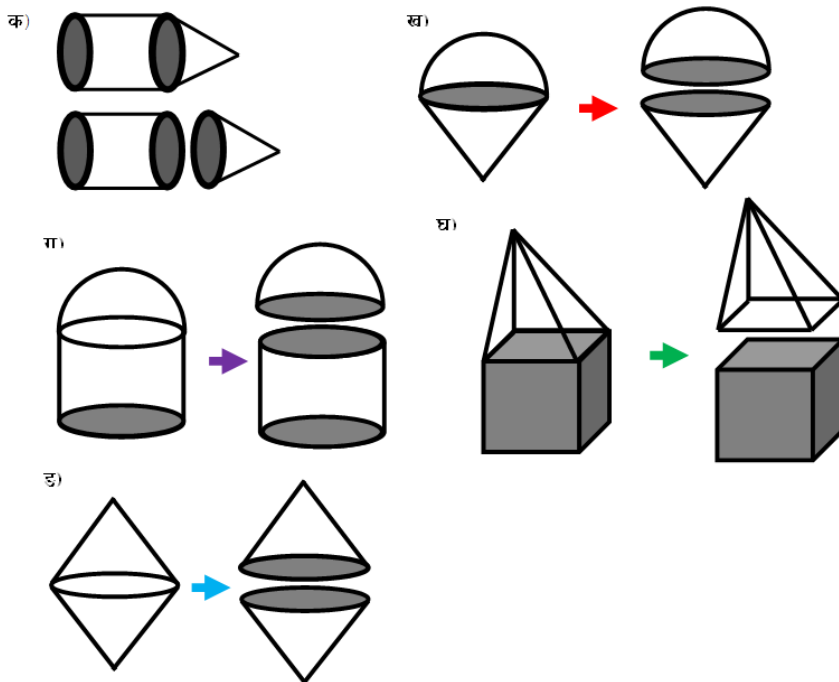
दिइएका वस्तुहरू संयुक्त ठोस वस्तुका उदाहरण हुन् ।



टेन्ट सोली र बेलना, आइसक्रीम सोली र अर्धगोला, औषधि बेलाना र दुईतिर अर्धगोला, खेलौना सोली र अर्धगोला मिलेर बनेका छन् ।

क्रियाकलाप 1

विद्यार्थीहरूले आफ्नो छरछिमेक वा टोलमा पाइने स्थानीय सामग्रीहरू जस्तै : काठ, सिसा, कागज, तार वा सिन्काबाट बनेका फरक फरक संयुक्त ठोस वस्तुहरू बनाउनुहोस् अथवा बजारमा पाइने रेडिमेड वस्तुहरू लिनुहोस् ।



तपाईंहरू प्रत्येकले एउटा सिसाकलमलाई तिखारेर माथिको पहिलो चित्र (क) मा जस्तै काट्नुहोस् । काटिसकेपछि दुईओटा टुक्राहरू पाउनुहुनेछ । ती दुईओटा टुक्राहरू कुन कुन आकारमा पाउनुहुनेछ ?

- के नकाटिएको सिसाकलमको आयतन काटिएपछिको वेलना भागको पूरा आयतन र सोलीभागको पूरा आयतन जोड्दा बराबर हुन्छ ?
- के नकाटिएको सिसाकलमको पूरा सतहको क्षेत्रफल, काटिएपछिको वेलना भागको पूरा सतहको क्षेत्रफल र सोली भागको पूरा सतहको क्षेत्रफल जोड्दा बराबर हुन्छ ?
- के नकाटिएको सिसाकलमको पूरा सतहको क्षेत्रफल भनेको, वेलनाको आधारको क्षेत्रफल, वेलनाको वक्र सतहको क्षेत्रफल र सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफलको योगफलसँग बराबर हुन्छ, वा हुँदैन ?

पक्कै पनि तपाईंहरूले बुझिसक्नु भयो होला । तिखारिएको सिसाकलमलाई काट्दा बन्ने आकारहरू वेलना र अर्धगोला हुन् ।

- को उत्तर बराबर नै हुन्छ भन्ने हो ।

(आ) को उत्तर बराबर हुँदैन भन्ने हो ।

(इ) को उत्तर बराबर हुन्छ भन्ने हो ।

यस कुरालाई पुष्टि गर्न प्रयोगबाट गर्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

सोली (कोन)मा आइसक्रिम भर्नुहोस् । माथिपट्टि आइसक्रिमले अर्धगोलाकार आकार बनाउनुहोस् । आइसक्रिम छैन भने भुरुड लिनुहोस् । जसको तलपट्टिको भाग सोली र माथिल्लो भाग अर्धगोला मिली बनेको हुन्छ । माथिको दोस्रो चित्र (ख) मा जस्तै काट्नुहोस् । काटिसकेपछि माथिको चित्रमा जस्तै दुईओटा टुक्राहरू पाउनुहुनेछ । अब तलका प्रश्नहरूमा आवश्यक अध्ययन गर्नुहोस् र जानकारी लिनुहोस् ।

(क) अर्धगोलाको मात्र पूरा सतह र वक्रसतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ख) सोलीको मात्र वक्र सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

(ग) आइसक्रिमको पूरा सतहको क्षेत्रफल कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

(घ) आइसक्रिमको आयतन कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

जानकारी यस प्रकार छ ।

अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $2\pi r^2$ र पूरासतहको क्षेत्रफल = $3\pi r^2$ हुन्छ ।

सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल = $\pi r l$ हुन्छ । अर्धगोलाकार आकारमा भएको आइसक्रिमको सोलीको

आयतन $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ र अर्धगोलाको आयतन $\frac{2}{3}\pi r^3$ जोड्दा आइसक्रिमले भरिएको सोलीको आयतन प्राप्त हुन्छ ।

फेरी, सोलीको वक्र सतहको क्षेत्रफल ($\pi r l$) र अर्धगोलाको वक्र सतहको क्षेत्रफल ($2\pi r^2$) जोड्दा आइसक्रिमले भरिएको सोलीको क्षेत्रफल प्राप्त हुन्छ ।

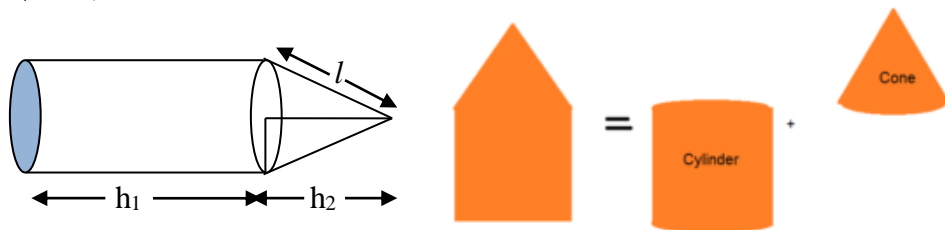
यसैगरी, माथिको चित्रहरू (ग), (घ) र (ङ) मा पनि अध्ययन गर्नु होला । इन्टरनेटबाट अथवा अरु सहयोगी किताबहरूको अध्ययन गरी जानकारी प्राप्त गर्नुहोस् ।

यसरी दुई वा दुई भन्दा बढी त्रिआयामिक वस्तुहरू मिलेर सम्बन्धित ठोस वस्तर बनेको हुन्छ । अब संबन्धित ठोस वस्तुहरूको छुट्टाछुट्टै अध्ययन गरौं है त ।

5.3.2 सम्युक्त ठोस वस्तुहरूको क्षेत्रफल र आयतन (Surface area and volume of combined solid)

1. बेलना र सोली (Cylinder and Cone)

दिइएको सम्युक्त ठोस वस्तु बेलना र सोली मिली बनेको छ । जसको आधारको अर्धव्यास 'r', बेलना भागको उचाइ वा लम्बाइ 'h₁', सोली भागको उचाइ 'h₂' र सोली भागको छड्के उचाइ 'l' छ भने



(क) आधारको क्षेत्रफल = πr^2 हुन्छ ।

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल = आधारको क्षेत्रफल + बेलना भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल + सोली भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल

अतः पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = $\pi r^2 + 2\pi r h_1 + \pi r l$

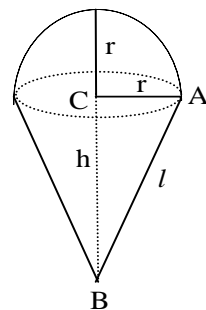
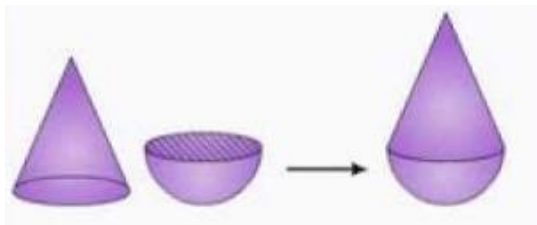
(ग) जम्मा आयतन (V) = बेलना भागको आयतन + सोली भागको आयतन

$$= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$= \pi r^2 \left(h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right)$$

2. सोली र अर्धगोला (Cone and Hemisphere)

दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन दुइओटा ठोस वस्तु मिलि बनेको छ ? यो सोली र अर्धगोलाबाट मिली बनेको संयुक्त ठोस वस्तु (आइसक्रिम) हो । जहाँ सोली भागको ठाडो उचाइ 'h' छड्के उचाइ 'l' अर्धव्यास 'r' छन । समकोण त्रिभुज ABC मा पाइथागोरस साध्यको प्रयोग गरी $l^2 = h^2 + r^2$ हुन्छ ।



क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.SA) = सोली भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्धगोला

$$\text{भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल} = \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

ख) जम्मा आयतन (V) = सोली भागको आयतन + अर्धगोला भागको आयतन

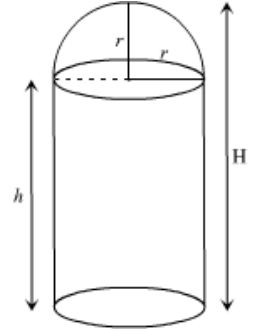
$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h + 2r)$$

नोट : सोली र अर्धगोला मिली बनेको संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल = ठोस वस्तुको वक्र सतहको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।

3. बेलना र अर्धगोला (Cylinder and Hemisphere)

सँगै दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन कुन ठोस वस्तुहरू मिलेर बनेको छ ?

के यो बेलना र अर्धगोला मिली बनाइएको संयुक्त ठोस वस्तु हो ? पक्कै पनि यो संयुक्त ठोस वस्तु बेलना र अर्धगोला मिलि बनेको छ जसमा बेलना भागको उचाइ 'h' पूरा ठोस वस्तुको उचाइ 'H' र आधारको अर्धव्यास 'r' छ । अब, दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुको,



क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = आधारको क्षेत्रफल + बेलना भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल + अर्धगोला भागको वक्र सतहको क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r h + 3\pi r^2$$

ख) जम्मा आयतन(V) = बेलना भागको आयतन + अर्धगोला भागको आयतन

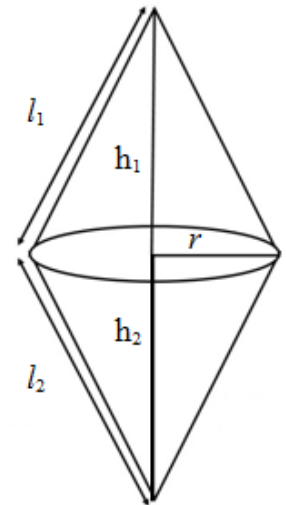
$$= \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 (h + \frac{2}{3}r)$$

4. सोली र सोली (Cone and Cone)

दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन कुन ठोस वस्तुहरू मिलेर बनेको छ ?

दुईओटा सोली मिलेर एउटा संयुक्त ठोस वस्तु बनेको छ । वृत्ताकार आधारको अर्धव्यास 'r' छ । h_1 र l_1 क्रमशः माथि तर्फको कोनको ठाडो उचाइ र छड्के उचाइ हुन् । त्यसैगरी, h_2 र l_2 क्रमशः तल तर्फको कोनको ठाडो उचाइ र छड्के उचाइ हुन् ।

क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.SA) = माथि तर्फको कोनको वक्र सतहको क्षेत्रफल + तल तर्फको कोनको वक्र सतहको क्षेत्रफल



$$= \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r (l_1 + l_2)$$

ख) जम्मा आयतन (V) = मथि तर्फको कोनको आयतन + तल तर्फको कोनको आयतन

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

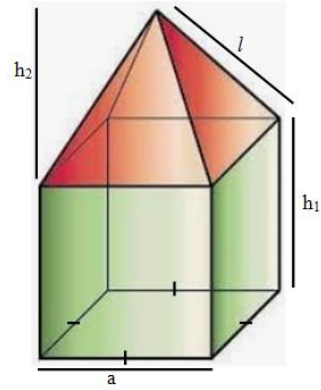
$$= \frac{1}{3} \pi (h_1 + h_2)$$

नोट : दुवै सोली मिली बनेको संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोस वस्तुको बक्र सतहको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।

5. पिज्म र पिरामिड (Prism and Pyramid)

दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन कुन ठोस वस्तुहरू मिलेर बनेको छ ? के यो पिज्म र पिरामिड मिलेर बनेको छ ?

पिज्मको आधार वर्गाकार छ । वर्गाकार आधार भएको पिज्मको आधारको लम्बाइ 'a' पिज्म भागको उचाइ 'h₁' पिरामिड भागको उचाइ 'h₂' र पिरामिडको छड्के उचाइ 'l' छन् ।



आधारको क्षेत्रफल (A) = a²

(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.SA) = आधारको क्षेत्रफल + पिज्म भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल + पिरामिड भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल

$$= a^2 + P \times h_1 + 2al \text{ (जहाँ 'P' भनेको पिज्मको आधारका परिमिती हो ।)}$$

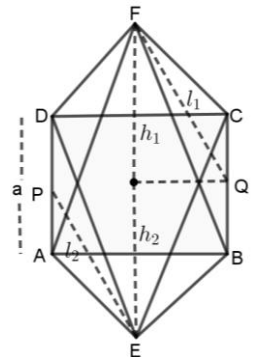
(ख) जम्मा आयतन(V) = पिज्मको आयतन + पिरामिडको आयतन

$$= A \times h_1 + \frac{1}{3} A h_2 = a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2 = a^2 (h_1 + \frac{1}{3} h_2)$$

6. पिरामिड र पिरामिड (Pyramid and Pyramid)

दिइएको संयुक्त ठोस वस्तु कुन कुन ठोस वस्तुहरू मिलेर बनेको छ ? पक्कै पनि यो ठोस वस्तु वर्ग आधार भएको दुईओटा पिरामिड मिलेर बनेको छ ।

वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको आधारको लम्बाइ 'a' तल पट्टिको पिरामिड भागको उचाइ 'h₁' र माथि पट्टिको पिरामिड भागको उचाइ 'h₂' छ । त्यसैगरी तल पट्टिको पिरामिड भागको



छड्के उचाइ 'l₁' र माथि पट्टिको पिरामिड भागको छड्के उचाइ 'l₂' छ ।

(क) पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.SA) = तल पट्टिको पिरामिड भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल + माथि पट्टिको पिरामिड भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल

$$= 2a l_1 + 2a l_2 = 2a (l_1 + l_2)$$

(ख) जम्मा आयतन(V) = तल पट्टिको पिरामिडको आयतन + माथि पट्टिको पिरामिडको आयतन

$$= \frac{1}{3} A \times h_1 + \frac{1}{3} A h_2 = \frac{1}{3} a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2 = \frac{1}{3} a^2 (h_1 + h_2)$$

नोट : दुवै पिरामिड मिली बनेको संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोस वस्तुको बक्र सतहको क्षेत्रफल = संयुक्त ठोस वस्तुको सतहको क्षेत्रफल हुन्छ ।

उदाहरण 1

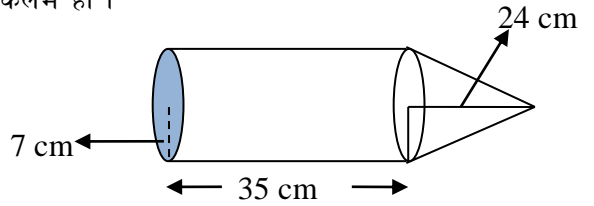
चित्रमा देखाइएको संयुक्त ठोस वस्तु एउटा सिसाकलम हो ।

(क) सोलीको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?

(ख) बक्र सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

वृत्ताकार आधारको अर्धव्यास जहाँ (r) = 7 cm

बेलना भागको उचाइ (h₁) = 39 cm

सोली भागको उचाइ (h₂) = 24 cm

बक्र सतहको क्षेत्रफल = ? पूरा सतहको क्षेत्रफल = ?, आयतन = ?

(क) सूत्रअनुसार, $l^2 = h^2 + r^2 = (24)^2 + (7)^2 = 576 + 49 = 625 \text{ cm}^2$

अतः सोली भागको छड्के उचाइ (l) = 25 cm

(ख) सूत्रअनुसार, बक्र सतहको क्षेत्रफल = $2\pi r h_1 + \pi r l = \pi r (2h_1 + l)$

$$= \frac{22}{7} \times 7 (2 \times 39 + 25)$$

$$= 22 \times (78 + 25)$$

$$= 22 \times (103) = 2,266$$

अतः वक्र सतहको क्षेत्रफल = $2,266 \text{ cm}^2$

$$\begin{aligned} \text{(ग) फेरी, सूत्रअनुसार, पूरा सतहको क्षेत्रफल} &= \pi r^2 + 2\pi r h_1 + \pi r l \\ &= \pi r (r + 2h_1 + l) \\ &= \frac{22}{7} \times 7 (7 + 2 \times 39 + 25) \\ &= 22 \times 110 \text{ cm}^2 = 2420 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः पूरासतहको क्षेत्रफल = 2420 cm^2

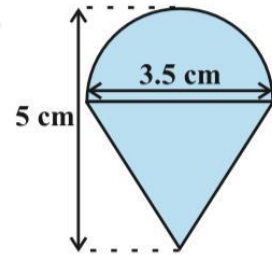
$$\begin{aligned} \text{(घ) आयतन (V)} &= \text{वेलना भागको आयतन} + \text{सोली भागको आयतन} \\ &= \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 \\ &= \pi r^2 (h_1 + \frac{1}{3} h_2) \\ &= \frac{22}{7} \times (7)^2 (39 + \frac{1}{3} \times 24) \text{ cm}^3 \\ &= 7238 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

अतः आयतन (V) = 7238 cm^3

उदाहरण 2

दिइएको चित्र एउटा संयुक्त ठोस वस्तुको हो । जसको पूरा उचाइ 5cm र आधारको व्यास 3.5cm छ ।

- (क) आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ?
- (ख) सोली भागको उचाइ कति हुन्छ ?
- (ग) ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

आधारको व्यास जहाँ (d) = 3.5 cm

ठोस वस्तुको उचाइ = 5 cm

(क) आधारको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{3.5}{2} = 1.75\text{cm}$

(ख) सोली भागको उचाइ (h) = ठोस वस्तुको उचाइ - अर्धगोला भागको अर्धव्यास (अर्धगोला भागको अर्धव्यास = आधारको अर्धव्यास)

त्यसैले, सोली भागको उचाइ (h) = $5\text{ cm} - 1.75\text{cm} = 3.25\text{ cm}$

(ग) ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफलको लागि अर्धगोलाको बक्रसतहको क्षेत्रफल =

$$\text{आइसक्रिम सहित सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{अथवा, } 32340\text{ cm}^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$$

$$\text{अथवा, } 32340\text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^2\text{ cm}^2 (h + 2 \times 21\text{ cm})$$

$$\text{अथवा, अथवा, } \frac{32340 \times 21}{22 \times 441}\text{ cm} = (h + 42\text{ cm})$$

$$\text{अथवा, } 70\text{ cm} - 42\text{ cm} = h$$

$$\text{अथवा, } h = 28\text{ cm}$$

∴ सोली भागको उचाइ (h) = 28 cm

(ख) फेरी, छड्के उचाइ (l) = $\sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(28)^2 + (21)^2}\text{cm} = \sqrt{1225}\text{ से.मी.} = 35\text{ cm}$

$$\text{पूरा सतहको क्षेत्रफल (T.SA)} = \pi r l + 2\pi r^2$$

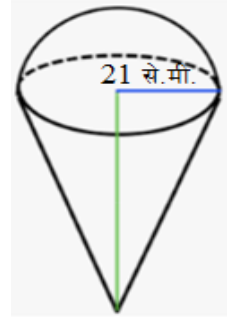
$$= \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 (35 + 2 \times 21)\text{ cm}^2$$

$$= 66 (35 + 42)\text{ cm}^2 = 66 \times 77\text{ cm}^2 = 5082\text{ cm}^2$$

उदाहरण 3

दिइएको चित्र एउटा आइसक्रिमको हो । जसको वृत्ताकार आधारको अर्धव्यास 21 cm र जम्मा आइसक्रिमको आयतन 32340 cm^3 छ भने,



- (क) सोली भागको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) सोली भागको छड्के उचाइ कति होला ?
- (ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) के दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुमा बक्रसतहको क्षेत्रफल नै पूरा सतहको क्षेत्रफल हो भन्न सकिन्छ त ?

समाधान : यहाँ,

आधारको अर्धव्यास जहाँ $(r) = 21 \text{ cm}$

आइसक्रिमका आयतन $(V) = 32340 \text{ cm}^3$

(क) हामीलाई थाहा छ ,

$$\text{आइसक्रिम सहित सोलीको आयतन (V)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\text{अथवा, } 32340 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 (h + 2r)$$

$$\text{अथवा, } 32340 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \text{ cm}^2 (h + 2 \times 21 \text{ cm})$$

$$\text{अथवा, अथवा, } \frac{32340 \times 21}{22 \times 441} \text{ cm} = (h + 42 \text{ cm})$$

$$\text{अथवा, } 70 \text{ cm} - 42 \text{ cm} = h$$

$$\text{अथवा, } h = 28 \text{ cm}$$

\therefore सोली भागको उचाइ $(h) = 28 \text{ cm}$

(ख) फेरी, छड्के उचाइ $(l) = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(28)^2 + (21)^2} \text{ cm} = \sqrt{1225} \text{ से.मी.} = 35 \text{ cm}$

(ग) पूरा सतहको क्षेत्रफल $(T.SA) = \pi r l + 2\pi r^2$

$$= \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 (35 + 2 \times 21) \text{ cm}^2$$

$$= 66 (35 + 42) \text{ cm}^2 = 66 \times 77 \text{ cm}^2 = 5082 \text{ cm}^2$$

(घ) सोली र अर्धगोला मिली बनेको संयुक्त ठोस बस्तको वक्रसतहको क्षेत्रफल पूरा सतहको क्षेत्रफल सँग बराबर हुन्छ । त्यसैले वक्रसतहको क्षेत्रफल = 5082 cm^2 हुन्छ ।

उदाहरण 4

एकजना मानिसले आफ्नो घरको प्रयोजनको लागि 1.05 मिटर अर्धव्यास र 3.5 मिटर उचाइ भएको एउटा वृत्ताकार आधार भएको पानी ट्याङ्की पसलबाट किनेर ल्याउनु भयो । यदि सो ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग अर्धगोलाकार छ ।

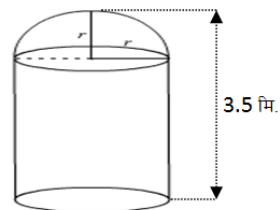
- (क) ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल कति होला ?
 (ख) सो ट्याङ्कीको बाहिरी सतहको पूरा क्षेत्रफल कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सो ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) यदि सो ट्याङ्कीमा प्रति लिटर 50 पैसाका दरले पानी भर्न जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

आधारको अर्धव्यास जहाँ (r) = 1.05 मिटर

ट्याङ्कीको उचाइ = 3.5 मिटर

हामीलाई थाहा छ, बेलनको उचाइ (h) = 3.5 मिटर – 1.05 मिटर
 = 2.45 मिटर



(क) आधारको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (1.05)^2 = 3.465$ वर्ग मिटर

(ख) पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = आधारको क्षेत्रफल + बेलनाको वक्रसतहको क्षेत्रफल + अर्धगोलाको वक्रसतहको क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 + 2\pi r h + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$= \pi r (3r + 2h)$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.05 (3 \times 1.05 + 2 \times 2.45) \text{ वर्ग मिटर}$$

$$= 26.565 \text{ वर्ग मिटर}$$

(ग) ट्याङ्कीमा पानीको आयतन (V) = बेलना भागको आयतन + अर्धगोला भागको आयतन

$$= \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 (h + \frac{2}{3}r)$$

$$= \frac{22}{7} \times (1.05)^2 (2.45 + \frac{2}{3} \times 1.05) \text{ घन मिटर}$$

$$= 10.91475 \text{ घन मिटर}$$

हामीलाई थाहा छ, 1 घन मिटर = 1000 लिटर

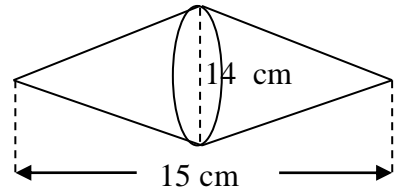
$$10.91475 \text{ घन मिटर} = 10.91475 \times 1000 \text{ लिटर} = 10914.75 \text{ लिटर}$$

(घ) जम्मा खर्च (T) = पानीको आयतन(V) × दर = रु. 10914.75 × $\frac{50}{100}$ = रु. 5457.375

उदाहरण 5

चित्रमा दिइएको ठोस वस्तु दुईओटा सोलीहरू मिली बनेको छ। जसको नाप चित्रमा देखाइएको छ

- (क) दिइएको 14 cm ले के जनाउँछ ?
 (ख) ठोस वस्तुको आधारको अर्धव्यास कति हुन्छ ?
 (ग) उक्त ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस ।



समाधान : यहाँ,

- (क) दिइएको 14 cm ले दुवै सोली भागको आधार(वृत्त) को व्यास जनाउँछ, अतः (d) = 14 cm
 ठोस वस्तुको जम्मा उचाइ = 15 cm

मानौं, बायाँ भागको सोलीको उचाइ = (h₁) र दायाँ भागको सोलीको उचाइ = (h₂)

$$\therefore h_1 + h_2 = 15 \text{ cm}$$

- (ख) आधारको वृत्तको अर्धव्यास (r) = $\frac{d}{2} = \frac{14}{2} \text{ cm} = 7 \text{ cm}$

- (ग) सोलीको आयतन (V₁) = $\frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2)$

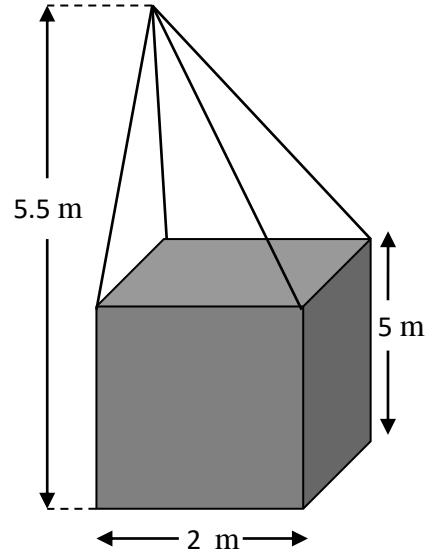
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 (15) \quad [\because \text{किनकी } (h_1 + h_2) = 15 \text{ cm}]$$

$$= 770 \text{ cm}^3$$

उदाहरण 6

दिइएको संयुक्त ठोसवस्तुको तल्लो भाग आधार वर्ग भएको प्रिज्म र माथिल्लो भाग वर्गाकार पिरामिडबाट बनेको छ । दिइएको नाप अनुसार उक्त संयुक्त ठोसवस्तुको

- पिरामिड भागको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- आधारको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- पिरामिड भागको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
- आयतन पत्ता लगाउनुहोस्
- पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान : यहाँ,

संयुक्त ठोसवस्तुको जम्मा उचाइ = 5.5 m

प्रिज्म भागको उचाइ (h_1) = 5 m

(क) पिरामिड भागको उचाइ (h_2) = 5.5 m - 5 मिटर = 0.5 m

(ख) ठोस वस्तुको आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 2 m

ठोस वस्तुको आधारको क्षेत्रफल (A_1) = $a^2 = (2)^2 \text{ m}^2 = 4\text{ m}^2$

(ग) पिरामिड भागको छड्के उचाइ (l) = $\sqrt{(h_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{(0.5)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} \text{ m} = \sqrt{0.25 + 1} \text{ m} = \sqrt{1.25} \text{ m}$$

(घ) ठोस वस्तुको प्रिज्म भागको आयतन (V_1) = $A_1 \times h_1 = 4 \times 5 \text{ m}^3 = 20\text{ m}^3$

ठोस वस्तुको पिरामिड भागको आयतन (V_2) = $\frac{1}{3} A_1 \times h_2 = \frac{1}{3} \times 4 \times 0.5 \text{ m}^3 = \frac{2}{3} \text{ m}^3$

ठोस वस्तुको पिरामिड भागको आयतन (V) = $V_1 + V_2 = 20\text{ m}^3 + \frac{2}{3} \text{ m}^3 = 20.67\text{ m}^3$

(ङ) आधारको परिमिति (P) = $4a = 4 \times 2 = 8\text{ m}$

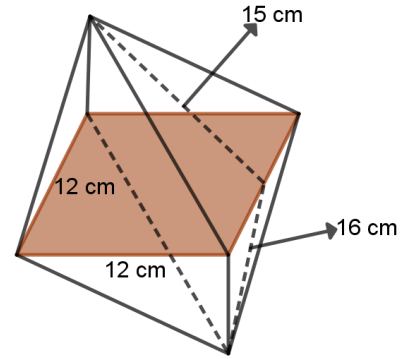
ठोस वस्तुको प्रिज्म भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A_2) = $P \times h_1 = 8 \times 5 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$

$$\begin{aligned} \text{ठोसवस्तुको प्रिज्म भागको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A}_3) &= 2al = 2 \times 2 \times \sqrt{1.25} \text{ m}^2 \\ &= 4.47\text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ठोस वस्तुको पिरामिडको पूरा सतहको क्षेत्रफल (A)} &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &= 4 + 40 + 4.47 \text{ m}^2 \\ &= 48.47\text{m}^2 \end{aligned}$$

उदाहरण 7

साभ्ना आधार वर्ग भएको एउटा ठोस क्रिस्टल दुईओटा पिरामिड मिलेर बनेको छ । उक्त क्रिस्टलको आधार भुजाको लम्बाइ 12 cm, माथि पट्टिको पिरामिड भागको छड्के उचाइ 15 cm र तल पट्टिको पिरामिड भागको छड्के उचाइ 16 cm भए,



- (क) माथि पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?
- (ख) तल पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ कति हुन्छ ?
- (ग) ठोस क्रिस्टलको पूरासतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) उक्त क्रिस्टलको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

क्रिस्टलको आधार भुजाको लम्बाइ (a) = 12 cm

माथि पट्टिको पिरामिड भागको छड्के उचाइ (l_1) = 15 cm

तल पट्टिको पिरामिड भागको छड्के उचाइ (l_2) = 16 cm

मानौं, माथि पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ = h_1 र तल पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ = h_2

(क) फेरी, सूत्रअनुसार, $(l_1)^2 = (h_1)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

अथवा, $(15)^2 = (h_1)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$

अथवा, $225 = (h_1)^2 + 36$

अथवा, $225 - 36 = (h_1)^2$

$$\text{अथवा, } 189 = (h_1)^2$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{189} = h_1$$

$$\text{अथवा, } 3\sqrt{21} = h_1$$

$$\text{अतः माथि पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ (h}_1) = 3\sqrt{21} \text{ cm}$$

$$\text{(ख) सूत्रअनुसार, } (l_1)^2 = (h_1)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } (16)^2 = (h_2)^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } 256 = (h_2)^2 + 36$$

$$\text{अथवा, } 256 - 36 = (h_2)^2$$

$$\text{अथवा, } 220 = (h_2)^2$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{220} = h_2$$

$$\text{अथवा, } 2\sqrt{55} = h_2$$

$$\text{अतः तल पट्टिको पिरामिड भागको ठाडो उचाइ (h}_2) = 2\sqrt{55} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{(ग) सूत्रअनुसार, दिइएको क्रिस्टलको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA)} &= 2a l_1 + 2a l_2 = 2a (l_1 + l_2) \\ &= 2 \times 12 (15 + 16) = 24 \times 31 \\ &= 744 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{(घ) क्रिस्टलको आयतन (V)} = \frac{1}{3} a^2 h_1 + \frac{1}{3} a^2 h_2$$

$$\text{आयतन (V)} = \frac{1}{3} a^2 (h_1 + h_2)$$

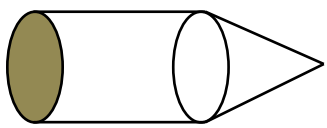
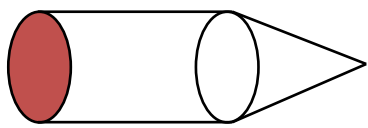
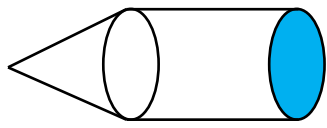
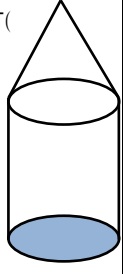
$$= \frac{1}{3} \times (12)^2 \times (3\sqrt{21} + 2\sqrt{55})$$

$$= \frac{1}{3} \times 144 \times (3\sqrt{21} + 2\sqrt{55}) = 1371.84 \text{ cm}^3$$

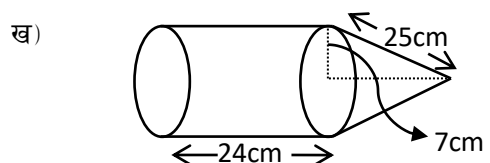
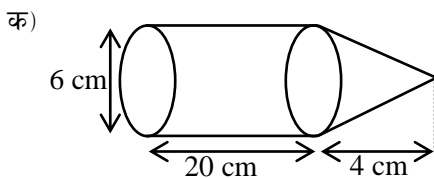
अतः किस्टलको आयतन (V) = 1371.84 cm³

अभ्यास 5.3.1

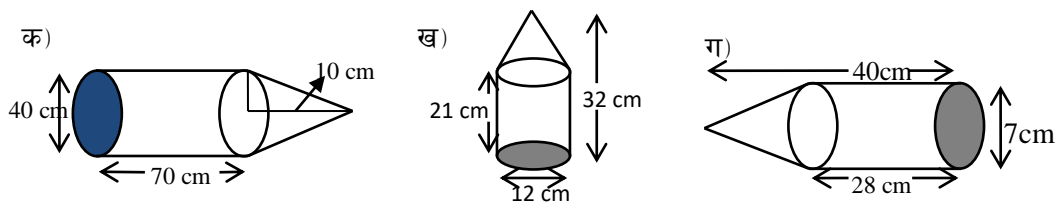
1. क) संयुक्त ठोस वस्तुहरूमा दिइएको जानकारीलाई प्रयोग गरी, सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

<p>क) ठोस वस्तुको आयतन (V_1) = 124 cm³ सोली भागको आयतन (V_2) = 42 cm³</p>  <p>बेलना भागको आयतन (V) = ?</p>	<p>ख) बेलना भागको आयतन (V_1) = 234 cm³ सोली भागको आयतन (V_2) = 135 cm³</p>  <p>ठोस वस्तुको आयतन (V) = ?</p>
<p>ग) आधारको क्षेत्रफल (A_1) = 154 cm² ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = 638 cm² बेलना भागको बक्रसतहको क्षेत्रफल (A_2) = 324 cm²</p>  <p>सोली भागको बक्रसतहको क्षेत्रफल (CSA) = ?</p>	<p>घ) आधारको क्षेत्रफल (A) = 154 cm² बेलना भागको बक्रसतहको क्षेत्रफल (A_2) = 330 cm² सोली भागको बक्रसतहको क्षेत्रफल (CSA) = 221 cm² ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल (TSA) = ?</p> 

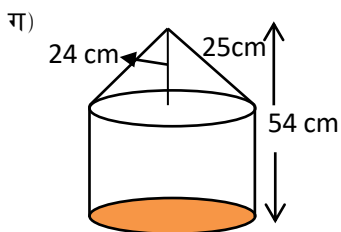
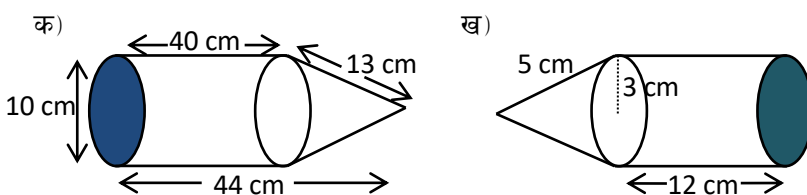
2. दिइएको नाप अनुसार संयुक्त ठोस वस्तुहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



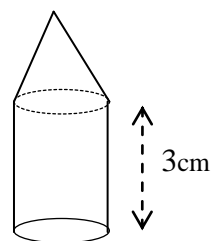
3. दिइएको नाप अनुसार संयुक्त ठोस वस्तुहरूको वक्रसतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



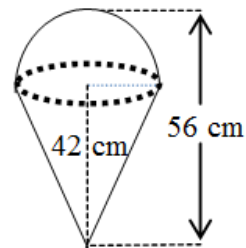
4. तल दिइएका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



5. दिइएको ठोस वस्तु सोली र वेलना मिली बनेको छ । वेलनाको आधारको क्षेत्रफल 100 cm^2 र वेलना भागको उचाइ 3 cm छ । यदि दिइएको पूरा ठोसको आयतन 500 cm^3 भए ठोस वस्तुको पूरा उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । 9 cm

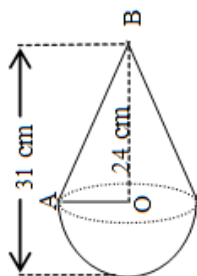


6. सँगै दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

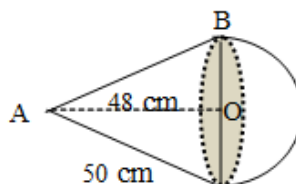


7. दिइएका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । (क) 858cm^2

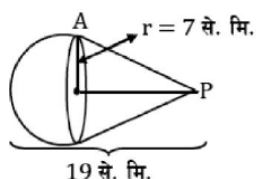
(क)



(ख)



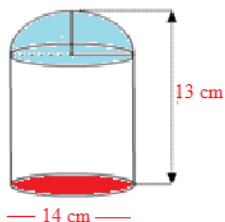
8. दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



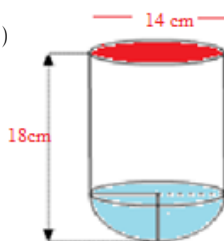
9. 14 cm अर्धव्यास भएको सोली आकारको वस्तुमा माथि पट्टिबाट वृत्त भागमा अर्धगोलाकार आकार बनाइ खेलौना तयार गरिएको छ । उक्त खेलौनाको पूरा उचाइ 49 cm भए सो खेलौनाको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुहरूको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

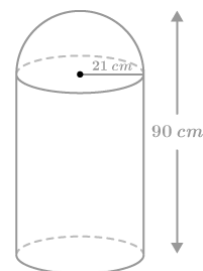
(क)



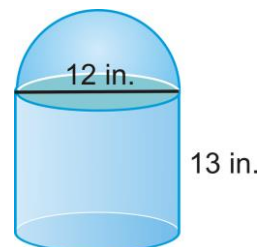
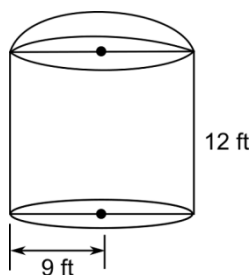
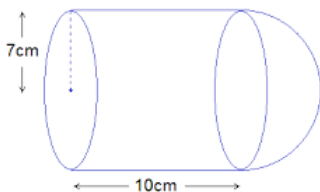
(ख)



(ग)



11. दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



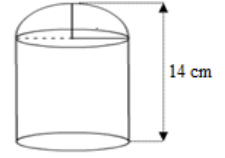
12. एउटा पानी ट्याङ्की बेलनाकार र अर्धगोलाकार भाग मिली बनेको छ । सो ट्याङ्कीको पूरा उचाइ 20 मिटर छ र आधारको क्षेत्रफल 154 वर्ग मिटर छ ।

- (क) ट्याङ्कीको आधारको अर्धव्यास कति होला ?
 (ख) सो ट्याङ्कीको बाहिरी सतहको पूरा क्षेत्रफल कति होला ?पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) सो ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ होला ?पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) यदि सो ट्याङ्कीमा प्रति लिटर 45 पैसाका दरले पानी भर्न जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

13. एउटा पानी ट्याङ्की बेलनाकार र अर्धगोलाकार भाग मिली बनेको छ । सो ट्याङ्कीको पूरा उचाइ 24 मिटर छ र आधारको क्षेत्रफल 616 वर्ग मिटर छ ।

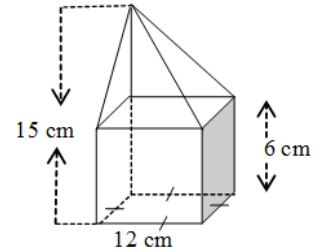
- (क) ट्याङ्कीको बेलनाकार भागको उचाइ कति होला ?
 (ख) ट्याङ्कीको आधारको व्यास कति होला ?
 (ग) सो ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी अटाउँछ होला ?पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) यदि सो ट्याङ्कीमा प्रति लिटर 65 पैसाका दरले पानी भर्न जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. दिइएको ठोस वस्तुको पूरा सतहको क्षेत्रफल र उचाइ क्रमशः 770 वर्ग से.मि. र 14 से.मि. भए बेलनाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

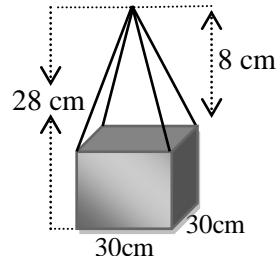
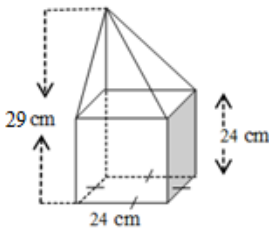


15. एउटा भुरुङ सोली र सोलीको माथि अर्धगोला मिली बनेको छ । उक्त भुरुङको पूरा उचाइ 5 cm र अर्धगोलाको आधारको व्यास 3.5 cm छ भने रङ लगाउने भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । 39.54 cm^2

16. दिइएको संयुक्त ठोस वस्तुको आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।



17. वर्ग आधार भएका संयुक्त ठोस वस्तुहरूको पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । 3504 cm^2 , 4320 cm^2

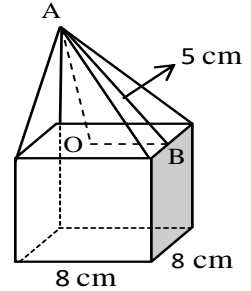


18. वर्ग आधार भएको एउटा षड्मुखकाकार ठोस वस्तुमाथि 12 से.मि. ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ । यदि उक्त षड्मुखकाकार ठोस वस्तुको आधारको क्षेत्रफल 100 वर्ग से.मि. तथा उचाइ 10 से.मि. भए उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको,

(क) पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

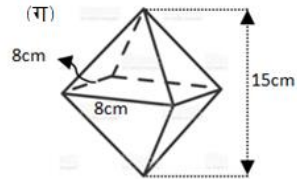
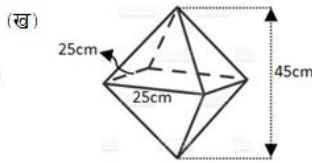
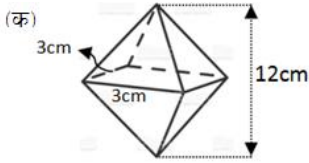
(ख) पूरासतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

19. एउटा घनाकार ठोस वस्तुमाथि 8 से.मि. ठाडो उचाइ भएको एउटा पिरामिड राखिएको छ । यदि घनको भुजाको नाप 12 से.मि. छ भने, उक्त संयुक्त ठोस वस्तुको पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

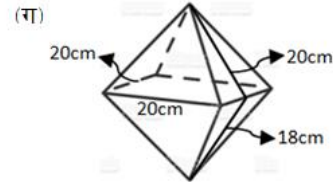
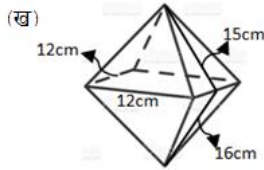
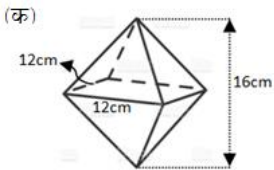


20. सँगै दिइएको ठोस वस्तुको माथिल्लो भाग पिरामिड हो यसको छड्के उचाइ 5 cm छ । तल्लो भाग एउटा वर्ग आधार प्रिज्म हो जसमा भुजाको लम्बाइ 8 cm छ । यदि ठोसको आयतन 448 cm³ भए प्रिज्म भागको उचाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. चित्रमा देखाइएका क्रिष्टलहरूका पूरा आयतन पत्ता लगाउनुहोस् ।

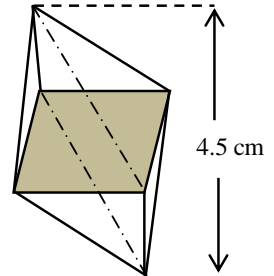


22. तल दिइएका क्रिष्टलहरूका पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



$$h_1 = h_2$$

23. चित्रमा देखाइएको क्रिष्टलको छाया पारिएको वर्गाकार भागको भुजाहरूको लम्बाइ 2.5 cm र पूरा वस्तुको उचाइ 4.5 cm छ । यदि तल र माथिका पिरामिड भागको उचाइ बराबर भए यसको आयतन र पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तर :

1. क) 82 cm^3 ख) 369 cm^2 ग) 160 cm^3 घ) 705 cm^2
2. क) 603.33 cm^3 ख) 4928 cm^3
3. क) 944.1 cm^2 ख) 1028.28 cm^2 ग) 753.5 cm^2
4. क) 1539.9 cm^2 ख) 301.71 cm^2 ग) 2024 cm^2
5. 9 cm
6. 14373.33 cm^3
7. (क) 1950.67 cm^3 (ख) 15605.33 cm^3
8. 1334.67 cm^3
9. 4738.63 cm^3
10. (क) 1642.67 cm^3 (ख) 2412.67 cm^3 (ग) $1,15,038 \text{ cm}^3$
11. (क) 902 cm^2 (ख) 1442.57 cm^2 (ग) 829.71 cm^2
12. (क) 7 cm (ख) 1034 cm^2 (ग) 2720.67 cm^3 (घ) Rs. 1224.3
13. (क) 10 cm (ख) 28 cm (ग) 11909.33 cm^3 (घ) Rs. 7741.06
14. 10 cm
15. 39.54 cm^2
16. 1296 cm^3
17. $3504 \text{ cm}^2, 4320 \text{ cm}^2$
18. $1400 \text{ cm}^3, 760 \text{ cm}^2$
19. 2112 cm^3
20. 6 cm
21. (क) 36 cm^3 (ख) 9375 cm^3 (ग) 320 cm^3
22. (क) 480 cm^2 (ख) 744 cm^2 (ग) 1520 cm^2
23. $28.125 \text{ cm}^3, 5 \frac{\sqrt{181}}{2} \text{ cm}^2$ or 33.63 cm^2

5.3.2 विभिन्न ठोस वस्तु वा ज्यामितिय आकारका गुणको प्रयोगबाट लागत अनुमान

(Cost Estimation by Using different Solid Objects or Geometrical Shape Properties)

क्रियाकलाप 1

जमीनमुनि कम्तिमा 20 हजार लिटर पानी अटाउने षड्मुखाकार ट्यांकी बनाउन कत्रो खाल्डो बनाउन पर्छ ? एक जना घरधनीले आफ्नो घरमा ट्यांकी बनाउँदाको रिपोर्ट यहाँ देखाइएको छ ।

लम्बाइ (l_1) = 3.20 meter

चौडाइ (b_1) = 3.0 meter

उचाइ (h_1) = 3.40 meter

खाल्डो खन्दा निकाल्नु पर्ने माटोको आयतन (V_1) = $l_1 \times b_1 \times h_1 = 3.20 \times 3.0 \times 3.10 \text{ m}^3$
= 29.76 m^3

अब, तयारी ट्याङ्कीको अनुमानित नाप

लम्बाइ (l_2) = 3.10 meter

चौडाइ (b_2) = 2.9 meter

उचाइ (h_2) = 3.0 meter

पानीको आयतन (V_2) = $l_2 \times b_2 \times h_2 = 3.10 \times 2.90 \times 3.0 \text{ m}^3 = 26.97 \text{ m}^3$

यसरी अनुमानित 26 हजार 9 सय 70 लिटर पानी अटाउने ट्यांकी निर्माण भयो भनेर रिपोर्ट तयार पारे । यसैगरी, तपाईंहरूले पनि तल दिइएका वा अरु फरक क्रियाकलापहरूमा अनुमानित खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) घरको कोठाहरूमा कार्पेट, चकटि वा गुन्द्रि विछ्याउन लाग्ने खर्च ।

(ख) जमिन मुनि पानी ट्यांकी बनाउन लाग्ने खर्च ।

(ग) घरको वरिपरि पर्खाल लगाउन लाग्ने खर्च ।

(घ) नयाँ बन्दै गरेको घरमा प्लाष्टर गर्न लाग्ने खर्च ।

माथिको क्रियाकलाप अध्ययन गर्दै गर्दा तपाईंहरूका मनमा केही तल सोधिएका जस्तै प्रश्नहरू उब्जिन सक्छन् ?

(क) एक घन मिटर बराबर कति लिटर हुन्छ ?

(ख) एक लिटर बराबर कति घन सेन्टिमिटर पानी हुन्छ ?

(ग) अहिलेको चलन चल्ति अनुसार ज्याला सहित उक्त ट्याङ्की निर्माण गर्न लाग्ने अनुमानित खर्च कति लाग्छ होला?

जानी राखौं

1 घन मिटर = 1000 लिटर

1 घन सेन्टिमिटर = 1 लिटर

क्रियाकलाप 2

आफ्नो घर अथवा समुदायमा भएका विभिन्न ठोस् वस्तु वा ज्यामितिय आकारका वस्तु देख्नु भएको छ । ति वस्तुहरू कुन ज्यामितीय आकारका छन् ? तिनीहरू कुनै रड लगाएका छन् त कुनै रड नलगाएका पनि छन्, किन होला ? रड लगाउन वा बनाउन अनुमानित लागत खर्च कति लाग्छ ? रड लगाएका र नलगाएका वस्तुहरूको मूल्यमा कति फरक पर्छ होला ? एउटा घर बनाइसकेपछि प्रत्येक कोठाहरूमा रड लगाउन कति खर्च लाग्छ होला ? आफ्नो टोल छिमेकमा गई तल दिइएको नाप अनुसारको कोठामा रड लगाउदा लाग्ने अनुमानित खर्च कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

लम्बाइ 12 ft चौडाइ 14 ft र उचाइ 10 ft भएको कोठामा एउटा ढोका जसको चौडाइ 3 ft र उचाइ 6.6 ft छ । कोठाको एकातिरको भित्तामा मात्रै एउटा भ्याल छ जसको साइज 6×4 ft छ । सोध्नुको क्रममा यो पनि याद गर्नुहोला,

- (क) उक्त कोठामा घरवाला मानिसले आँफुले नै रड किनेर ल्याउने हो ?
- (ख) ठेकदार वा कामदारलाई नै रड किन्ने एवं लगाउने जिम्मा दिने हो ?
- (ग) घरवाला मानिसले आँफुले नै रड किनेर ल्याउने र रड लगाउन दिने अथवा ठेकदार वा कामदारले नै रड किन्ने एवं लगाउने गर्दा खर्चमा कति फरक पर्छ ?

घर वा कोठामा रड लगाउने खर्च धेरै कुरामा भर पर्छ । जस्तै: रडको गुणस्तर, फरक कम्पनीबाट उत्पादित रडको प्रयोग, ढुवानी खर्च, व्यवसायिक पेन्टर वा सामान्य सिकारु पेन्टर आदि ।

उदाहरण 1

वर्गाकार आधार भएको ट्याङ्कीको भित्री लम्बाइ 6 m छ । सो ट्याङ्कीको भित्री उचाइ 4.5m छ भने सो ट्याङ्कीमा कति पानी अटाउँछ ? लिटरमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

वर्गाकार आधार भएको ट्याङ्कीको,

$$\text{भित्री लम्बाइ } (l) = 6 \text{ m}$$

$$\text{भित्री उचाइ } (h) = 4.5 \text{ m}$$

$$\text{ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल } (A) = l^2 = (6)^2 m^2 = 36 m^2$$

$$\text{उक्त, ट्याङ्कीको आयतन } (V) = A \times h = 36 \times 4.5 = 162 m^3$$

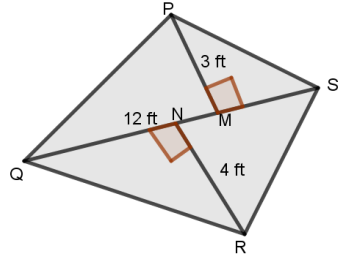
$$\text{अतः ट्याङ्कीमा अट्ने पानीको आयतन } (V) = 100 m^3$$

$$\text{फेरी, हामीलाई थाहा छ घन मिटर} = 1000 \text{ ltrs}$$

$$\therefore 162 m^3 = 162 \times 1000 \text{ ltrs} = 1,62,000 \text{ ltrs}$$

उदाहरण 2

दिइएको चित्र PQRS ले कुनै एक घरको आगन जनाउँछ । उक्त आगनमा प्रतिवर्ग ft रु. 46 का दरले प्लाष्टर गर्नुपर्ने छ ।



- क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 ख) उक्त आगनको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 ग) दिइएको दर अनुसार प्लाष्टर गर्दा जम्मा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

PQRS एउटा चतुर्भुज हो ।

$$PM = P_1 = 3 \text{ ft}$$

$$RN = P_2 = 4 \text{ ft} \text{ र विकर्ण } (QS) = d = 12 \text{ ft}$$

प्लाष्टर गर्ने दर (R) = रु.80

क) चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र $(A) = \frac{1}{2} \times d (P_1 + P_2)$

ख) ` आगनको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times 12 (3 + 4) \text{ ft}^2 = 6 \times 7 \text{ ft}^2 = 42 \text{ ft}^2$

प्लाष्टर गर्दा लाग्ने जम्मा खर्च $(T) = A \times R = 42 \times \text{रु. } 46 = \text{रु. } 3680$

उदाहरण 3

एउटा आयताकार कोठाको भित्री लम्बाइ 10 ft चौडाइ 12 ft र उचाइ 14 ft छ । उक्त कोठामा 3 ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार भ्याल छन् र दुईओटा 6 ft × 2 ft का ढोका छन् भने

- (क) चारभित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
 (ख) उक्त कोठामा रु. 300 प्रति वर्गमिटरको दरले कार्पेट विछ्याउँदा कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) ढोका र भ्याल बाहेक चार भित्ता र सिलिडमा रु. 30 प्रति वर्ग फिटको दरले रङ लगाउन कति खर्च लाग्छ ?
 (घ) बजारमा भएको महङ्गीले गर्दा रङ लगाउन प्रति वर्गमिटरमा पहिलेको भन्दा एक तिहाइले बढ्दा जम्मा खर्च कतिले वृद्धि हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

आयतकार कोठाको,

भित्री लम्बाइ(l)= 10 ft

भित्री चौडाइ(b)= 12 ft

भित्री उचाइ(h)= 14 ft

वर्गाकार भ्यालको किनाराको लम्बाइ = 3 ft, दुईओटा ढोका 6 ft × 2 ft का छन् ।

(क) चार भित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र $(A) = 2h(l+b) + lb$

(ख) कोठाको क्षेत्रफल = $l \times b = 10 \times 12$ वर्ग फिट = 120 ft^2

हामीलाई थाहा छ,

कार्पेटको क्षेत्रफल = कोठाको क्षेत्रफल = 120 ft^2

प्रति वर्गमिटरको दर (R) = रु. 300

जम्मा कार्पेट विछ्याउनु लाग्ने खर्च (T) = रु. $120 \times 300 = \text{रु. } 36,00$

(ग) दुई ओटा भ्यालको क्षेत्रफल $(A_1) = 2(6 \times 2) \text{ ft}^2 = 24 \text{ ft}^2$

दुई ओटा ढोकाको क्षेत्रफल $(A_2) = 2 \times (3)^2 \text{ ft}^2 = 18 \text{ ft}^2$

$$\begin{aligned} \text{अब, भ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ता र सिलिडको क्षेत्रफल (A)} &= 2h(l+b) + lb - A_1 - A_2 \\ &= 2 \times 14(10 + 12) + 10 \times 12 - 18 - 24 \\ &= 28 \times 22 + 120 - 42 \\ &= 694 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

चार भित्तामा प्रति वर्गमिटरको रु. 30 को दरले रङ लगाउँदा

जम्मा खर्च = रु. $694 \times 30 = \text{रु. } 20,820$

(घ) प्रति वर्ग मिटरमा एक तिहाइले बढ्दा नयाँ दर = रु. $30 + \frac{1}{3} \times \text{रु. } 30 = \text{रु. } 40$

प्रति वर्ग मिटरमा एक तिहाइले बढ्दा, जम्मा खर्च = रु. $40 \times 694 \text{ ft}^2 = \text{रु. } 27,760$

खर्चमा भएको वृद्धि = रु. $27,760 - \text{रु. } 21,450 = \text{रु. } 6,940$

अतः रु. 6,940 ले खर्चमा वृद्धि हुन्छ ।

उदाहरण 4

एउटा रंगशालाको गेटका चार ओटै सतह देखिने 8 ft अग्ला दुई ओटा पिलरहरू माथि उही आधारका एक एक ओटा 4 ft उचाइ भएका पिरामिडहरू राखिएका छन् । प्रत्येक पिलरको आधार 6 ft × 6 ft छ भने

(क) प्रश्नअनुसारका दुई ओटा चित्रहरू बनाउनुहोस् ।

(ख) पिरामिडको छड्के उचाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ग) दुईओटा पिरामिड सहितको पिलरहरूमा रड लगाउन मिल्ने पूरा सतहको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? के पूरा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन आधारको क्षेत्रफल जोड्नु पर्छ वा पर्दैन ? कारण सहित लेख्नुहोस् ।
- (घ) उक्त पिरामिड सहितको पिलरहरूमा प्रति वर्ग फिट रु. 96 का दरले रड लगाउँदा जम्मा कति खर्च लाग्छ ?

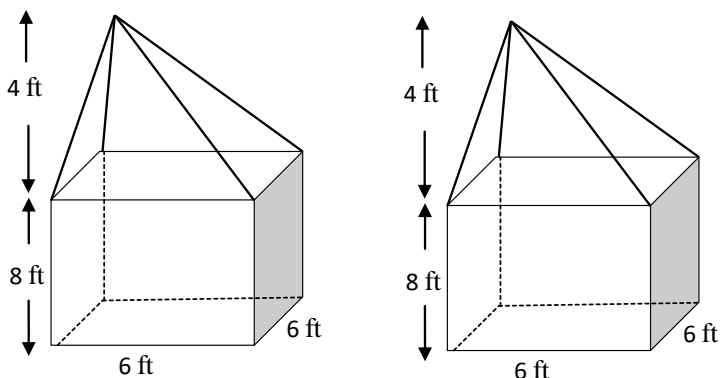
समाधान : यहाँ

प्रिज्म भागको उचाइ (h_1) = 8 ft

पिरामिड भागको उचाइ (h_2) = 4 ft

पिलरको आधार वर्ग भएकोले, आधारको लम्बाइ (a) = 6 ft

(क)



(ख) हामीलाई थाहा छ,

$$\text{पिरामिडको छड्के उचाइ } (l) = \sqrt{(h_2)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{(4)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ ft}$$

(ग) फेरी, प्रिज्मको छड्के सतहको क्षेत्रफल (A_1) = आधारको परिधि (P) \times उचाइ (h_1)

$$= 4a \times 8 \text{ ft}$$

$$= 4 \times 6 \times 8 \text{ ft}^2 = 192 \text{ ft}^2$$

$$\text{पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल } (A_2) = 2al = 2 \times 6 \times 5 \text{ ft}^2 = 60 \text{ ft}^2$$

त्यसैले, पिरामिड सहितको एउटा पिलरको पूरा सतहको क्षेत्रफल = $A_1 + A_2$

$$= (192 + 60) \text{ ft}^2 = 252 \text{ ft}^2$$

$$\text{पिरामिड सहितको दुईओटा पिलरको पूरा सतहको क्षेत्रफल} = 2 \times 252 \text{ ft}^2 = 504 \text{ ft}^2$$

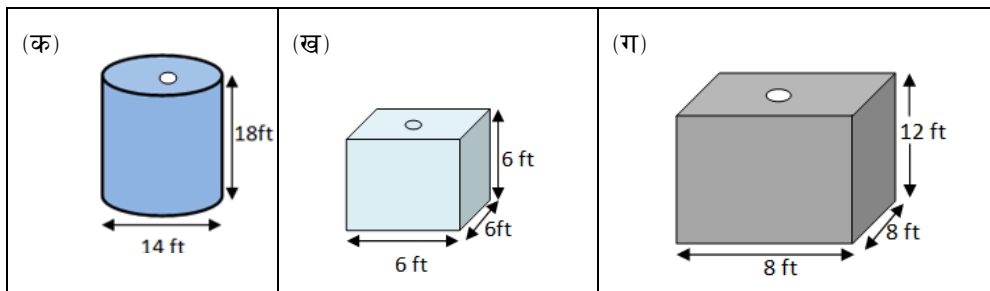
प्रश्नअनुसार, पिलरको आधार जमिनमुनि भएकोले यहाँ रड लगाइँदैन त्यसैले आधारको क्षेत्रफल पूरा सतहको क्षेत्रफलमा जोडिँदैन ।

(घ) रड लगाउने दर (R) = रु. 95 प्रति ft^2

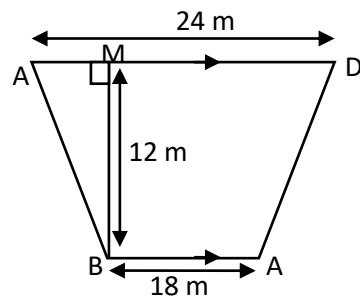
रड लगाउने जम्मा खर्च (T) = $A \times R = 504 \times \text{रु. } 95 = \text{रु. } 47,880$

अभ्यास 5.4.1

1. तल दिइएका ट्याङ्कीहरूमा बढीमा कति लिटर पानी अटाउन सक्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



2. एउटा घरको बाहिर पट्टि भएको खाली जग्गा चित्रमा देखाइएको छ । जसमा $AD = 24 \text{ m}$, $AB = 18 \text{ m}$ र $BM = 12 \text{ m}$ भए

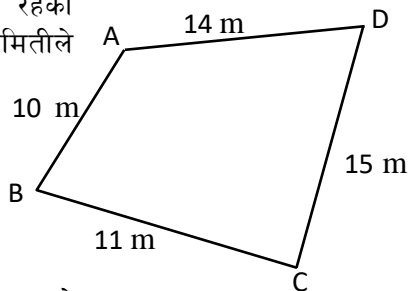


(क) यदि ABCD समलम्ब चतुर्भुज भए यसको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

(ख) सो जग्गाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) प्रति वर्ग मिटर रु.120 को दरले दुवो रोपन जम्मा खर्च कति लाग्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. दिइएको चित्रले बन्दै गरेको एउटा मन्दिरको दाँयातिर रहेको बगैँचाको भागलाइ जनाउँछ । मन्दिर व्यवस्थापन समितिले सुरक्षाको हिसाबले यसमा 5 फन्को काँडेतार लगाउने निर्णय गर्‍यो । एक मिटर काँडेतारको रु. 80 पर्छ । प्रतिदिन एक जनाको रु.1500 का दरले, 3 जना कामदारलाइ सो काम सिध्याउन 2 दिन लाग्छ भने,



(क) उक्त जग्गाको परिमिती पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) 5 फन्को लगाउन कति काँडेतार चाहिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त कम्पाउण्डमा 5 फन्को काँडेतार लगाउन जम्मा खर्च कति लाग्छ ? गणना गर्नुहोस् ।

4. लम्बाइ 9 ft, चौडाइ 9 ft र 9 उचाइ ft भएको एउटा कोठा छ । उक्त कोठामा 2 ft किनारा भएका दुईओटा वर्गाकार भ्याल र दुइओटा 5 ft \times 3 ft भएका ढोका छन् भने,

(क) भुईँको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) भ्याल र ढोकाबाहेक चार भित्ताको क्षेत्रफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) प्रति वर्गमिटरको रु.350 का दरले चारओटै भित्तामा प्लाष्टर गर्दा जम्मा कति रकम आवश्यक पर्दछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) यदि लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ प्रत्येकमा 1 ft ले बढी भएको अर्को कोठामा रु. 340 का दरले चारओटै भित्तामा प्लाष्टर गर्दा प्रश्न नं (ग) मा लाग्ने खर्च भन्दा कतिले बढी वा घटी लाग्छ ? गणना गर्नुहोस् ।
5. एउटा इनारमा 3.5 ft व्यास तथा 1 ft उचाइ भएका 60 ओटा सिमेन्टबाट बनेका चक्का राखिएका छन् । यदि सो इनार बनाउन प्रति चक्काको मूल्य रु.1200 पर्छ । 2 जना कामदारले प्रतिदिन रु.1500 का दरले जम्मा 12 दिनमा सो इनार तयार बनाउन सक्छन् भने, (1 cubic foot = 28.317 liters)
- (क) चक्काको मात्र तिर्न पर्ने रकम कति हुन्छ ?
- (ख) इनार खन्न जम्मा खर्च कति लाग्छ ?
- (ग) उक्त इनारमा अधिकतम कति लिटर पानी अटाउँछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) यदि उक्त इनारको 35 चक्का सम्म पानी छ भने इनारमा कति लिटर पानी रहेछ ? इनारको भर्नको लागि कति लिटर पानी चाहिन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. एउटा घरको गेटका चारओटै सतह देखिने 10 ft अग्ला दुईओटा पिलरहरू माथि उही आधारका एक एक ओटा 5 ft उचाइ भएका पिरामिडहरू राखिएका छन् । प्रत्येक पिलरका आधारहरू वर्गाकार छन् र जसको लम्बाइ 5 ft छ ।
- (क) प्रश्नअनुसार दिइएको जानकारीलाई चित्र बनाइ देखाउनुहोस् ।
- (ख) पिरामिडको छड्के उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) उक्त पिरामिड सहितको पिलरहरूमा प्रति वर्गफिट रु. 94 का दरले रङ लगाउँदा जम्मा खर्च कति लाग्छ ?
7. एउटा घरको कम्पाउण्डको गेटका दुईओटा पिलरहरू र पिलरमाथि उही आधारका एक एक ओटा पिरामिडहरू राखिएका छन् । 6 ft अग्लो पिलरमाथि 1 ft उचाइ भएका पिरामिडहरू छन् । प्रत्येक पिलरका आधार वर्गाकार छन् र आधारको लम्बाइ 1 ft छ ।
- (क) प्रश्नअनुसार दिइएको जानकारीलाई चित्र बनाइ देखाउनुहोस् ।
- (ख) वर्गाकार आधार भएको पिरामिडको छड्के सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- (ग) पिरामिड भागको छड्के उचाइ कति हुन्छ ?
- (घ) उक्त पिरामिड सहितको पिलरहरूमा टायल लगाउँदा जम्मा खर्च रु.2729 लाग्छ भने, प्रति वर्गफिटमा कतिका दरले टायल लगाउन सकिन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा नर्सरीमा आकाशे पानी जम्मा गर्न 2.80 m भित्रि व्यास र 3 m उचाइ भएको वेलनाकार ट्याङ्की निर्माण गरिएको छ । यदि उक्त ट्याङ्कीको माथिल्लो भाग 0.72 m ठाडो उचाइ भएको सोली आकारमा छ ।
- क) वेलना र अर्धगोलाको आयतन पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।
- ख) सो ट्याङ्कीमा बढीमा कति लिटर पानी अटाउन सकिनेला ?
- ग) खडेरी परेको समयमा प्रति लिटर रु.1.85 को दरले सो ट्याङ्की भर्न कति खर्च लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. बराबर साइजका 8 ओटा त्रिभुजाकार कपडाका टुक्राहरू मिलेर एउटा सोली आकारको टेन्ट निर्माण गरिएको छ । एउटा त्रिभुजाकार टुक्राको तीन ओटा भुजाहरूको लम्बाइ 5 m, 6 m र 6 m छन् ।
- क) एक टुक्रा कपडाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- ख) टेन्ट बनाउन चाहिने आवश्यक कपडाको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- ग) प्रतिवर्ग मिटर कपडाको मूल्य रु.600 भए उक्त टेन्ट बनाउन जम्मा खर्च कति लाग्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

- 1 क) 2,000 lits. ख) 60000 lits ग) 1540000 lits
- 2 क) 88ft^2 ख) 397 (कम्तिमा) ग) रु. 13,552
- 3 क) 50 m ख) 250 m ग) रु. 29,000
4. क) 81ft^2 ख) 286ft^2 ग) रु. 1,13,400 घ) रु. 22, 600
5. क) रु. 72,000 ख) रु. 1,08,000 ग) 16,353. 0675 liters घ) 9,539.28 liters
6. ख) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ft. ग) रु. 48,109.51 7. ख) 2al ग) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ft. घ) रु. 104.01
8. ख) 15523.2 liters ग) रु. 28,717.92
9. क) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m² ख) $10\sqrt{119}$ m² ग) रु. 65,452.27

अनुक्रम र श्रेणी (Sequence and Series)

6.1 आधारभूत अवधारणा (Fundamental Concepts)

तलका सङ्ख्याहरूबाट बनेका ढाँचाहरूको अवलोकन गर्नुहोस् ।

2, 4, 6, 8, 10,.....

1, 4, 9, 16, 25,.....

2, 4, 8, 16, 32, 64,

माथिका सङ्ख्याहरूका ढाँचाहरूको अवलोकन गर्दा, 2, 4, 6, 8, 10,मा पहिलो पछि दोस्रो दोस्रो पछि तेस्रो र तेस्रो पछि चौथो क्रमशः दुई दुईले अगाडि बढेको छ, अब तपाईंले 10 पछि कति आउँछ, भन्न सक्नुहुन्छ ।

त्यस्तै 1, 4, 9, 16, 25,मा हेर्यो भने 1 पछि 4 पछि 9 पछि 16 र 16 पछि 25 छ । यसमा सबै सङ्ख्याहरू वर्ग सङ्ख्याहरू छन् 1 को वर्ग 1, 2 को वर्ग 4; 3 को वर्ग 9; 4 को वर्ग 16 ;5 को वर्ग 25 यसरी नै अगाडि बढेको छ, अब 25 पछि कति आउँछ, होला ? अनुमान गर्नुहोस् र लेख्नुहोस् ।

फेरी 2, 2, 4, 8, 16, 32, 64,मा हेर्दा 2 पछि 4; 4 पछि 8; 8 पछि 16 गर्दै अगाडि बढेको छ अर्थात् यसमा दोस्रो सङ्ख्या पहिलोको दोब्बर छ, तेस्रो सङ्ख्या दोस्रो सङ्ख्याको दोब्बर छ, चौथो सङ्ख्या तेस्रो सङ्ख्याको दोब्बर छ, अब त 32 पछि कति आउँछ, होला अनुमान गरी लेख्नुहोस् ।

यसरी यी माथिका उदाहरणहरूमा सङ्ख्याहरू निश्चित नियम (rule) अनुसार अगाडि बढेका पाइन्छ । यसरी कुनै निश्चित rule अनुसार बनेका सङ्ख्याहरूको समूहलाई हामीले अनुक्रम भन्छौं ।

उदाहरण 1

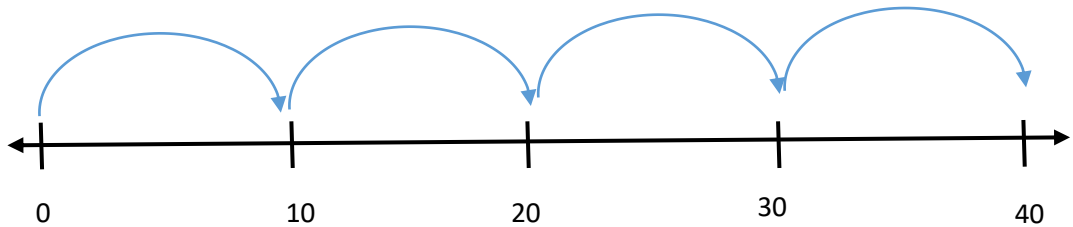
एउटा भ्यागुतो एकपटकमा 10 cm पार गर्नेगरी उफ्रन्छ भने चार पटक उफ्रियो भने कति सेमी टाढा पुग्छ होला ?

समाधान

यसमा शून्यबाट सुरु गरेर पहिलो पटकमा 10 मा पुग्यो दास्रो पटकमा 10 बाट सुरु गरेर 20 मा पुग्यो । तेस्रो पटकमा 20 बाट सुरु गरेर 30 मा पुग्यो चौथोपटकमा 30 बाट सुरु गरेर 40 मा पुग्यो ।

उक्त भ्यागुतो चौथोपटक उफ्रेर 40 cm दुरी पार गर्‍यो ।

यसलाई सङ्ख्या रेखामा देखाउँदा,



उदाहरण 2

मानौ चार जना विद्यार्थीहरू लाइनमा उभिएका छन् । यदि दोस्रो विद्यार्थीले पहिलो विद्यार्थीले भनेको अङ्कको तेब्बर सङ्ख्या भन्नु पर्दछ र त्यसैगरी तस्रोले दोस्रोले भनेको तेब्बर भन्नु पर्छ भन, पहिलो विद्यार्थीले 2 भन्यो भने चौथो विद्यार्थीले कति सङ्ख्या भन्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ, पहिलो विद्यार्थीले 2 भन्दै गर्दा दोस्रो विद्यार्थीले त्यसको तीन गुना भन्नुपर्यो । तसर्थ, दुईको तीनगुणा बराबर 6 भयो । फेरी, दोस्रोले भनेको सङ्ख्याको तेस्रोले तेब्बर भन्नुपर्छ, 6 को तेब्बर 18 भयो र चौथो विद्यार्थीले तेस्रो विद्यार्थीको तेब्बर गर्नुपर्ने भएकोले चौथो विद्यार्थीले 18 को तेब्बर बराबर $18 \times 3 = 54$ भयो । तसर्थ, चौथो विद्यार्थीले 54 भन्नुपर्ने हुन्छ ।

यसरी कुनैपनि सङ्ख्याहरू निश्चित ढाँचामा रहेका छन् अर्थात् पहिलो सङ्ख्या र दोस्रो सङ्ख्याको सम्बन्ध र दोस्रो र तेस्रो सङ्ख्याको सम्बन्धमा एकरूपता छ भने त्यस्तो ढाँचामा रहेका सङ्ख्याहरूलाई हामी अनुक्रममा रहेका सङ्ख्याहरू भन्छौं ।

अब हामी समानान्तरिय र गुणोत्तर ज्यामितीय अनुक्रमको बारेमा छलफल गर्ने छौं ।

एउटा उदाहरणबाट सुरु गरौं ।

यहाँ, 3 बाट सुरु भएर प्रत्येक पटकमा 3 गणना गर्दै जाँदा दोस्रोपटक 6 हुन्छ तेस्रो पटकमा 9 हुन्छ चौथोपटकमा 12 हुन्छ पाँचौं पटकमा 15 हुन्छ र यसरी बढ्दै जान्छ अर्थात् पछाडी सङ्ख्याबाट अगाडीको सङ्ख्याको फरक सधैं एउटै अर्थात् 3 हुन्छ । यसरी दुईटा सँगैका सङ्ख्याहरूको फरक समान हुन्छ भने त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई समानान्तरिय अनुक्रममा भएका सङ्ख्याहरू भनिन्छ ।

उदाहरणका लागि 9, 12, 15, 18, 21, ... ले समानान्तरिय अनुक्रम जनाउँदछ । जसमा 9 लाई पहिलो पद भनिन्छ भने दुई क्रमिक सङ्ख्याहरूको फरक जस्तै $12 - 9 = 3$, $15 - 12 = 3$, गर्दै जाँदा, 3 आउँछ जसलाई साभ्का फरक अंग्रेजीमा common difference भनिन्छ र यसलाई d ले जनाइन्छ ।

तसर्थ यदि $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n, \dots$ समानान्तरिय अनुक्रम भएमा साभ्का फरक $d = t_n - t_{n-1}$ हुन्छ ।

दिइएको अनुक्रममा पहिलो पद र साभ्का फरक कति छ ? 5, 10, 15, 20, 25,

फेरी, पहिलो सङ्ख्या 2 दोस्रो सङ्ख्या 4 तेस्रो सङ्ख्या 8 चौथो सङ्ख्या 16 पाँचौं सङ्ख्या 32 गर्दै एउटा अनुक्रम तयार भएको छ भने यसमा कुनै दुई दुईओटा सँग सँगैका सङ्ख्याहरूको अनुपात अर्थात् पछाडीको सङ्ख्यालाई अगाडीको सङ्ख्याले भाग गर्दा सधैं समान आउँछ । यसलाई हामी साभ्का अनुपात अंग्रेजीमा common ratio भन्छौं र यसलाई r ले जनाइन्छ भने यसरी बनेको अनुक्रमलाई ज्यामितीय अनुक्रम geometric sequence भन्छौं ।

अर्थात् 2, 4, 8, 16,

गुणोत्तर अनुक्रम हो ।
जसमा पहिलो पद 2 र साभ्का अनुपात $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{8}{4} = 2$; $\frac{16}{8} = 2$ हुन्छ ।

तसर्थ यदि $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n, \dots$ गुणोत्तर अनुक्रम भएमा साभ्का फरक $(r) = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ हुन्छ ।

6.2 समानान्तरिय अनुक्रमको साधारण पद (General term of Arithmetic Sequence)

मानौं, 3, 6, 9, 12, 15, 18, एउटा समानान्तरिय अनुक्रम दिइएको छ ।

यसमा पहिलो पद $(a) = 3$ र साभ्का फरक $(d) = 3$ छ ।

दोस्रो पद $= 6 = 3 + 3 = 3 + 1 \times 3 = a + (2 - 1) d$

तेस्रो पद $= 9 = 3 + 6 = 3 + 2 \times 3 = a + (3 - 1) d$

चौथो पद $= 12 = 3 + 9 = 3 + 3 \times 3 = a + (4 - 1) d$

यसैगरी पदहरू लेख्दै जाँदा, पाँचौ पद $= a + (5 - 1) d$, छैटौ पद $= a + (6 - 1) d$, इत्यादि हुन्छ ।

अतः n औं पद $(t_n) = a + (n - 1) d$ हुन्छ ।

असर्थ, साधारण पद $(t_n) = a + (n - 1) d$ भयो ।

उदाहरण 3

दिइएको अनुक्रमको साधारण पद लेख्नुहोस् ।

7, 9, 13, 17, 21, ...

समाधान

यहाँ दिइएको अनुक्रम 7, 9, 13, 17, 21, ...

पहिलो पद $(a) = 7$

साभ्का फरक $(d) = 9 - 7 = 13 - 9 = 4$

साधारण पद $(t_n) = 7 + (n - 1) 4 = 7 + 4n - 4 = 3 + 4n$

6.3 गुणोत्तर अनुक्रमको साधारण पद (General term of Geometric Sequence)

मानौं, 5, 10, 20, 40, 80, 160, एउटा गुणोत्तर अनुक्रम दिइएको छ ।

यसमा पहिलो पद $(a) = 5$ र साभ्का अनुपात $(r) = 2$ छ ।

दोस्रो पद $= 10 = 5 \times 2 = 5 \times 2^1 = a r^{2-1}$

तेस्रो पद $= 20 = 5 \times 4 = 5 \times 2^2 = a r^{3-1}$

चौथो पद $= 40 = 5 \times 8 = 5 \times 2^3 = a r^{4-1}$ भयो ।

यसैगरी पदहरू लेख्दै जाँदा, पाँचौ पद $= a r^{5-1}$, छैटौ पद $= a r^{6-1}$, इत्यादि हुन्छ ।

अतः n औं पद $(t_n) = a r^{n-1}$ हुन्छ ।

असर्थ, साधारण पद $(t_n) = a r^{n-1}$ भयो ।

उदाहरण 4

दिइएको अनुक्रमको साधारण पद लेख्नुहोस् ।

6, 12, 24, ...

समाधान

यहाँ दिइएको अनुक्रम 6, 12, 24, ...

पहिलो पद (a) = 6

साभ्का अनुपात (r) = 12/6 = 24/12 = 2

साधारण पद (t_n) = arⁿ⁻¹ = 6.2ⁿ⁻¹ = 6. 2ⁿ. 2⁻¹ = 6/2. 2ⁿ = 3. 2ⁿ

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- तल दिइएका अनुक्रममा d अथवा r को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(a) 1, 2, 3, 4, ... (b) 2, 5, 8, 11, ... (c) 5, 10, 20, 40, ...
(d) 1, 2, 4, 8, 16, ... (e) 22, 18, 14, ... (f) -8, -2, -1/2, -1/8, ...
- तल दिइएका अनुक्रममा थप दुई पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् :
(a) 1, 2, 3, 4, ... (b) 2, 4, 6, 8, 10, ... (c) 5, 10, 15, 20, 25, ...
(d) 1, 2, 4, 8, 16, ... (e) 22, 20, 18, 16, 14, ... (f) -8, -6, -4, ...
- निम्न लिखित अनुक्रमहरूको साधारण पद (t_n) पत्ता लगाउनुहोस्
(a) 4, 6, 8, 10, ... (b) 7, 11, 15, 19, 23, ... (c) 2, 6, 10, 14, 18, ... (d) 25, 22, 19, 16, ...
(e) 6, 12, 24, ... (f) 5, 25, 125, 625, ... (g) 12, 48, 192 ... (h) 9, 27, 81, ...

उत्तर :

- a) 1 b) 3 c) 2 d) 2 e) -4 f) -4 2. a) 5, 6 b) 12, 14 c) 30, 35 d) 32, 64
e) 12, 10 f) -2, 0
- a) 2n + 2 b) 3 + 4n c) 4n - 2 d) 28 - 3n e) 2. 3ⁿ f) 5ⁿ g) 3. 4ⁿ h) 3.3ⁿ

6.4 श्रेणी (Series)

कुनैपनि अनुक्रम अर्थात् समानान्तरीय अनुक्रम अथवा गुणोत्तर अनुक्रम वा अन्य नियममा भएका अनुक्रमका सङ्ख्याहरूलाई जोडेर अर्थात् सङ्ख्याहरूको बिचमा + सङ्केत राखेर तयार भएको गणितीय संरचनालाई श्रेणी अर्थात् अङ्ग्रेजीमा series भनिन्छ । जस्तै :

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, लाई अनुक्रम भनिन्छ भने

4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + 28, ... लाई श्रेणी series भनिन्छ ।

उदाहरण 1

यदि साधारण पद (t_n) = 2n + 3 भएको अनुक्रमको

(क) पहिलो पाँचओटा पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) यी पाँचओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त श्रेणीलाई \sum चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।

समाधान

- (क) यहाँ साधारण पद $(t_n) = 2n + 3$ मा n को मान क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 राख्दा,
 $t_1 = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$ $t_2 = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$
 $t_3 = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$ $t_4 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$
 $t_5 = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$

(ख) $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 45$

- (ग) उक्त श्रेणीलाई \sum चिह्न प्रयोग गरी लेख्दा $\sum_{n=1}^5 2n + 3$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि साधारण पद $(t_n) = 3 \times 2^n$ भएको अनुक्रमको

- (क) पहिलो पाँचओटा पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) यी पाँचओटा पदको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) उक्त श्रेणीलाई \sum चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।

समाधान

- (क) यहाँ साधारण पद $(t_n) = 3 \times 2^n$ मा n को मान क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5 राख्दा,
 $t_1 = 3 \times 2^1 = 3 \times 2 = 6$ $t_2 = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$
 $t_3 = 3 \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$ $t_4 = 3 \times 2^4 = 3 \times 16 = 48$
 $t_5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$

(ख) $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 6 + 12 + 24 + 48 + 96 = 186$

- (ग) उक्त श्रेणीलाई \sum चिह्न प्रयोग गरी लेख्दा $\sum_{n=1}^5 3 \times 2^n$ हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. तल दिइएका साधारण पदहरूबाट

- (क) पहिलो 5 ओटा पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् र ती पदलाई अनुक्रमका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् । 'n' ले प्राकृतिक सङ्ख्यालाई जनाउँछ ।
(ख) तिनीहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ग) उक्त श्रेणीलाई \sum चिह्न प्रयोग गरी लेख्नुहोस् ।

(a) $t_n = 2n + 4$

(b) $t_n = 3n - 1$

(c) $t_n = 3n$

(d) $t_n = n^2 - 1$

(e) $t_n = 2 \times 3^n$

(f) $t_n = 5 \times 2^n$

(g) $t_n = \frac{5}{2} \times 2^n$

(h) $\frac{1}{5} \times 5$

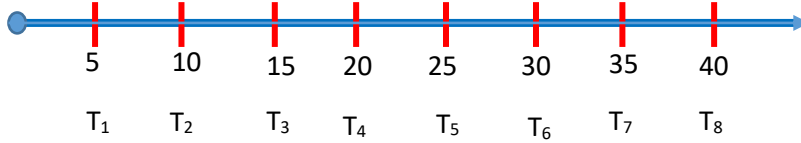
6.5 समानान्तरिय अनुक्रम र श्रेणीको मध्यमान (Means of Arithmetic Sequence and Series)

कुनै दुई सङ्ख्याको औसत वा मध्यक कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? उदाहरणको लागि, 100 र 200 को औसत 150 हो । यहाँ, 100 र 200 को बिचको मध्यक 150 लाई x मान्दा, हामीले x को वास्तविक मान 100, x , 200 को रूपबाट लेख्न सिक्दछौं ।

यदि अङ्कहरू a , x , b ले समानान्तरिय अनुक्रम बनाउँछ भने, $x - a = b - x$ हुन्छ र त्यसबाट $x = \frac{a+b}{2}$ प्राप्त गर्न सकिन्छ ।

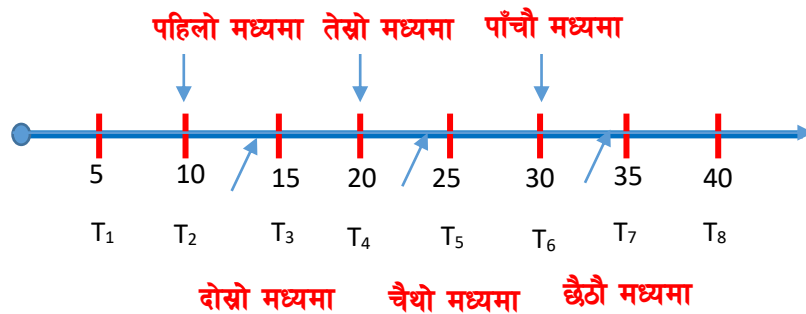
क्रियाकलाप १

क) एउटा अनुक्रम 5,10,15,20,25,30,35,40 लिएको छ । जसको फरक समान 5 छ । यहाँ 5 र 40 को बिचमा 6 ओटा पदहरू छन् । समानान्तरिय मध्यमानहरू छन् । त्यसका आधारमा तलको निष्कर्षको अवलोकन गर्नुहोस् ।



- 5 र 15 को बिचमा 10 पर्छ । त्यसैले $10 = \frac{5+15}{2}$ हु अर्थात $T_2 = \frac{T_1+T_3}{2}$ छ ।
- 10 र 20 को बिचमा 15 पर्छ । त्यसैले $15 = \frac{10+20}{2}$
- 15 र 25 को बिचमा 20 पर्छ । त्यसैले $20 = \frac{15+25}{2}$
- 20 र 30 को बिचमा 25 पर्छ । त्यसैले $25 = \frac{20+30}{2}$ अर्थात $T_5 = \frac{T_4+T_6}{2}$ हुन्छ ।
- 25 र 35 को बिचमा 30 पर्छ । त्यसैले $30 = \frac{25+35}{2}$
- 30 र 40 को बिचमा 35 पर्छ । त्यसैले $35 = \frac{30+40}{2}$

माथिको उदाहरणमा भएको अनुक्रममा जम्मा 8 ओटा पद छन् र 5 र 40 वा बिचमा जम्मा 6 ओटा मध्यमान भए । यहाँबाट हामी के सामान्यीकरण गर्न सक्छौं भने कुनै अनुक्रमका n ओटा पद भएमा पहिलो पद र n औं पदका बिचमा $n-2$ ओटा मध्यमान हुन्छन् ।



तलको समानान्तरिय अनुक्रममा मध्यमाहरू कुन कुन हुन् ? लेख्नुहोस् ।

(i) 10, 20, 30, 40

(ii) 2, 6, 10, 14, 18, 22

समानान्तरिय अनुक्रमका पहिलो र अन्तिम पदहरूका बिचमा रहेका पद वा पदहरूलाई समानान्तरिय मध्यमा (Arithmetic Mean) भनिन्छ। समानान्तरिय मध्यमाहरूलाई A.M. ले जनाइन्छ।

उदाहरण 1

दुई सङ्ख्या हरू 7 र 17 बिचको एउटा समानान्तरिय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ दुई ओटा मात्र पद भएकोले

पहिलो पद (a) = 7

दोस्रो पद (b) = 17

मध्यमान (m) = ?

$$\text{सूत्रअनुसार, मध्यमान } (m) = \frac{a+b}{2} = \frac{7+17}{2}$$

$$= 12$$

क्रियाकलाप ३

दुई ओटा पदहरूको बिचमा n ओटा समानान्तरिय मध्यमाहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौं, दुई पदहरू a र b का बिचमा पर्ने n ओटा मध्यमाहरू $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ छन्।

यहाँ, a, $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n, b$ समानान्तरिय अनुक्रमका रूपमा हुन्छन्।

पहिलो पद (t_1) = a अन्तिम पद (t_n) = b, मध्यमा सङ्ख्या = n र जम्मा पद सङ्ख्या = n + 2

हामीलाई थाहा छ,

$$\text{अन्तिम पद } (t_n) = a + (n - 1) \cdot d$$

$$\text{अथवा, } b = a + (n + 2 - 1) \cdot d$$

$$\text{अथवा, } b - a = (n + 1) \cdot d$$

$$\therefore d = \frac{b-a}{n+1}$$

अब, पहिलो मध्यमा (m_1) = दोस्रो पद (t_2) = a + d

$$\therefore (m_1) = a + d \quad \text{or, } a + \frac{b-a}{n+1}$$

दोस्रो मध्यमा (m_2) = तेस्रो पद (t_3) = a + 2d

$$\therefore (m_2) = a + 2d \quad \text{or, } a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

तेस्रो मध्यमा (m_3) = चौथो पद (t_4) = a + 3d

$$\therefore (m_3) = a + 3d \quad \text{or, } a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

.....

र, अन्तिम मध्यमा $(m_n) = (n + 1)$ औं पद $(t_{n+1}) = a + nd$

$$\therefore (m_n) = a + nd, \text{ जहाँ } d = \frac{b-a}{n+1}. \quad \text{or, } a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

उदाहरण 2

दुई ओटा पदहरू 3 र 23 का बिचमा 3 ओटा समानान्तरीय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 3$, अन्तिम पद $(b) = 23$ र मध्यमा सङ्ख्या $(n) = 3$

$$\text{त्यसैले, समान अन्तर } d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{23-3}{3+1} = 5$$

अब, तीन ओटा मध्यमाहरू क्रमश m_1, m_2 र m_3 मानौं ।

$$\text{तसर्थ, } m_1 = a + d = 3 + 5 = 8$$

$$m_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 5 = 13$$

$$m_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 5 = 18$$

अतः 3 र 23 को बिचका 3 मध्यमाहरू 8, 13 र 18 हुन् ।

अतः 3 र 43 को बिचका 7 मध्यमाहरू 8, 13, 18, 23, 28, 33 र 38 हुन् ।

6.6 समानान्तरीय श्रेणीको योगफल (sum of arithmetic series)

एउटा समानान्तरीय श्रेणीमा

मानौं,

सुरुको मान = a , अन्तिम मान = l , समान अन्तर = d र जम्मा पद सङ्ख्या = n मान्दा,

पहिलो n ओटा पदहरूको योगफल

$$(S_n) = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l \dots \dots \text{(i)}$$

समीकरण (i) लाई विपरीत क्रममा राख्दा,

$$(S_n) = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 3d) + (a + 2d) + (a + d) + a \dots \dots \text{(ii)}$$

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा,

$$2S_n = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots + (a+l)$$

$$\text{Or, } 2S_n = n \times (a + l)$$

$$\text{Or, } S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

हामीलाई थाहा छ, अन्तिम पद $(l) = a + (n-1) \times d$ हुन्छ ।

त्यसैले,

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l) = \frac{n}{2} [a + \{a + (n-1) \times d\}] = \frac{n}{2} \{2a + (n-1) \times d\}$$

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1) \times d\}$$

उदाहरणका लागि मानौं,

सुरुको मान $(a) = 800$, समान अन्तर $(d) = 200$ र जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = 14$ भए

पहिलो 14 ओटा पदहरूको योगफल

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1).d\} = \frac{14}{2} \{2 \times 800 + (14-1).200\} = 7 \times (1600 + 2600) = 29400.$$

तसर्थ, 14 ओटा पदहरूको योगफल . 29400 हुन्छ ।

पहिलो n ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल (Sum of the first n natural numbers)

यहाँ पदहरू 1, 2, 3, 4, ..., n पहिलो n ओटा प्राकृतिक सङ्ख्या हरू हुन् ।

यो समानान्तरीय अनुक्रम हो, जसको फरक 1 छ । त्यसैले यसको श्रेणी $1 + 2 + 3 + \dots + n$ हुन्छ ।

उक्त योगफललाई S_n ले जनाउँदा,

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 1$, समान अन्तर $(d) = 2 - 1 = 1$ र पद सङ्ख्या $(n) = n$

$$\text{अब, सूत्रअनुसार, } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1).d\} = \frac{n}{2} \{2 \times 1 + (n-1).1\} = \frac{n}{2} \{2 + n - 1\} = \frac{n}{2} (n + 1)$$

तसर्थ: पहिलो n ओटा प्राकृतिक सङ्ख्या हरूको योगफल $= \frac{n}{2} (n + 1)$ हुन्छ ।

पहिलो n ओटा जोर सङ्ख्या हरूको योगफल (Sum of the first n even numbers)

यहाँ, पदहरू 2, 4, 6, 8, ..., n पहिलो n ओटा जोर सङ्ख्या हरू हुन् ।

यो समानान्तरीय अनुक्रम हो, जसको फरक 2 छ । त्यसैले यसको श्रेणी $2 + 4 + 6 + \dots + n$ हुन्छ ।

उक्त योगफललाई S_n ले जनाउँदा,

$$S_n = 2 + 4 + 6 + \dots + n$$

यहाँ, पहिलो पद $(a) = 2$, समान अन्तर $(d) = 4 - 2 = 2$ र पद सङ्ख्या $(n) = n$

$$\text{अब, सूत्रअनुसार, } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1).d\} = \frac{n}{2} \{2 \times 2 + (n-1).2\} = \frac{n}{2} \{4 + 2n - 2\} = n(n + 1).$$

तसर्थ: पहिलो n ओटा जोर सङ्ख्या हरूको योगफल $= n(n + 1)$ हुन्छ ।

नोट : पहिलो n ओटा विजोर सङ्ख्याहरूको योगफल (Sum of the first n odd numbers) $= n^2$ हुन्छ । कसरी ?

उदाहरण 3

श्रेणी $5 + 17 + 29 + \dots$ का 28 ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सुरुको मान $(a) = 5$, समान अन्तर $(d) = 17 - 5 = 12$ अथवा $29 - 17 = 12$ र जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = 28$ छ ।

सूत्रअनुसार, पहिलो 28 ओटा पदहरूको योगफल

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$S_{28} = \frac{28}{2} \{2 \times 5 + (28 - 1) \cdot 12\} = 14 \times (10 + 324) = 4676.$$

तसर्थ, श्रेणी $5 + 17 + 29 + \dots$ का 28 ओटा पदहरूको योगफल रु 4676 हुन्छ।

उदाहरण 4

समानान्तरिय श्रेणीको पहिलो पद 2, अन्तिम पद 29 र जम्मा पदहरूको योगफल 155 छ। उक्त श्रेणीको समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, सुरुको मान $(a) = 2$, अन्तिम पद $(l) = 29$ र जम्मा योगफल $S_n = 155$ छ।

पत्ता लगाउनुपर्ने जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = ?$ समान अन्तर $(d) = ?$

सूत्रअनुसार,

$$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

$$\text{Or, } 155 = \frac{n}{2} (2 + 29)$$

$$\text{Or, } 310 = 31n$$

$$\text{Or, } n = \frac{310}{31} = 10$$

हामीलाई थाहा छ,

$$l = a + (n - 1)d$$

$$\text{or, } 29 = 2 + (10 - 1)d$$

$$\text{or, } 27 = 9d$$

$$\text{or, } d = \frac{27}{9} = 3$$

तसर्थ, समान अन्तर $(d) = 3$ भयो।

उदाहरण 5

समानान्तरिय श्रेणी $24 + 20 + 16 + \dots$ मा कति ओटा सङ्ख्याहरूको जम्मा योगफल 72 हुन्छ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, सुरुको मान $(a) = 24$, समान अन्तर $(d) = 20 - 24 = -4$ र जम्मा योगफल $S_n = 72$ छ।

पत्ता लगाउनुपर्ने जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = ?$

$$\text{सूत्रअनुसार, } S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$72 = \frac{n}{2} \{2 \times 24 + (n - 1) \cdot (-4)\}$$

$$\text{Or, } 144 = n(48 - 4n + 4)$$

$$\text{Or, } 4n^2 - 52n + 144 = 0$$

$$\text{Or, } n^2 - 13n + 36 = 0$$

$$\text{Or, } n^2 - 9n - 4n + 36 = 0$$

$$\text{Or, } n(n - 9) - 4(n - 9) = 0$$

$$\text{Or, } (n-9)(n-4) = 0$$

$$\therefore n = 9 \text{ or } 4$$

तसर्थ, आवश्यक पदहरूको सङ्ख्या 4 अथवा 9 हुन्छ।

उदाहरण 6

समानान्तरिय श्रेणीको तेस्रो पद 0 र दशौं पद 42 भए पहिलो 15 ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, तेस्रो पद $(t_3) = 0$, दशौं पद $(t_{10}) = 42$ र जम्मा पद सङ्ख्या $(n) = 15$ छ।

पत्ता लगाउनुपर्ने, जम्मा योगफल $S_{15} = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\text{or, } t_3 = a + (3 - 1)d$$

$$\text{or, } 0 = a + 2d$$

$$\text{or, } a = -2d \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{त्यस्तै, } t_{10} = a + (10 - 1)d$$

$$\text{or, } 42 = a + 9d \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट $a = -2d$ लाई समीकरण (ii) मा राखी हल गर्दा

$$42 = -2d + 9d$$

$$\text{Or, } 42 = 7d$$

$$\text{Or, } d = \frac{42}{7} = 6 \quad \therefore d = 6$$

अब, d को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$a = -2 \times 6 = -12$$

अब, पहिला 15 ओटा पदहरूको जम्मा योगफल सूत्र प्रयोग गर्दा

$$S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\}$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} \{2 \times (-12) + (15 - 1) \cdot (6)\}$$

$$= \frac{15}{2} (-24 + 84)$$

$$= 450$$

तसर्थ, पहिलो 15 पदहरूको जम्मा योगफल 450 हुन्छ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- (क) समानान्तरीय मध्यमा भन्नाले के बुझिन्छ ?
(ख) यदि a, M र b समानान्तरीय अनुक्रममा भए M लाई a र b को रूपमा लेख्नुहोस् ।
(ग) दुई सङ्ख्याहरू 15 र 25 को मध्यमान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- समानान्तरीय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) 8 र 10 (ख) -5 र 3 (ग) -4 र 6 (घ) $(x + y)$ र $(x - y)$
- समानान्तरीय मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) 3 र 18 को बिचमा 4 ओटा
(ख) 70 र 14 को बिचमा 6 ओटा
(ग) 7 र -7 को बिचमा 6 ओटा
- दिइएको समानान्तर अनुक्रमबाट, x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) 5, x र 13
(ख) $x + 1, x + 2, 2x + 1$
(ग) $2x + 3, x + 2$ र $x - 1$
- दिइएका समानान्तरीय श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) पहिलो 10 ओटा बिजोर सङ्ख्याहरूको योगफल,
(ख) पहिलो 100 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल,
(ग) 50 देखि 100 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल,
- दिइएका समानान्तरीय श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) $11 + 15 + 19 + \dots$, 20 ओटा पदहरू,
(ख) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots$, 18 ओटा पदहरू,
- समानान्तरीय श्रेणीको पहिलो पद, अन्तिम पद र जम्मा पदहरूको योगफल निम्नानुसार दिएको छ । समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) पहिलो पद = 1, अन्तिम पद = 50 र जम्मा पदहरूको योगफल = 204
(ख) पहिलो पद = 60, अन्तिम पद = 20 र जम्मा पदहरूको योगफल = 440
(ग) पहिलो पद = 17, अन्तिम पद = $-\frac{99}{8}$ र जम्मा पदहरूको योगफल = $\frac{407}{16}$
- समानान्तरीय श्रेणीको समान अन्तर, पदहरूको सङ्ख्या र जम्मा पदहरूको योगफल निम्नानुसार दिएको छ । पहिलो पद पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) समान अन्तर = -3, पदहरूको सङ्ख्या = 10 र जम्मा पदहरूको योगफल = 325
(ख) समान अन्तर = 9, पदहरूको सङ्ख्या = 9 र जम्मा पदहरूको योगफल = 108

- (ग) समान अन्तर = 3, पदहरूको सङ्ख्या = 10 र जम्मा पदहरूको योगफल = 155
9. तल दिइएका समानान्तरीय श्रेणीमा पदसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (क) $4 + 10 + 16 + 22 + \dots$ मा कति ओटा सङ्ख्याहरूको जम्मा योगफल 374 हुन्छ
- (ख) पहिलो पद = 36 र समान अन्तर = 9 छ, र योगफल = 540 हुन्छ ।

उत्तर :

- 1 ख) $M = \frac{a+b}{2}$ ग) 20 2. क) 9 ख) 1 ग) 1 घ) x 3. क) 6, 9, 12, 15
- ख) 62, 54, 46, 38, 30, 22 ग) 5, 3, 1, -1, -3, -5 4. क) 9 ख) 2 ग) 6
5. क) 100 ख) 5050 ग) 3775 6. क) 980 ख) -77 ग) 180
7. क) 7 ख) -4 ग) $-\frac{47}{16}$ 8. क) 46 ख) -24 ग) 2
9. क) 11 ख) 8

6.7 गुणोत्तर अनुक्रम र श्रेणीको मध्यमान (Means of Geometric Sequence and Series)

क्रियाकलाप 1

तलका सङ्ख्याहरू अध्ययन गर्नुहोस् । क) 4,16,64 ख) 64,16,4

उल्लिखित क) र ख) मा प्राप्त सङ्ख्याका दोस्रो पदलाई पहिलोले, तेस्रो पदलाई दोस्रोले, भाग गर्नुहोस् ।

ग) $\frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4$ घ) $\frac{16}{64} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

माथि ग) र घ) मा प्राप्त भिन्नको अबलोकन गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

फेरी क) र ख) मा भएका सङ्ख्याहरूको पहिलो सङ्ख्या र तेस्रो सङ्ख्याको गुणनफल दोस्रो सङ्ख्याको वर्गसँग बराबर छ त ?

हामी निष्कर्ष निकाल्न सक्छौं भने

$$t_n \text{ औं पद} \times t_{n+2} \text{ औं पद} = t_{n+1} \text{ औं पदको वर्ग}$$

दुई सङ्ख्याको बिचमा रहेको अङ्कको वर्गसँग ति दुई सङ्ख्याको गुणनफल निकाल्ने तरिका साधारण कुरा हो । उदाहरणको लागि, 2 र 8 को बिचमा 4 राखियो भने 4 को वर्गसँग 2 र 8 को गुणनफल बराबर हुन्छ । जब हामी यो गछौं, हामीले x को वास्तविक मान 2, x , 8 को रूपबाट पत्ता लगाउँछौं ।

गुणोत्तर अनुक्रममा, यदि धनात्मक अङ्कहरू a , x , b ले गुणोत्तर अनुक्रम बनाउँछ भने, $x^2 = a \times b$ हुन्छ र त्यसबाट $x = \sqrt{ab}$ प्राप्त गर्न सकिन्छ ।

गुणोत्तर अनुक्रमका दुई पदहरू (पहिलो र अन्तिम) बिचको पद वा पदहरूलाई गुणोत्तर मध्यमा (Geometric mean) भनिन्छ । गुणोत्तर मध्यमालाई GM ले जनाइन्छ । र $GM = \sqrt{ab}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दुई सङ्ख्या हरू 3 र 27 बिचको पर्ने एउटा गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ दुईओटा मात्र पद भएकोले

पहिलो पद (a) = 3

दोस्रो पद (b) = 27

गुणोत्तर मध्यमान (G) = ?

सूत्रअनुसार,

$$\text{मध्यमान } G = \sqrt{ab} = \sqrt{(3 \times 27)} = \sqrt{81} = 9$$

अतः गुणोत्तर मध्यमा (G) = 9 हुन्छ ।

दुईओटा पदहरूको बिचमा n ओटा गुणोत्तर मध्यमाहरू

क्रियाकलाप 2

मानौं, दुई पदहरू a र b का बिचमा पर्ने n ओटा मध्यमाहरू $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n$ छन् ।

यहाँ, a, $G_1, G_2, G_3, \dots, G_n, b$ गुणोत्तर अनुक्रमका रूपमा हुन्छन् ।

तसर्थ,

पहिलो पद (t_1) = a, अन्तिम पद (t_n) = b, मध्यमा सङ्ख्या = n, समान अन्तर = r र जम्मा पद सङ्ख्या = n + 2 छन् ।

हामीलाई थाहा छ, अन्तिम पद (t_n) = ar^{n-1}

$$\text{अथवा, } b = ar^{(n+2)-1}$$

$$\text{अथवा, } b = ar^{(n+1)}$$

$$\text{अथवा, } \frac{b}{a} = r^{(n+1)}$$

$$\therefore r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

∴ उक्त अनुक्रमको समान अनुपात (r) = $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ हुन्छ । जहाँ n भनेको मध्यमा सङ्ख्या हो ।

अब, पहिलो मध्यमा (G_1) = दोस्रो पद (t_2) = ar

$$\therefore (G_1) = ar$$

$$\text{or, } a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

दोस्रो मध्यमा (G_2) = तेस्रो पद (t_3) = ar^2

Total number of terms = n + 2

$$\therefore (G_2) = ar^2 = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

तेस्रो मध्यमा (G₃) = चौथो पद (t₄) = ar³

$$\therefore (G_3) = ar^3 = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

.....

र, अन्तिम मध्यमा (G_n) = (n + 1) औं पद (G_{n+1}) = arⁿ

$$\therefore (G_n) = ar^n, \text{ जहाँ } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

तसर्थ : a र b का बिचको n औं गुणोत्तर मध्यममा arⁿ हुन्छ ।

उदाहरण 2

दुई ओटा पदहरू 2 र 512 का बिचमा 3 ओटा गुणोत्तर मध्यमा निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद (a) = 2, अन्तिम पद (b) = 512 र मध्यमा सङ्ख्या (n) = 3

$$\text{त्यसैले, समान अनुपात } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{512}{2}\right)^{\frac{1}{3+1}} = (256)^{\frac{1}{4}} = 4$$

अब, तीन ओटा मध्यमाहरू क्रमशः G₁, G₂ र G₃ मानौ ।

$$\text{तसर्थ, } G_1 = ar = 2 \times 4 = 8$$

$$G_2 = ar^2 = 2 \times 16 = 32$$

$$G_3 = ar^3 = 2 \times 4^3 = 128$$

अतः 5 र 405 को बिचका 3 मध्यमाहरू 8, 32 र 128 हुन् ।

6.8 समानान्तरिय मध्यमा र गुणोत्तर मध्यमाबिचको सम्बन्ध (Relationship between Arithmetic Mean and Geometric Mean)

मानौ a र b दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याहरू छन् ।

हामीलाई थाहा छ,

$$A.M = \frac{a+b}{2} \text{ र } G.M = \sqrt{ab}$$

$$\text{अब, } A.M - G.M = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad [\text{यो सधैं धनात्मक हुन्छ}]$$

त्यसैले, $A.M - G.M \geq 0$

अथवा, $A.M \geq G.M$

उदाहरण 10

कुनै दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याको समानान्तरीय मध्यमा 15 र गुणोत्तर मध्यमा 9 भए उक्त दुई सङ्ख्याहरू के के हुन पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौं ती दुई धनात्मक सङ्ख्याहरू a र b छन् ।

हामीलाई थाहा छ,

$$A.M = \frac{a+b}{2} \text{ र } G.M = \sqrt{ab}$$

$$\text{अब, } A.M = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{or, } 15 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{or, } a + b = 30$$

$$\text{or, } a = 30 - b \dots\dots\dots(i)$$

त्यस्तै,

$$G.M = \sqrt{ab}$$

$$\text{or, } 9 = \sqrt{ab}$$

$$\text{or, } ab = 81 \dots\dots\dots(ii)$$

समीकरण (i) को मान समीकरण (ii) मा राखी हल गर्दा ,

$$\text{or, } ab = 81$$

$$\text{or, } (30-b).b = 81$$

$$\text{or, } b^2 - 30b + 81 = 0$$

$$\text{or, } b^2 - 27b - 3b + 81 = 0$$

$$\text{or, } b(b - 27) - 3(b - 27) = 0$$

$$\text{or, } (b - 27)(b - 3) = 0$$

$$\text{तसर्थ } b = 27 \text{ अथवा } 3$$

अब, b को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$\text{यदि, } b = 27, a = 30 - 27 = 3$$

$$\text{यदि, } b = 3, a = 30 - 3 = 27$$

त्यसैले ती दुई सङ्ख्याहरू 3 र 27 रहेछन् ।

6.9 गुणोत्तर श्रेणीको योगफल (Sum of Geometric Series)

दिइएको गुणोत्तर श्रेणीमा पहिलो पद a र समान अनुपात r छ भने पहिलो n ओटा पदहरूको योगफललाई S_n ले जनाइन्छ र यसलाई निम्न अनुसार लेखिन्छ ।

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ यहाँ, } r > 1 \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{यदि } r < 1 \text{ भएमा } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ हुन्छ ।}$$

$$\text{यदि तल वा अर्न्तम पद दिएमा } S_n = \frac{t_n r - a}{r - 1} \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 11

कुनै गुणोत्तर श्रेणीमा पहिलो पद 5 र समान अनुपात 2 भए पहिलो 6 पदको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

$$a = 5 \quad r = 2 \quad \text{र} \quad n = 6 \text{ दिइएको छ ।}$$

$$S_n = ?$$

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = \frac{5(64 - 1)}{1} = 5 \times 63 = 315.$$

उदाहरण 12

कुनै गुणोत्तर श्रेणी $2+6+18+\dots+972$ को योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

$$\text{यहाँ, } a = 2 \quad r = 6/2 = 3 \quad \text{र} \quad t_n = 972 \text{ दिइएको छ ।}$$

$$S_n = ?$$

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{t_n r - a}{r - 1} = \frac{972 \times 3 - 2}{3 - 1} = \frac{2916}{2} = 1458.$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- (क) गुणोत्तर मध्यमा भन्नाले के बुझिन्छ ?
(ख) यदि धनात्मक सङ्ख्याहरू a, X र b गुणोत्तर अनुक्रममा भए X लाई a र b को रूपमा लेख्नुहोस् ।
(ग) 4 र 16 बिचको गुणोत्तर मध्यमान कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।
- दिइएका दुई पदहरू बिच पर्ने गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) -9 र -81 (ख) 5 र 125 (ग) 10 र 100

3. (क) 3 र 192 को बिचमा 5 ओटा गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) 4 र 972 को बिचमा 4 ओटा गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. दिइएको गुणोत्तर अनुक्रमबाट, x को मान पत्ता लगाउनुहोस् । (क) 9, x र 64 (ख) x , 14 र 49
5. दिइएका गुणोत्तर श्रेणीहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 6$ ओटा पदहरू
(ख) $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + \dots + 5$ ओटा पदहरू
6. दिइएका गुणोत्तर श्रेणीको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(क) $16 + 8 + 4 + \dots + \frac{1}{16}$
(ख) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{729}$
7. (क) पहिलो पद = 2, अन्तिम पद = 486 र जम्मा पदहरूको योगफल = 728 भएको गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो पद, अन्तिम पद र जम्मा पदहरूको योगफल निम्नानुसार दिएको छ । समान अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. (क) गुणोत्तर श्रेणीको दोस्रो पद 4 र सातौँ पद 128 भए पहिलो 10 ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) गुणोत्तर श्रेणीको दोस्रो पद 3 र पाँचौँ पद 81 भए पहिलो 7 ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
9. (क) गुणोत्तर श्रेणी $6 - 12 + 24 - 48 + \dots$ मा कति ओटा पदहरूको योगफल -2046 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
(ख) गुणोत्तर श्रेणी $32 + 48 + 72 + \dots$ मा कति ओटा पदहरूको योगफल 665 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
10. एउटा चिडियाखानामा विभिन्न 10 प्रजातिका चराहरू छन् । प्रत्येक एउटा प्रजातिको सङ्ख्या अर्को प्रजातिको सङ्ख्याभन्दा दोब्बर छ । यदि पहिलो प्रजातिका चराहरूको सङ्ख्या 2 छ भने, चिडियाखानामा भएका 10 औँ प्रजातिका चराहरूको सङ्ख्या कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू

- 1 (ख) $G = \sqrt{ab}$ (ग) 8 2. (क) -27 (ख) 25 ग) 100 3. (क) 6,12,24,48,96 (ख) 12,36,108,324
4. (क) 24 (ख) 4 5. (क) 126 (ख) $\frac{121}{729}$ 6. (क) $31\frac{15}{16}$ (ख) $1\frac{364}{729}$
7. 3 8. (क) 2046 (ख) 1093 9. (क) 10 (ख) 6 10) 1024

परियोजना कार्य

- (क) एक अङ्कको एउटा सङ्ख्या लिनुहोस् । त्यसलाई क्रमसँग 10 पटकसम्म दोब्बर गर्दै लैजानुहोस् । त्यसपछि बन्ने अनुक्रम लेख्नुहोस् । अनुक्रममा भएका पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एक अङ्कको एउटा सङ्ख्या लिनुहोस् । त्यसमा क्रमसँग 10 पटकसम्म सोही अङ्क जोड्दै लैजानुहोस् । त्यसपछि बन्ने अनुक्रम लेख्नुहोस् । अनुक्रममा भएका पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।
माथि बनेका अनुक्रम र श्रेणीहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

7.0 परिचय (Introduction)

यहाँ, प्रथम डिग्रीका दुई समीकरणहरू $2x + 3y = 12$ र $x + y = 5$ दिइएका छन् । उक्त समीकरणमा पत्ता लगाउनुपर्ने चलहरू x र y का मानहरू दुवै समीकरणको लागि मान्य हुन्छ । x र y को मान पत्ता लगाउनु नै समीकरणको हल भनिन्छ । जुन समीकरणहरूले प्रतिनिधित्व गर्ने ग्राफ सरल रेखा हुन्छन् ।

यदि दुवै समीकरणहरूका चलहरूलाई एउटा निश्चित मान मात्र मान्य हुन्छ भने त्यस्ता समीकरणलाई युगपत रेखीय समीकरण भनिन्छ ।

युगपत रेखीय समीकरणमा दुई ओटा चलहरू भएकाले ती समीकरणलाई दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरण पनि भनिन्छ ।

तल सोधिएका प्रश्नहरू र तिनका उत्तरहरूको अध्ययन गर्नुहोस् :

बाबु र छोराको अहिलेको उमेरको योगफल 46 छ । पाँच वर्ष अघि बाबुको उमेर छोराको उमेरको 5 गुणा थियो ।

यदि बाबु र छोराको अहिलेको उमेर x वर्ष र y वर्ष छ भने

(क) दुई ओटा समीकरण के के हुन सक्छन् ?

पहिलो अवस्था अनुसार, $x + y = 46$

अथवा, $x = 46 - y$(i)

दोस्रो अवस्था अनुसार, $x - 5 = 5(y - 5)$

अथवा, $x - 5 = 5y - 25$

अथवा, $x = 5y - 25 + 5$

अथवा, $x = 5y - 20$(ii)

(ख) (क) मा बनेका कस्ता समीकरणहरू बन्छन् ? रेखीय समीकरण वा वर्ग समीकरण ?

मथि (क) मा बनेका समीकरणहरू रेखीय समीकरण हुन् किनकी दुवै प्रथम डिग्रीका समीकरण हुन् ।

(ग) उनीहरूको अहिलेको उमेर कति होला ?

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$46 - y = 5y - 20$$

$$\text{अथवा, } 46 + 20 = 5y + y$$

$$\text{अथवा, } 66 = 6y$$

$$\text{अथवा, } y = \frac{66}{6} = 11$$

y को मान समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा

$$x = 46 - 11 = 35$$

अतः बाबुको अहिलेको उमेर 35 वर्ष र छोराको अहिलेको उमेर 11 वर्ष छ ।

(ग) पाँच वर्षपछिको उनीहरूको उमेर कति हुनेछ ?

5 वर्ष पछि, बाबुको उमेर $35 + 5 = 40$ वर्ष हुनेछ र छोराको उमेर $11 + 5 = 16$ वर्ष हुनेछ ।

जानी राख्नुपर्ने केही तथ्यहरू

सङ्ख्या (Number)

(क) क्रमागत सङ्ख्याहरू (Consecutive numbers) = $\dots x - 1, x, x + 1, x + 2, \dots$

(ख) क्रमागत जोर सङ्ख्याहरू (Consecutive even numbers) = $\dots x - 2, x, x + 2, x + 4, \dots$

(ग) क्रमागत विजोर सङ्ख्याहरू (Consecutive odd numbers) = $\dots x - 2, x, x + 2, x + 4, \dots$

(घ) व्युत्क्रमानुपातिक सङ्ख्याहरू (Reciprocal numbers) = x को व्युत्क्रमानुपातिक सङ्ख्या $\frac{1}{x}$ हुन्छ ।

दुई अङ्कको सङ्ख्या (Two digit number)

दुई अङ्कको सङ्ख्या $10x + y$ हो जहाँ y एकको स्थानमा रहेको अङ्क हो र x दशको स्थानमा रहेको अङ्क हो । यसका विपरीत सङ्ख्या $10y + x$ हो ।

उमेरसँग सम्बन्धित समस्याहरू (Problem based on Ages)

बाबुको अहिलेको उमेर x वर्ष र छोरीको अहिलेको उमेर y वर्ष छ भने

(क) ' a ' वर्ष अघि, बाबुको उमेर $(x - a)$ वर्ष थियो र छोरीको उमेर $(y - a)$ वर्ष थियो ।

(ख) ' a ' वर्ष पछि, बाबुको उमेर $(x + a)$ वर्ष थियो र छोरीको उमेर $(y + a)$ वर्ष थियो ।

समय, दुरी र गतिसँग सम्बन्धित समस्याहरू (Problem based on time, distance and speed)

समय, दुरी र वेगसँग सम्बन्धित समस्याहरूको समाधान गर्दा तल दिइएका सूत्रहरूको प्रयोग गर्नुहोस् ।

(क) गति = दुरी/समय

(ख) समय = दुरी/गति

(ग) दुरी = समय × गति

7.1 वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

क्रियाकलाप 1

एउटा आयताकार फुटसल मैदानमा कार्पेट विछ्याएको छ जुन सँगैको चित्रमा देखाइएको छ । जसको क्षेत्रफल 800 वर्गमिटर छ । त्यसको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर छ । यदि चौडाइ x मिटर भए लम्बाइ कति होला ? के लम्बाइ $2x$ मिटर हुन्छ ? अथवा $x + 2$ मिटर हुन्छ ? साथै तल सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर के हुन सक्छन्, यस बारेमा साथी सञ्जाल वा छरछिमेकमा रहेका शिक्षकहरू अथवा इन्टरनेटमा खोजी पत्ता लगाउनुहोस् ।



(क) आयताकार मैदानको क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र के हुन्छ ?

(ख) उक्त सम्बन्धलाई गणितीय वाक्यमा उल्लेख गर्दा के हुन्छ ?

(ग) के (ख) मा बनेको सम्बन्धलाई वर्ग समीकरण भन्न सकिन्छ ?

(घ) उक्त फुटसल मैदानको वास्तविक लम्बाइ र चौडाइ कति कति हुन्छ ?

मथि दिइएको फुटसल मैदान आयताकार भएकोले यसको क्षेत्रफल = लम्बाइ × चौडाइ हुन्छ ।

सोही सूत्र अनुसार $800 = 2x \times x$

अथवा, $800 = 2x^2$ ($\because 800 = 2x^2$ मा चलाइ x को घाताङ्क 2 भएकोले यो वर्ग समीकरण हो)

अथवा, $x^2 = \frac{800}{2}$

अथवा, $x^2 = 400$

दुवैतर्फ वर्गमूल लिँदा

$$\text{अथवा, } x = \sqrt{400}$$

$$\text{अथवा, } x = 20$$

अत वास्तविक चौडाइ = 20 मिटर र लम्बाइ = 2×20 मिटर = 40 मिटर हुन्छ ।

के वर्ग समीकरण भन्नाले $800 = 2x^2$ (i) मात्र हो ? पक्कै पनि होइन होला ? $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ii) लाई कस्तो समीकरण भनिन्छ ? मथिको तथ्य अनुसार चलराशिको पहिलो पदसँग सबभन्दा ठूलो घाताङ्क 2 छ, त्यसैले यो पनि वर्ग समीकरण हो । के यी दुई समीकरणहरू उस्तै छन् त ? छैनन् । किनकी समीकरण (i) मा जम्मा चलराशिको घाताङ्क 2 भएको पद र अचलमान भएका दुईओटा पदहरू छन् । यस्तो वर्ग समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (Pure quadratic equation) भनिन्छ भने समीकरण (ii) लाई मिश्रित वर्ग समीकरण (Adfected quadratic equation) भनिन्छ ।

अतः $ax^2 + c = 0$ रूपको वर्ग समीकरण शुद्ध वर्ग समीकरण हो । जहाँ दोस्रो पद (bx) छैन । $ax^2 + bx + c = 0$ रूपको समीकरणलाई वर्ग समीकरणको सामान्य रूप भनिन्छ । वर्ग समीकरणमा x को अधिकतम घाताङ्क 2 हुने भएकाले यसलाई दोस्रो डिग्री (second degree) समीकरण पनि भनिन्छ । वर्ग समीकरणमा x का दुई ओटा मानहरू हुन्छन् । जसलाई वर्ग समीकरणका मूलहरू (roots) भनिन्छ ।

डिग्री 2 भएको एक चलयुक्त समीकरणलाई वर्ग समीकरण भन्न सकिन्छ जुन $ax^2 + bx + c = 0$ को रूपमा रहन्छ । जहाँ, $a, b, c \in \mathbb{R}$ र $a \neq 0$ हुन्छ ।

7.1.1 वर्ग समीकरणको हल (Solution of quadratic equation)

वर्ग समीकरणको हल विभिन्न विधिद्वारा गर्न सकिन्छ । ती विधिहरू यस प्रकार छन् ।

(क) खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equation by factorization method)

क्रियाकलाप 1

एउटा वर्ग समीकरण $4x^2 - 16 = 0$ लिनुहोस् । यो समीकरण $ax^2 + c = 0$ रूपमा छ । यो वर्ग समीकरण शुद्ध वर्ग समीकरण वा मिश्रित वर्ग समीकरण कुन हो ? यसलाई कसरी समाधान गर्ने होला ? वर्ग समीकरण समाधान गर्दा कतिओटा मानहरू प्राप्त हुन्छन् ? के मानहरू धनात्मक मात्र हुन्छन् ? मानहरू ऋणात्मक मात्र हुन्छन् ? वा दुवै हुन सक्छन् ? यी सबै प्रश्नहरूको उत्तर थाहा पाउन दिइएको वर्ग समीकरणको समाधान गरौं है त ।

$$\text{अथवा, } 4x^2 - 16 = 0$$

$$\text{अथवा, } 4(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 4 = \frac{0}{4}$$

अथवा, $x^2 - 4 = 0$ [\because 0 लाई कुनै सङ्ख्याले भाग गर्दा नतिजा 0 हुन्छ।]

$$\text{अथवा, } (x)^2 - (2)^2 = 0$$

अथवा, $(x + 2)(x - 2) = 0$ [$\because (a)^2 - (b)^2 = (a + b)(a - b)$ हुन्छ]

$$\text{अथवा, } (x + 2) = 0 \quad \therefore x = -2$$

$$\text{अथवा, } (x - 2) = 0 \quad \therefore x = 2$$

वर्ग समीकरण $4x^2 - 16 = 0$ लाई **खण्डीकरण विधिद्वारा** समाधान गरी चल राशि x को मानहरू पत्ता लगायौं।

x का मानहरू समीकरण $4x^2 - 16 = 0$ मा प्रतिस्थापन गर्दा मान्य हुन्छ कि हुँदैन परीक्षण गरी हेरौं है त। जसलाई निम्नानुसार परीक्षण गर्न सकिन्छ।

यदि $x = 2$ भए $4 \times 2^2 - 16 = 4 \times 4 - 16 = 16 - 16 = 0$ मान्य भयो।

यदि $x = -2$ भए $4 \times (-2)^2 - 16 = 4 \times 4 - 16 = 16 - 16 = 0$ मान्य भयो। [$\because (-2)^2 = 4$ हुन्छ।]

अतः समीकरण $4x^2 - 16 = 0$ का मानहरू $x = -2$ र 2 हुन्।

क्रियाकलाप 2

एउटा वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ लिनुहोस्। यो समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ रूपमा छ। यो वर्ग समीकरण शुद्ध वर्ग समीकरण वा मिश्रित वर्ग समीकरण कुन हो? यसलाई कसरी समाधान गर्ने होला? के बाँयातर्फ रहेको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्न सकिन्छ? वर्ग समीकरण समाधान गर्दा कतिओटा मानहरू प्राप्त हुनुपर्छ? के मानहरू धनात्मक वा ऋणात्मक कुनै पनि हुन सक्छन्? माथि सोधिएका सबै प्रश्नहरूको उत्तर प्राप्त गर्न दिएको वर्ग समीकरणको समाधान गरौं है त।

$$\text{दिएको समीकरण, } x^2 - 5x + 6 = 0$$

अथवा, $x^2 - (3 + 2)x + 6 = 0$ [\because दुईओटा सङ्ख्या जोड्दा 5 र सोही दुईओटा सङ्ख्या गुणनगर्दा 6 आउने]

अथवा, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$ [$\because -x$ ले ब्राकेट भित्र गुणन गर्ने]

अथवा, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$ [\because दुई दुई ओटा पदहरू विचमा साभ्ना लिने]

$$\text{अथवा, } (x - 3)(x - 2) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 3) = 0 \quad \therefore x = 3$$

$$\text{अथवा, } x - 2 = 0. \therefore x = 2$$

वर्ग समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ लाई खण्डीकरण विधिद्वारा समाधान गरी चल राशि x को मानहरू पत्ता लगायौं ।

x का मानहरू समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ मा प्रतिस्थापन गर्दा मान्य हुन्छ कि हुँदैन परीक्षण गरी हेरौं है त । जसलाई निम्नानुसार परीक्षण गर्न सकिन्छ ।

$$\text{यदि } x = 3 \text{ भए } 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0, \text{ मान्य भयो ।}$$

$$\text{यदि } x = 2 \text{ भए } (2)^2 - 5 \times 2 + 6 = 0, \text{ मान्य भयो ।}$$

अतः समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ का मानहरू $x = 3$ र $x = 2$ हुन् ।

उदाहरण 1

वर्ग समीकरण $5x^2 + 8x - 21 = 0$ लाई खण्डीकरण विधिद्वारा समाधान गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

$$5x^2 + 8x - 21 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 + (15 - 7)x - 21 = 0 \quad [\because \text{किनकी } 15 \times 7 = 105 \text{ र } 15 - 7 = 8]$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 + 15x - 7x - 21 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x(x + 3) - 7(x + 3) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 3)(5x - 7) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 3) = 0. \quad \therefore x = -3 \quad \text{वा}$$

$$\text{अथवा, } (5x - 7) = 0 \quad \therefore 5x = 7, x = \frac{7}{5}$$

अतः वर्ग समीकरण $5x^2 + 8x - 21 = 0$ का मूलहरू -3 र $\frac{7}{5}$ हुन् ।

अभ्यास 7.1

1. तल दिएका मध्ये कुन कुन वर्ग समीकरण हुन् र कुन होइनन् ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) $(x - 3)^2 + 2 = 5x + 4$

(ख) $y(y + 3) + 9 = (y + 4)(y - 4)$

(ग) $5x^2 + 4 = 2x^2 + 7$

(घ) $(x - 3)^3 = x^3 + 9$

(ङ) $x^2 + 5x + 2 = 0$

(च) $(x + 3)^3 = 3x(x^2 - 2)$

2. दिइएका वर्ग समीकरणहरू खण्डीकरण विधिद्वारा समाधान गर्नुहोस् ।

क) $x^2 - 6x = 0$

ख) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ग) $x^2 + 9x + 8 = 0$

घ) $x^2 + 3x - 40 = 0$

ङ) $x^2 - 4x - 45 = 0$

च) $x^2 - 27x + 182 = 0$

उत्तर :

1. (क), (ख), (ग) र (ङ) मा भएका समीकरणहरू वर्ग समीकरणहरू हुन् किनकी चल राशिको सबैभन्दा ठूलो घाताङ्क दुई छ ।

(घ) र (च) मा भएका समीकरणहरू वर्ग समीकरणहरू होइनन् किनकी चल राशिको सबैभन्दा ठूलो घाताङ्क 3 छ ।

2. (क) 0, 6

(ख) 1, 2

(ग) -1, -8

(घ) -8, 5

(ङ) -5, 9

(च) 13, 14

(ख) वर्ग पुरा गरेर वर्ग समीकरणको हल (Solution of quadratic equation by completing square)

क्रियाकलाप 3

एउटा वर्ग समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ छ । यसलाई कसरी समाधान गर्ने होला ? के बाँयातर्फ रहेको वीजीय अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण विधिबाट समाधान गर्न सकिन्छ ? के यसलाई अर्को कुनै विधिद्वारा समाधान गर्न सकिन्छ ? अर्को विधिबाट समाधान गरी हेरौं है त ।

दिइएको समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$

अथवा, $2x^2 - 3x = -1$ [\because अचल सङ्ख्या 1 दाँया तर्फ लाने]

दुवैतर्फ 2 ले भाग गर्दा,

अथवा, $x^2 - \frac{3x}{2} = \frac{-1}{2}$ [\because x^2 को गुणाङ्क 2 भएकोले दुवैतर्फ 2 ले गुणन गर्ने]

अथवा, $x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-1}{2}$ [\because $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ जोड्यौं त्यति नै घटायौं]

अथवा, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} - \frac{1}{2}$ [\because $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ लेख्दा]

अथवा, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9-8}{16}$

अथवा, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$$\text{अथवा, } \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\pm \frac{1}{4}\right)^2 \left[\because \frac{1}{16} = \left(\pm \frac{1}{4}\right)^2 \text{ हुन्छ]}\right.$$

दुवैतर्फ वर्गमूल लिँदा

$$\text{अथवा, } x - \frac{3}{4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$\text{धनात्मक चिन्ह लिँदा, } x = \frac{3+1}{4}, x = \frac{4}{4}, x = 1$$

$$\text{ऋणात्मक चिन्ह लिँदा, } x = \frac{3-1}{4}, x = \frac{2}{4}, x = \frac{1}{2}$$

अतः वर्ग समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का मूलहरू 1 र $\frac{1}{2}$ हुन् ।

यसरी वर्ग समीकरणलाई **वर्ग पूरा गरी हल गर्ने** विधिबाट हल गर्न सकिन्छ । खण्डिकरण विधिबाट समाधान गर्न सकिने एवं नसकिने सबै वर्ग समीकरणलाई **वर्ग पूरा गरी** हल गर्न सकिन्छ । खास गरी खण्डिकरण विधिबाट सबै वर्ग समीकरणको हल गर्न सम्भव हुँदैन, त्यस्तो बेलामा यो वर्ग पूरा गरेर हल गर्ने विधिको प्रयोग गर्ने गर्दछौ ।

उदाहरण 2

दिइएको समीकरण $x^2 - 4x - 8 = 0$ वर्ग पूरा गरेर हल गर्नुहोस् ।

समाधान

$$(x)^2 - 2 \times x \times 2 + (2)^2 - (2)^2 - 8 = 0$$

$$\text{अथवा, } \{(x)^2 - 2 \times x \times 2 + (2)^2\} - 4 - 8 = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 2)^2 - 12 = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 2)^2 = 12$$

दुवैतर्फ वर्गमूल लिँदा

$$\text{अथवा, } (x - 2) = \pm \sqrt{12}$$

$$\text{अथवा, } (x - 2) = \pm 2\sqrt{3}$$

$$\therefore x = 2 \pm 2\sqrt{3}$$

अतः वर्ग समीकरण $x^2 - 4x - 8 = 0$ आवश्यक मूलहरू $2 + 2\sqrt{3}$ र $2 - 2\sqrt{3}$ हुन् ।

उदाहरण 3

वर्ग पूरा गरेर हल गर्नुहोस् : $2x^2 - 7x + 6 = 0$

समाधान

यहाँ, $2y^2 - 7y + 6 = 0$

अथवा, $2(y^2 - \frac{7}{2}y + 3) = 0$

अथवा, $y^2 - \frac{7}{2}y + 3 = 0$

अथवा, $y^2 - 2 \times y \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3 = 0$

अथवा, $y^2 - 2 \times y \times \frac{7}{4} + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + 3 = 0$

अथवा, $(y - \frac{7}{4})^2 - \frac{1}{16} = 0$

अथवा, $(y - \frac{7}{4})^2 = \frac{1}{16}$

अथवा, $(y - \frac{7}{4}) = \pm \frac{1}{4}$

अथवा, $y - \frac{7}{4} = \pm \frac{1}{4}$

धनात्मक चिन्ह लिदाँ, $y - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$ अथवा, $y = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$

ऋणात्मक चिन्ह लिदाँ, $y - \frac{7}{4} = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}$

∴ तसर्थ y का मूलहरू क्रमशः 2 र $\frac{3}{2}$ हुन् ।

अभ्यास 7.2

वर्ग पूरा गरेर हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 + 6x = 0$

(ख) $x^2 - 10x + 16 = 0$

(ग) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

(घ) $5y^2 - 6y = 2$

(ङ) $16x^2 - 32x + 15 = 0$

(च) $9x^2 + 6x - 35 = 0$

उत्तरहरू :

(क) 0, -6

(ख) 8, 2

(ग) $\frac{3}{2}$, 1

(घ) $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$, $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$

(ङ) $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{4}$

(च) $\frac{5}{3}$, $-\frac{7}{3}$

(ग) सूत्र प्रयोग गरेर वर्ग समीकरणको हल (Solution of quadratic equation by using formula)

क्रियाकलाप 1

एउटा वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ लिनुहोस् । यसलाई कसरी समाधान गर्ने होला ? x का मूलहरू के के हुन सक्छन् होला ? बाँयातर्फ रहेको बीजीय अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण विधिबाट समाधान गर्न सकिन्छ ? के यसलाई **वर्ग पूरा गरी हल गर्ने** विधिबाट समाधान गर्न सकिन्छ ? वर्ग पूरा गरी हल गर्ने विधिबाट समाधान गरी हेरौं है त ।

दिइएको समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$

अथवा, $ax^2 + bx = -c$ [\because अचल सङ्ख्या c लाई दाँयातर्फ लाँदा]

अथवा, $\frac{ax^2 + bx}{a} = -\frac{c}{a}$ [\because दुवैतिर a ले भाग गर्दा]

अथवा, $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

अथवा, $x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

अथवा, $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}$ [\because $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ जोड्यौ त्यति नै $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ घटायौ]

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ [$\because a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ लेख्दा]

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$

अथवा, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ [$\because a$ र $4a^2$ को ल.स.लिँदा]

अथवा, $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)}$ [\because दुवैतर्फ वर्गमूल लिँदा]

अथवा, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [$\because 4a^2$ बाट रुट हटाउँदा]

अथवा, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [$\because 2a$ ल.स.लिँदा]

तसर्थ x का मूलहरू क्रमशः $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ र $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ हुन् ।

त्यसकारण, समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ लाई **सूत्र प्रयोग गरेर हल** गर्न सकिन्छ ।

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ लाई वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को हल गर्ने सूत्र भनिन्छ । खण्डीकरण विधिबाट समाधान गर्न सकिने एवं नसकिने सबै वर्ग समीकरणलाई सूत्र प्रयोग गरेर समाधान गर्न सकिन्छ । खास गरी खण्डीकरण विधिबाट सबै वर्ग समीकरणको हल गर्न सम्भव हुँदैन, त्यस्तो बेलामा वर्ग पूरा गरेर अथवा सूत्र प्रयोग विधिबाट समीकरणका हल गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 4

सूत्र प्रयोग गरी दिइएको वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् : $x^2 - 7x + 12 = 0$

समाधान : यहाँ,

यहाँ दिएको वर्ग समीकरण $x^2 - 7x + 12 = 0$ (i)

समीकरण (i) लाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा

$$a = 1, b = -7, \text{ र } c = 12$$

वर्ग समीकरणको सूत्र अनुसार,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \\ &= \frac{7 \pm 1}{2} \end{aligned}$$

धनात्मक चिन्ह लिदाँ, $x = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

ऋणात्मक चिन्ह लिदाँ, $x = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

तसर्थ x का मूलहरू क्रमशः 3 र 4 रहेछन् ।

उदाहरण 5

सूत्र प्रयोग गरी दिइएको वर्ग समीकरणको हल गर्नुहोस् : $\frac{x+3}{x} + \frac{x}{x+3} = 3\frac{1}{2}$

समाधान : यहाँ,

दिएको वर्ग समीकरण, $\frac{x+3}{x} + \frac{x}{x+3} = 3\frac{1}{2}$

अथवा, $\frac{(x+3)^2 + x^2}{x(x+3)} = \frac{7}{2}$

$$\text{अथवा, } \frac{x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 + x^2}{x^2 + 3x} = \frac{7}{2}$$

$$\text{अथवा, } \frac{2x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x} = \frac{7}{2}$$

$$\text{अथवा, } 2(2x^2 + 6x + 9) = 7(x^2 + 3x)$$

$$\text{अथवा, } 4x^2 + 12x + 18 = 7x^2 + 21x$$

$$\text{अथवा, } 4x^2 - 7x^2 + 12x - 21x + 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } -3x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } -3(x^2 + 3x - 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 3x - 6 = 0 \dots\dots\dots \text{समीकरण (i)}$$

समीकरण (i) लाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा

$$a = 1, b = 3 \text{ र } c = -6$$

वर्ग समीकरणको सूत्र प्रयोग गर्दा

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+24}}{2}$$

$$\text{अथवा, } x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{अब, धनात्मक चिन्ह लिदाँ, } x = \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{फेरी, ऋणात्मक चिन्ह लिदाँ, } x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$$

तसर्थ x का मूलहरू क्रमशः $\frac{-3 + \sqrt{33}}{2}$ र $\frac{-3 - \sqrt{33}}{2}$ हुन् ।

अभ्यास 7.3

सूत्र प्रयोग गरेर हल गर्नुहोस् ।

$$(क) 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$(ख) x^2 + 6x - 72 = 0$$

$$(ग) 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(घ) 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$(ङ) x^2 - 2x = 15$$

$$(च) \frac{3x-7}{2x-5} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$(छ) \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$(ज) \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$$

$$(झ) \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-3}{x-1}$$

उत्तरहरू :

$$(क) 4, \frac{5}{2}$$

$$(ख) 6, -12$$

$$(ग) 1, \frac{2}{3}$$

$$(घ) \frac{-5 + \sqrt{57}}{8}, \frac{-5 - \sqrt{57}}{8}$$

$$(ङ) 5, -3$$

$$(च) 4, 3$$

$$(छ) \frac{-25 + \sqrt{313}}{26}, \frac{-25 - \sqrt{313}}{26}$$

$$(ज) \pm\sqrt{34}$$

$$(झ) 0, 4$$

7.1.2 वर्ग समीकरण सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरू (Word problems related to quadratic equation)

क्रियाकलाप 1

रमिला कक्षा दशमा पढ्दै गरेकी छात्रा हुन् । उनी अहिले 14 वर्षकी छन् । उनकी आमा अहिले 30 वर्षकी हुनुहुन्छ । दिइएको जानकारीको आधारमा तलका प्रश्नहरूको उत्तर के हुन सक्छन्, एकछिन सोच्नुहोस् है त ।

(क) छोरी भन्दा आमा कति वर्षले जेठी छन् ?

(ख) दुईवर्ष अघि आमा र छोरीको उमेर कति कति थियो ?

(ग) दुईवर्ष पछि उनीहरूको उमेर कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) कति वर्ष पहिले रमिला र उनको आमाको उमेरको गुणनफल 192 थियो होला ? यसलाई कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ?

(ङ) दिइएको अवस्थाबाट के समीकरण बनाउन सकिन्छ ? समीकरण बन्छ भने रेखीय समीकरण वा वर्ग समीकरण कुन बन्छ ?

उत्तर :

(क) उनीहरूको अहिलेको उमेरमा फरक $30 - 14 = 16$ वर्ष छ । त्यसैले छोरी भन्दा आमा 16 वर्षले जेठी छन् ।

(ख) दुईवर्ष अघि आमाको उमेर $30 - 2 = 28$ वर्ष थियो भने रमिलाको उमेर $14 - 2 = 12$ वर्ष थियो ।

(ग) त्यसैगरी, दुईवर्ष पछि आमाको उमेर $30 + 2 = 32$ वर्ष हुनेछ भने रमिलाको उमेर $14 + 2 = 16$ वर्ष हुनेछ ।

(घ) x वर्ष पहिले उनीहरूको उमेर कति कति थियो होला ? पक्कै पनि आमाको उमेर $(30 - x)$ वर्ष थियो र रमिलाको उमेर $(14 - x)$ वर्षको थियो ।

$$\text{अब, } (30 - x) \times (14 - x) = 192$$

$$\text{अथवा, } 420 - 30x - 14x + x^2 = 192$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 44x + 228 = 0$$

यो वर्ग समीकरण हो किनकी चल राशि x को अधिकतम घाताङ्क 2 छ । समाधान गर्दा x को मान 6 हुन्छ, पक्का हो तपाईंहरूले यसलाई समाधान गरी हेर्नुहोस् है त । त्यसैले 6 वर्ष पहिले उनीहरूको उमेरको गुणनफल 192 थियो ।

क्रियाकलाप 2

समिरन कक्षा दशमा अध्ययन गर्दछन् । उनको हालको उमेर 15 वर्ष छ । उनको दाजु स्नातकोत्तर तहको अन्तिम वर्षमा अध्ययनरत छन् । उनको हालको उमेर 22 वर्ष रहेको जानकारी प्राप्त भयो । उनीहरूको अहिलेको उमेरको गुणनफल कति हुन्छ होला ? कति वर्षपछि उनीहरूको उमेरको गुणनफल 408 हुन्छ होला ? यसलाई कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ होला ? के यसलाई क्रियाकलाप 5 मा भै समाधान गर्न सकिन्छ ? प्रयास गर्नुहोस् । यस बारेमा खोजी गरी निष्कर्ष पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 1

एउटा प्राकृतिक सङ्ख्याको वर्गको आधाबाट 4 घटाउदा नतिजा 14 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, एउटा प्राकृतिक सङ्ख्या x र त्यसको वर्ग संख्या x^2 हो ।

प्रश्नअनुसार,

$$\text{अथवा, } \frac{x^2}{2} - 4 = 14$$

$$\text{अथवा, } \frac{x^2}{2} = 14 + 4$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 18 \times 2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 36$$

$$\text{अथवा, } x = \pm \sqrt{36} = \pm 6$$

हामीलाई धनात्मक सङ्ख्या चाहिएकोले $x = 6$ मात्र हुन्छ । अतः आवश्यक प्राकृतिक सङ्ख्या 6 हो ।

उदाहरण 2

यदि दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याहरूको योगफल 9 र गुणनफल 18 भए ती सङ्ख्याहरू कुन् हुन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, धनात्मक सङ्ख्याहरू x र y हुन् ।

पहिलो अवस्था अनुसार,

$$x + y = 9$$

$$y = 9 - x \dots\dots\dots (i)$$

दोस्रो अवस्था अनुसार,

$$x \times y = 18 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$x(9 - x) = 18$$

$$\text{अथवा, } 9x - x^2 = 18$$

$$\text{अथवा, } 0 = x^2 - 9x + 18$$

$$\text{अथवा, } 0 = x^2 - 9x + 18$$

$$\text{अथवा, } x^2 - (6 + 3)x + 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 6x - 3x + 18 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 6) - 3(x - 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 6)(x - 3) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 6) = 0. \quad \therefore x = 6 \quad \text{वा}$$

$$\text{अथवा, } x - 3 = 0. \quad \therefore x = 3$$

x को मान समीकरण (i) मा राख्दा,

$$\text{यदि } x = 6 \text{ भए } y = 9 - x = 9 - 6 = 3$$

$$\text{यदि } x = 3 \text{ भए } y = 9 - x = 9 - 3 = 6$$

अतः आवश्यक धनात्मक सङ्ख्याहरू 3, 6 वा 6, 3 हुन् ।

उदाहरण 3

कुनै दुई ओटा धनात्मक क्रमागत जोर सङ्ख्याहरूको गुणनफल 24 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, दुईओटा क्रमागत जोर सङ्ख्याहरू x र $x + 2$ हुन् ।

प्रश्न अनुसार,

$$x \times (x + 2) = 24$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 + 6x - 4x - 24 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x + 6) - 4(x + 6) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 6)(x - 4) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x + 6) = 0 \therefore x = -6 \quad \text{वा}$$

$$\text{अथवा, } x - 4 = 0. \therefore x = 4$$

अतः आवश्यक धनात्मक सङ्ख्याहरू क्रमशः 4 र $4 + 2 = 6$ रहेछन् ।

उदाहरण 4

यदि कुनै सङ्ख्या र त्यसको व्यूत्क्रमको योगफल $\frac{26}{5}$ भए सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, त्यो आवश्यक सङ्ख्या x र त्यसको व्यूत्क्रम सङ्ख्या $\frac{1}{x}$ हो ।

$$\text{प्रश्नानुसार, } x + \frac{1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$\text{अथवा, } \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{26}{5}$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 + 5 = 26x$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 - 26x + 5 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x^2 - 25x - x + 5 = 0$$

$$\text{अथवा, } 5x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$$

$$\text{अथवा, } (5x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\text{अथवा, } (5x - 1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{5} \quad \text{वा}$$

$$\text{अथवा, } x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$$

तसर्थ, आवश्यक सङ्ख्याहरू क्रमशः 5 र $\frac{1}{5}$ रहेछन् ।

उदाहरण 5

दुई दिदी बहिनीको अहिलेको उमेरको फरक 5 वर्ष र तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 84 छ । दिदी बहिनीहरूको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, दिदीको अहिलेको उमेर x वर्ष र बहिनीको अहिलेको उमेर y वर्ष छन् ।

पहिलो शर्त अनुसार,

$$x - y = 5$$

$$\text{अथवा, } x = 5 + y \dots\dots\dots (i)$$

दोस्रो शर्त अनुसार,

$$x \times y = 84 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण(i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$(5 + y) \times y = 84$$

$$\text{अथवा, } 5y + y^2 = 84$$

$$\text{अथवा, } y^2 + 5y - 84 = 0$$

$$\text{अथवा, } y^2 + (12-7)y - 84 = 0$$

$$\text{अथवा, } y^2 + 12y - 7y - 84 = 0$$

$$\text{अथवा, } y(y + 12) - 7(y + 12) = 0$$

$$\text{अथवा, } (y + 12)(y - 7) = 0$$

$$\text{अथवा, } (y + 12) = 0. \quad \therefore y = -12 \text{ असम्भव छ, (किनकी उमेर कहिल्यै पनि ऋणात्मक हुदैन) ।}$$

वा

$$\text{अथवा, } y - 7 = 0. \quad \therefore y = 7$$

$$y \text{ को मान समीकरण (i) मा राख्दा, } x = 5 + y = 5 + 7 = 12$$

अतः दिदीको उमेर 12 वर्ष र बहिनीको उमेर 7 वर्ष रहेछ ।

उदाहरण 6

दुई जना दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 34 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणन फल 288 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, दाजुको अहिलेको उमेर x वर्ष र भाइको अहिलेको उमेर y वर्ष छन् ।

पहिलो शर्त अनुसार,

$$x + y = 34$$

$$\text{अथवा, } y = 34 - x \dots\dots\dots (i)$$

दोस्रो शर्त अनुसार,

$$x \times y = 288 \dots\dots\dots (ii)$$

समीकरण (i) बाट y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

$$x(34 - x) = 288$$

$$\text{अथवा, } 34x - x^2 = 288$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 34x + 288 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 16x - 18x + 288 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 16) - 18(x - 16) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 16)(x - 18) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 16) = 0. \quad \therefore x = 16$$

वा

$$\text{अथवा, } x - 18 = 0. \quad \therefore x = 18$$

x को मान समीकरण (iii) मा राख्दा,

$$\text{यदि } x = 16 \text{ भए } y = 34 - x = 34 - 16 = 18$$

$$\text{यदि } x = 18 \text{ भए } y = 34 - x = 34 - 18 = 16$$

त्यसैले, दाजुको उमेर 18 वर्ष र भाइको उमेर 16 वर्ष रहेछ ।

उदाहरण 7

आमा र छोराको हालको उमेर क्रमशः 42 वर्ष र 16 वर्ष छ । कति वर्षअघि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 272 थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, x वर्ष अघिको आमा र छोराको उमेरको गुणनफल 272 थियो । बाबु र छोराको हालको उमेर क्रमशः 42 वर्ष र 16 वर्ष छ ।

x वर्ष अघि आमाको उमेर $(42 - x)$ वर्ष थियो त्यसैगरी,

x वर्ष अघि छोराको उमेर $(16 - x)$ वर्ष थियो ।

प्रश्नानुसार,

$$\text{अथवा, } (42 - x)(16 - x) = 272$$

$$\text{अथवा, } 672 - 42x - 16x + x^2 = 272$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 58x + 400 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - (50 + 8)x + 400 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 50x - 8x + 400 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 50) - 8(x - 50) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 8)(x - 50) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 8) = 0 \quad \therefore x = 8$$

वा

$$\text{अथवा, } x - 50 = 0 \quad \therefore x = 50$$

यहाँ x को मान 50 वर्ष असम्भव छ किनकी आमाको अहिलेको उमेर 42 वर्ष मात्र छ । त्यसैले $x = 8$ हुन्छ ।

तसर्थ 8 वर्ष अघि आमाको उमेर र छोराको उमेरको गुणनफल 272 थियो ।

उदाहरण 8

दुई अङ्कको सङ्ख्यामा अङ्कहरूको गुणनफल 18 छ । उक्त सङ्ख्याको अङ्कहरूलाई स्थानमान परिवर्तन गर्दा बन्ने सङ्ख्या सुरुको सङ्ख्याभन्दा 27 ले बढी हुन्छ भने शुरुको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, दुई अङ्कको सङ्ख्या $10x + y$ हो जहाँ y एकको स्थानमा रहेको अङ्क हो र x दशको स्थानमा रहेको अङ्क हो ।

पहिलो शर्त अनुसार,

$$x \times y = 18$$

अथवा, $x = \frac{18}{y}$ (i)

दोस्रो शर्त अनुसार,

$10x + y + 27 = 10y + x$

अथवा, $10x - x + y - 10y + 27 = 0$

अथवा, $9x - 9y + 27 = 0$

अथवा, $9(x - y + 3) = 0$

अथवा, $x = y - 3$ (ii)

समीकरण (i) बाट x को मान समीकरण (ii) मा राख्दा,

अथवा, $y - 3 = \frac{18}{y}$

अथवा, $y^2 - 3y = 18$

अथवा, $y^2 - 3y - 18 = 0$

अथवा, $y^2 - 6y + 3y - 18 = 0$

अथवा, $y(y - 6) + 3(y - 6) = 0$

अथवा, $(y - 6)(y + 3) = 0$

अथवा, $(y - 6) = 0 \quad \therefore y = 6$

वा $(y + 3) = 0 \quad \therefore y = -3$ असम्भव छ, किनकी एक अङ्कको सङ्ख्या धनात्मक लिनुपर्दछ ।

अब, $y = 6$ समीकरण (i) मा प्रतिस्थापन गर्दा , $x = \frac{18}{y} = \frac{18}{6} = 3$

अतः दुई अङ्कको आवश्यक सङ्ख्या = $10x + y = 10 \times 3 + 6 = 36$

उदाहरण 9

एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 25 m छ । यदि बाँकी दुई भुजाहरूको नापको फरक 17 m भए बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

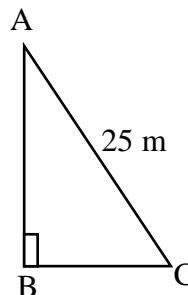
समाधान : यहाँ,

चित्रमा ABC एउटा समकोण त्रिभुज हो, जहाँ $\angle B = 90^\circ$

र कर्ण (AC) = $h = 25$ m छ ।

मानौं, आधार (BC) = $b = x$ र लम्ब (AB) = $p = y$

प्रश्नानुसार, $x - y = 17$ or, $y = x + 17$(i)



अब, समकोण त्रिभुज ABC मा $h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।

त्यसैले, $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

अथवा, $(25)^2 = (x + 17)^2 + x^2$

अथवा, $625 = x^2 + 34x + 289 + x^2$

अथवा, $2x^2 + 34x - 336 = 0$

अथवा, $2(x^2 + 17x - 168) = 0$

अथवा, $x^2 + 24x - 7x - 168 = 0$

अथवा, $x(x + 24) - 7(x + 24) = 0$

अथवा, $(x - 7)(x + 24) = 0$

अथवा, $(x - 7) = 0$. $\therefore x = 7$

वा

अथवा, $x + 24 = 0$. $\therefore x = -24$

यहाँ x भनेको आधारको नाप भएकोले $x = -24$ असम्भव छ, । त्यसैले $x = 7$ हुन्छ ।

तसर्थ, आधार (BC) = $b = x = 7$ m

र लम्बा (AB) = $p = y = 7 + 17 = 24$ m

तसर्थ, बाँकी भुजाहरूको नाप 7 m र 17 m रहेछ ।

उदाहरण 10

एउटा आयताकार चउरको परिमिति 90 meter र क्षेत्रफल 500 sq. meter छ । उक्त चउरलाई वर्गाकार बनाउन लम्बाइ वा चौडाइलाई कति प्रतिशतले घटाउनुपर्छ र किन ? कारण दिनुहोस् ।

समाधान

मानौं, आयताकार चउरको लम्बाइ (l) = x m र

चउरको चौडाइ (b) = y m

प्रश्नानुसार, आयताकार चउरको क्षेत्रफल (A) = 500 m^2

अथवा, $x \times y = 500$ [\therefore आयतको क्षेत्रफल (A) = $l \times b$]

अथवा, $y = \frac{500}{x}$ (i)

आयतकार जग्गाको परिमिति (P) = 90 m [\therefore आयतको परिमिति (P) = $2(l + b)$]

अथवा, $2(x + y) = 90$

$$\text{अथवा, } x + y = \frac{90}{2}$$

$$\text{अथवा, } x + y = 45$$

$$\text{अथवा, } y = 45 - x \dots\dots\dots(ii)$$

अब, समीकरण (ii) बाट $y = 45 - x$ मानलाई समीकरण (i), $xy = 500$

मा राख्दा,

$$\text{अथवा, } x(45 - x) = 500$$

$$\text{अथवा, } 45x - x^2 = 500$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 45x + 500 = 0$$

$$\text{अथवा, } x^2 - 25x - 20x + 500 = 0$$

$$\text{अथवा, } x(x - 25) - 20(x - 25) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 25)(x - 20) = 0$$

$$\text{अथवा, } (x - 25) = 0. \quad \therefore x = 25$$

वा

$$\text{अथवा, } x - 20 = 0. \quad \therefore x = 20$$

$$\text{यदि } x = 25 \text{ भए } y = 45 - x = 45 - 25 = 20$$

$$\text{यदि } x = 20 \text{ भए } y = 45 - x = 45 - 20 = 25$$

तसर्थ, उक्त चउरको लम्बाइ 25 m भए चौडाइ 20 m हुन्छ। त्यसैगरी, चउरको लम्बाई 20m भए चौडाइ 25 m हुन्छ।

उक्त चउरलाई वर्गाकार बनाउन लम्बाइ र चौडाइ बराबर हुनु पर्दछ।

त्यसैले लम्बाइ वा चौडाइ 25 m बाट 5 m घटायौं भने सो चउर वर्ग बन्दछ।

$$\text{घटाउनु पर्ने प्रतिशत} = \frac{5}{25} \times 100 \% = 20 \% \text{ हुन्छ।}$$

अतः 20% ले लामो भाग (लम्बाइ वा चौडाइ) लाई घटायौं भने सो चउर वर्ग बन्दछ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

उदाहरण 1 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

1. (क) यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याको वर्गबाट 17 घटाउँदा परिणाम 152 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

- (ख) यदि एउटा प्राकृतिक सङ्ख्याको वर्गमा 7 जोडियो भने योगफल 71 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) यदि एउटा सङ्ख्याको वर्गबाट 100 घटाइयो भने 21 बाँकी रहन्छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याहरूको वर्गको दोब्बरबाट 7 घटाइयो भने 91 बाँकी रहन्छ भने सोसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) यदि एउटा प्राकृतिक सङ्ख्याको वर्गबाट 2 घटाइयो भने 7 बाँकी रहन्छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (च) यदि एउटा सङ्ख्याको वर्गबाट 11 घटाइयो भने 89 बाँकी रहन्छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (छ) यदि एउटा सङ्ख्याहरूको वर्गको दोब्बरबाट 17 घटाइयो भने 55 बाँकी रहन्छ भने उक्तसङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ज) यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्याहरूको वर्गको दोब्बरबाट 3 घटाइयो भने 285 बाँकी रहन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (झ) यदि एउटा धनात्मक सङ्ख्या र त्यसको वर्गको योगफल 72 हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 2 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

2. (क) यदि दुईओटा धनात्मक सङ्ख्याहरूको योगफल 7 र गुणनफल 12 भए ति सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) यदि दुईओटा सङ्ख्याहरूको योगफल 10 र गुणनफल 24 छ । ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) यदि दुईओटा सङ्ख्याहरूको योगफल 27 र गुणनफल 182 भए ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 3 र 4 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

3. (क) कुनै दुई ओटा क्रमागत जोर सङ्ख्याहरूको गुणनफल 168 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् । (12, 14)
- (ख) कुनै दुई ओटा क्रमागत बिजोर सङ्ख्याहरूको वर्गको गुणनफल 143 हुन्छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) यदि कुनै सङ्ख्या र त्यसको व्यूत्क्रमको योगफल $\frac{10}{3}$ भए सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 5 र 6 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

4. (क) दिदी र भाइको हालको उमेरको अन्तर 4 वर्ष छ । उनीहरूको उमेरको गुणनफल 221 छ भने दिदी र भाइको हालको उमेर कति हुन्छ ?

- (ख) दुईजना दाजु र भाइको हालको उमेरको योगफल 22 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 120 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) दुई जना दिदी र बहिनीको हालको उमेरको अन्तर 3 वर्ष र उनीहरूको उमेरको गुणनफल 180 छ भने तिनीहरूको हालको उमेर कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) आमा र छोरीको हालको उमेरको योगफल 60 वर्ष छ । 10 वर्षपछि उनीहरूको उमेरको गुणनफल 1500 हुनेछ । उनीहरूको अहिलेको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) दिदी र भाइको हालको उमेरको अन्तर 6 वर्ष छ । तिनीहरूको उमेरको गुणनको सङ्ख्यात्मक मान उमेरको योगफलको 4 गुणा हुन्छ भने दिदी र भाइको हालको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 7 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

5. (क) दिदी र बहिनीको हालको उमेर क्रमशः 32 वर्ष र 7 वर्ष छ । कति वर्षअघि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 116 थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) दाजु र भाइको हालको उमेर क्रमशः 14 वर्ष र 10 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 285 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) अहिले बाबु र छोरोको उमेर क्रमशः 35 वर्ष र 1 वर्ष छ । कति वर्षपछि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 240 हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) जेठो दाजु र कान्छो भाइको हालको उमेर क्रमशः 35 वर्ष र 27 वर्ष छ । कति वर्षअघि तिनीहरूको उमेरको गुणनफल 425 थियो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 8 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

6. (क) दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको गुणनफल 18 छ । यदि सो सङ्ख्यामा 27 जोडियो भने अङ्कहरूको स्थान बदलिन्छ । उक्त सङ्ख्या कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) दुईअङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको गुणनफल 24 छ । यदि त्यो सङ्ख्यामा 45 जोड्दा सङ्ख्याको अङ्कहरूको स्थान परिवर्तन हुन्छ भने सो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्या त्यसका अङ्कहरूको योगफलको 4 गुणा र गुणनफलको 2 गुणा छ भने उक्त सङ्ख्या कति होला? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) 10 र 100 को बिचमा पर्ने एउटा सङ्ख्या यसका अङ्कहरूको योगफलको 4 गुणा छ । यदि दुई अङ्कहरूको गुणनफल 8 छ भने उक्त सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ङ) दुई अङ्कले बनेको एउटा सङ्ख्यामा अङ्कहरूको गुणनफल 18 र योगफल 9 छ भने त्यो सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 9 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

7. (क) एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण 13 मिटर छ । यदि बाँकी दुई भुजाहरूको नापको फरक 7 मिटर भए बाँकी भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

- (ख) एउटा समकोणी त्रिभुजको कर्ण छोटो भुजाको दोब्बर भन्दा पनि 6 मिटरले बढी छ । यदि बाँकी रहेको भुजा कर्णभन्दा 2 मिटरले कम छ भने भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा समकोण त्रिभुजका समकोण बनाउने भुजाहरू त्यसको कर्णभन्दा 5 से.मि. र 10 से.मि. ले क्रमशः कम छन् भने त्रिभुजका भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (घ) एउटा समकोण त्रिभुजका समकोण बनाउने भुजाहरू त्यसको कर्णभन्दा 2 से.मि. र 4 से.मि.ले क्रमशः कम छन् भने त्रिभुजका भुजाहरूको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 10 अनुसार समाधान गर्ने प्रश्नहरू

8. (क) एउटा आयताकार कोठाको क्षेत्रफल 150 वर्ग फिट र परिमिति 50 फिट छ । उक्त कोठाको लम्बाइ र चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल 750 वर्ग मिटर र परिमिति 110 मिटर छ । उक्त जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) एउटा आयताकार जग्गाको क्षेत्रफल 2000 वर्ग मिटर र परिमिति 180 मिटर भए उक्त जग्गाको लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् । सो जग्गालाई वर्गाकार बनाउन लम्बाइ अथवा चौडाइलाई कति प्रतिशतले घटाउनुपर्छ र किन ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) 13 (ख) 8 (ग) ± 11
 (घ) 7 (ङ) 3 (च) ± 10
 (छ) ± 6 (ज) 12 (झ) 8
2. (क) 4, 3 or 3, 4 (ख) 6, 4 or 4, 6 (ग) 14, 13 or 13, 14
3. (क) 12, 14 (ख) 11, 13 (ग) $3 \text{ or } \frac{1}{3}$
4. (क) 13, 13 (ख) 12, 10 (ग) 12, 15
 (घ) 40, 20 (ङ) 12, 6
5. (क) 3 years (ख) 5 years (ग) 5 years
 (घ) 10 years
6. (क) 36 (ख) 38 (ग) 36
 (घ) 24 (ङ) 36 or 63
7. (क) 5 cm, 12 cm (ख) 10 cm, 24 cm, 26 cm
 (ग) 15 cm, 20 cm, 25 cm (घ) 10 cm, 8 cm, 6 cm
8. (क) 5, 10 or 10, 15 (ख) 30, 25 or 25, 10
 (ग) लम्बाइ 20% घटाउने वा चौडाइ, 25% बढाउने

बिजीय भिन्न (Algebraic Fraction)

8.0 परिचय (Introduction)

तल केही बिजीय अभिव्यञ्जकहरू दिइएको छ । बिजीय अभिव्यञ्जकहरूसँग सम्बन्धित प्रश्नहरूको उत्तर सँगै दिइएको छ तिनीहरूको अध्ययन पनि गर्नुहोस् ।

- (क) $3x^2 - 9x$ (ख) $4m^2 - 9n^2$ (ग) $(a - b)^2$
 (घ) $a^3 - b^3$ (ङ) $x^2 + 3x + 2$ (च) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ आदि ।

(अ) माथि दिइएका अभिव्यञ्जकहरूमा कति कति ओटा पदहरू छन् ?

उत्तर : (क), (ख) र (घ) मा दुईओटा मात्र पदहरू छन् तर (ग), (ङ) र (च) मा तीनओटा मात्र पदहरू छन् ।

(आ) के दिइएका प्रत्येक अभिव्यञ्जकहरूको खण्डिकरण गर्न सकिन्छ ?

उत्तर : दिइएका सबै अभिव्यञ्जकहरूको खण्डिकरण गर्न सकिन्छ ।

(इ) तिनीहरूका गुणन खण्डहरू के के हुन् ?

खण्डिकरण गरेपछि गुणनखण्डहरू के के हुन् थाहा पाउन सकिन्छ । गुणनखण्डहरू तल दिइएको छ ।

(क) $3x^2 - 9x = 3x(x-3)$ । त्यसैले अभिव्यञ्जक $3x^2 - 9x$ का गुणनखण्डहरू x र $(x-3)$ हुन् । त्यसैगरी,

(ख) $4m^2 - 9n^2 = (2m)^2 - (3n)^2 = (2m + 3n)(2m - 3n)$ र गुणनखण्डहरू $(2m + 3n)$ र $(2m - 3n)$ हुन् ।

(ग) $(a - b)^2 = (a + b) \times (a - b)$ र गुणनखण्डहरू $(a + b)$ र $(a - b)$ हुन् ।

(घ) $a^3 - b^3$ का गुणनखण्डहरू के के हुन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) $x^2 + 3x + 2$ का गुणनखण्डहरू के के हुन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) $a^4 + a^2b^2 + b^4$ अभिव्यञ्जकको गुणनखण्डहरू (a^2+ab+b^2) र (a^2-ab+b^2) हुन्, कसरी ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

तालिकामा विजीय भिन्नहरू दिइएको छ । तिनीहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूको उत्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।

क) $\frac{4}{a-b} - \frac{2}{a-b}$	ख) $\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{y}{4x^2-y^2}$
ग) $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$	घ) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}$

- (क) समान हर भएका विजीय भिन्नहरू छुट्टाउनुहोस् ।
 (ख) असमान हर भएका विजीय भिन्नहरू छुट्टाउनुहोस् ।
 (ग) के सबै विजीय भिन्नहरूलाई परिभाषित गर्न सकिन्छ ?
 (घ) कुन अवस्थामा विजीय भिन्नहरूलाई परिभाषित गर्न सकिदैन ?
 (ङ) x को मान कति हुँदा $\frac{1}{x-5}$ र $\frac{2}{x^2-16}$ परिभाषित हुँदैनन्, लेख्नुहोस् ।
 (च) माथि दिइएका समान हर भएका र असमान हर भएका भिन्नमा हरको म.स. र ल.स. कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

एउटै हर भएका विजीय भिन्नहरू र फरक हर भएका विजीय भिन्नहरूलाई क्रमशः समान र असमानहर भएका विजीय भिन्न भनिन्छ । विजीय भिन्नहरू परिभाषित हुनको लागि हरमा शून्य हुनु हुँदैन । विजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्दा जस्तै: माथि (क) र (ख) मा हर समान छ, त्यसैले ल.स. $(a-b)$ र $(4x^2-y^2)$ हुन्छ । तर (ग) र (घ) मा हर असमान छ, त्यसैले (ग) मा ल.स. $(x-y)$ र $(x+y)$ दुवै लिनुपर्दछ । त्यसैगरी, (घ) मा के गर्ने होला ? सोच्नुहोस् है ।

8.1 बीजीय भिन्नको सरलीकरण (Simplification of Algebraic Fractions)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका भिन्नहरूको अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर के के हुन सक्छन् ?

(क) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{23}{25}$

(ख) $\frac{x}{y}, \frac{4x^2y}{2x}, \frac{2x+7}{4x^2-49}$

- (अ) (क) मा कतिओटा भिन्नहरू राखिएका छन् ? साथै ती भिन्नहरू कस्ता प्रकारका भिन्नहरू हुन् ?
 (आ) (ख) मा राखिएका भिन्नहरू कस्ता प्रकारका भिन्नहरू हुन् ?
 (इ) (क) मा भएका भिन्नहरूका हर र अंशमा कति कति ओटा पदहरू छन् ?
 (ई) (ख) मा भएका प्रत्येक भिन्नहरूको हरमा बराबर पदहरू छन् ? के त्यसैगरी अंशमा पनि बराबर पदहरू छन् त ?

मथि (क) मा तीनओटा भिन्नहरू छन् । ती सबै भिन्नहरूका हर र अंश दुवैमा अचल राशिहरू (सङ्ख्याहरू) मात्र रहेका छन् त्यसैले तिनीहरूलाई सांख्यिक भिन्न भनिन्छ । त्यसैगरी, (ख) मा पनि तीनओटा भिन्नहरू दिइएको छ । जसको हर र अंश दुवैमा चल राशिहरू छन् । हर र अंश दुवैमा विजीय पदहरू भएकोले तिनीहरूलाई विजीय भिन्नहरू भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

तलसमान र असमान हर भएका भिन्नहरू दिइएको छ । तिनीहरूको सरल गर्नुहोस् ।

$$(क) \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} \quad (ख) \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \quad (ग) \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}$$

समान र असमान हर भएको भिन्न त छुट्याउन त सकिन्छ तर यिनीहरूको सरलीकरण कसरी गर्ने होला ? कविता निकै चिन्तित मुद्रामा भेटिन्छन् । सोही बेलामा उनको छिमेकी दिदी आइपुग्नुहुन्छ र भन्नुहुन्छ

दिदी : कविता के भयो तिमीलाई । सन्चो छैन कि क्या हो ?

कविता : दिदी नमस्कार ! शरीरमा त सन्चै छ तर एउटा गणितको समस्याले गर्दा मनमा भने सन्चो छैन ।

दिदी : नमस्कार ! के छ त्यस्तो मैले सहयोग गर्न सक्छु कि ।

कविता : प्रश्नहरू (गणितका समस्याहरू) देखाउँदै । यिनीहरूको सरलीकरण कसरी गर्ने ?

दिदी : दिइएका भिन्नहरूलाई सरल गर्दा भिन्नको हर समान वा असमान के छ पहिला त्यो कुरालाई ध्यान दिनुपर्दछ । ल भन त कुन प्रश्नहरूमा हर समान छ र कुन प्रश्नहरूमा हर असमान छ ?

कविता : प्रश्न (क) मा मात्र हर समान छ बाँकी (ख) र (ग) मा हरहरू असमान छन् दिदी ।

दिदी : हो तिमीले ठीक भन्यौ कविता । अब हर समान भएमा अंशहरूको आवश्यक क्रिया मात्र गरेर एउटा हर मात्र ल.स. लिए पुग्छ । जस्तै: प्रश्न (क) मा $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y}$ मा समान हरका रूपमा $(x-y)$ दिएको छ, त्यसैले यसको सरल निम्नानुसार गरिन्छ ।

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y} \\ &= \frac{x-y}{x-y} \quad (\because \text{यसमा हर समान थियो र एउटा मात्र हर राखेर अंशमा घटाउ क्रिया गरियो।}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

कविता : आहा ! यो त कति सजिलो तरीकाले गर्नु भयो । मैले बुझे नि दिदी । तर (ख) र ग भने कसरी गर्ने हो नि दिदी तिनीहरूको त हर पनि समान छैनन् ।

दिदी : ल हेर कति चाँडो बुभ्केकी नि । ल सुन र हेर मैले तिमीलाई (ख) र (ग) पनि बुभाउँछु । तिनीहरूमा हर असमान छ त्यसैले तिनीहरूको ल.स. पत्ता लगाउनुपर्छ ।

कविता : त्यो त हो दिदी ल.स.कति आउँछ कुनि ?

दिदी : ल ल यता ध्यान देउ बहिनी । जस्तै: प्रश्न (ख) मा $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ मा हर असमान छन् । यहाँ दुवै हरको ल.स.का रूपमा $(x-y)(x+y)$ हुन्छ, त्यसैले यसको सरल निम्नानुसार गरिन्छ ।

$$\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} = \frac{x(x+y) - y(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \text{ बुभ्यौ त ? ल सुन}$$

यहाँ के गर्थौं भने हर असमान थियो जसले गर्दा दुवै हरको ल.स. लिएर हरमा $(x-y)(x+y)$ राखियो र अंशमा x सँग $(x+y)$ तथा y सँग $(x-y)$ गुणन गरेर सरलीकरण गरियो ।

कविता : के (ख) मा जस्तै (ग) मा पनि गर्न सकिन्छ त ?

दिदी : ल हेर त (ग) मा दुवै हर असमान छ । त्यसैले दोस्रो हरको अभिव्यञ्जकलाई खण्डिकरण गर्दा गुणनखण्डहरू $(a-b)$ र $(a+b)$ हुन्छ र पहिलो तथा दोस्रो हरको ल.स. = $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ हुन्छ । अनि यसलाई निम्नानुसार सरलीकरण गरिन्छ ।

$$\frac{a}{a-b} - \frac{ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{a(a+b) - ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$$

बुभ्यौ त कविता ल.स. कसरी लियो ? र सरलीकरणमा केही समस्या छ कि ?

कविता : आहा ! क्या रमाइलो । सबै कुरा बुभ्के नि । धेरै धेरै धन्यवाद दिदी ।

दिदी : तिमीलाई केही कुरा सिकाउन पाउँदा म पनि निकै खुसी छु । तिमीले बुभ्के त भन्यौ त्यसो भए मैले यहाँ दिएका प्रश्नहरूको सरल गर है त । म भोलि यतातिर आउँदा हेर्छु । आजलाई मलाई ढिला पनि भयो म गएँ है त बाइ बाइ ।

$$(क) \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b} \qquad (ख) \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}$$

कविता : हस् दिदी । बाइ बाइ । फेरी पनि धेरै धेरै धन्यवाद दिदी ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस (Simplify): $\frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b}$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2}{a+b} - \frac{b^2}{a+b} \\ &= \frac{a^2 - b^2}{a+b} \quad [\because \text{दुवै पदको हर } (a+b) \text{ भएकोले ल.स. } (a+b)] \\ &= \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\ &= a - b \end{aligned}$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}$

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{1(a+b) - 1(a-b)}{(a-b)(a+b)} \quad [\because \text{दुवै पदको हर फरक छ त्यसैले ल.स. } (a-b)(a+b) \text{ दवै लिने}] \\ &= \frac{a+b-a+b}{a^2-b^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{2b}{a^2-b^2} \quad [\because +a \text{ र } -a \text{ काटियो अनि } b \text{ र } b \text{ जोड्दा } 2b \text{ भयो}] \end{aligned}$$

उदाहरण 3

सरल गर्नुहोस्: $\frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n}$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n} \\ &= \frac{(m+n)^2 + (m-n)^2}{(m-n)(m+n)} \quad [\because \text{दुवै पदको हर फरक छ त्यसैले ल.स. } (m-n)(m+n) \text{ दवै लिने}] \\ &= \frac{m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2} \quad [\because (a+b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2), (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)] \\ & \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \\ &= \frac{2(m^2 + n^2)}{m^2 - n^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 4

सरल गर्नुहोस् (Simplify): $\frac{x^3+1}{x^2-x+1} + \frac{x^3-1}{x^2+x+1}$

समाधान

$$\begin{aligned} &= \frac{x^3+1}{x^2-x+1} + \frac{x^3-1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \quad \{ \because \text{पहिलो पदको अंशमा } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= (x+1) + (x-1) \quad \{ \because \text{दोस्रो पदको अंशमा } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \} \\ &= 2x \end{aligned}$$

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् : (क) $\frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{4a^2-9b^2}$ (ख) $\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a+b}$

(क) समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{4a^2-9b^2} \\ &= \frac{1}{2a-3b} - \frac{a+b}{(2a-3b)(2a+3b)} \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\ &= \frac{(2a+3b)-(a+b)}{(2a-3b)(2a+3b)} \quad [\because \text{ल.स. } (2a-3b)(2a+3b) \text{ दुवै लिने}] \\ &= \frac{(a+2b)}{4a^2-9b^2} \quad [\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2] \end{aligned}$$

(ख) समाधान

$$\begin{aligned} &\text{यहाँ, } \frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a+b} \\ &= \frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a+b} \\ &= \frac{4a^2+b^2}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{2a-b}{2a+b} \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)] \\ &= \frac{4a^2+b^2 - (2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)} \quad [\because (a-b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)] \\ &= \frac{4a^2+b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2}{4a^2-b^2} \\ &= \frac{4ab}{4a^2-b^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 6

सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{x}{y^2-x^2}$

समाधान : यहाँ,

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{x}{y^2-x^2}$$

$$= \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y^2-x^2}$$

$$= \frac{1(x+y) + 1(x-y)}{(x-y)(x+y)} - \frac{x}{x^2-y^2} \quad [\because \text{पहिलो दुईओटा पदमा लस लिने र तेस्रो पदमा } y^2 - x^2$$

मा (-) साभा लिदाँ $x^2 - y^2$ हुन्छ]

$$= \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{x}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{2x-x}{x^2-y^2} \quad [\because x^2 - y^2 \text{ ल.स.लिने}]$$

$$= \frac{x}{x^2-y^2}$$

उदाहरण 7

सरल गर्नुहोस्: $\frac{x-3}{x^2-x-6} - \frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{2x-1}{2x^2+5x-3}$

समाधान : यहाँ,

$$= \frac{x-3}{x^2-x-6} - \frac{2x+5}{x^2+5x+6} + \frac{2x-1}{2x^2+5x-3}$$

$$= \frac{x-3}{x^2-(3-2)x-6} - \frac{2x+5}{x^2+(3+2)x+6} + \frac{2x-1}{2x^2+(6-1)x-3} \quad [\because \text{तीनओटै पदको हरमा खण्डिकरण गर्ने}]$$

$$= \frac{x-3}{x^2-3x+2x-6} - \frac{2x+5}{x^2+3x+2x+6} + \frac{2x-1}{2x^2+6x-1x-3}$$

$$= \frac{x-3}{x(x-3)+2(x-3)} - \frac{2x+5}{x(x+3)+2(x+3)} + \frac{2x-1}{2x(x+3)-1(x+3)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+2)} - \frac{2x+5}{(x+3)(x+2)} + \frac{2x-1}{(x+3)(2x-1)}$$

$$= \frac{(x-3)(x+3) - (2x+5)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)} \quad [\because \text{पहिलो दुई पदको लस } (x-3)(x+2)(x+3)$$

लिँदा]

$$= \frac{x^2-9 - (2x^2-6x+5x-15) + 1(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 - 9 - 2x^2 + 6x - 5x + 15 + x^2 + 2x - 3x - 6}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x^2 + x - x + 6 - 6}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{0}{(x-3)(x+2)(x+3)}$$

$$= 0 \quad [\because 0 \text{ लाई जुनसुकै पद वा सङ्ख्याले भाग गर्दा नतिजा 0 नै हुन्छ]$$

उदाहरण 8

$$\text{सरल गर्नुहोस: } \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

समाधान : यहाँ,

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+c+b)(a+c-b)} + \frac{(b+a-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} + \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)}$$

$$= \frac{(a+b-c)}{(a+c+b)} + \frac{(b-a+c)}{(a+b+c)} + \frac{(c+a-b)}{(b+c+a)}$$

$$= \frac{(a+b-c)}{(a+b+c)} + \frac{(b-a+c)}{(a+b+c)} + \frac{(c+a-b)}{(a+b+c)}$$

$$= \frac{a+b-c+b-a+c+c+a-b}{a+b+c}$$

$$= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

[\because तीनओटै पदको हर र अंशमा $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ को सूत्र प्रयोग गर्ने]

उदाहरण 9

$$\text{सरल गर्नुहोस: } \frac{2x-y}{4x^2-2xy+y^2} - \frac{2x+y}{4x^2+2xy+y^2} + \frac{16x^3}{16x^4+4x^2y^2+y^4}$$

समाधान : यहाँ,

$$= \frac{2x-y}{4x^2-2xy+y^2} - \frac{2x+y}{4x^2+2xy+y^2} + \frac{16x^3}{16x^4+4x^2y^2+y^4}$$

$$= \frac{(2x-y)(4x^2+2xy+y^2) - (2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}{(4x^2-2xy+y^2)(4x^2+2xy+y^2)} + \frac{16x^3}{(4x^2)^2 + (y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

$$= \frac{\{(2x)^3 - (y)^3\} - \{(2x)^3 + y^3\}}{(4x^2-2xy+y^2)(4x^2+2xy+y^2)} + \frac{16x^3}{(4x^2+y^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot y^2 + 4x^2y^2}$$

[\because तेस्रो पदमा $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ सूत्र प्रयोग गर्दा]

$$\begin{aligned}
&= \frac{8x^3 - y^3 - 8x^3 - y^3}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} + \frac{16x^3}{(4x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2} \\
&= \frac{-2y^3}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} + \frac{16x^3}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} \\
&= \frac{-2y^3 + 16x^3}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} \\
&= \frac{2(8x^3 - y^3)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} \\
&= \frac{2\{(2x)^3 - (y)^3\}}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} \\
&= \frac{2(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} \quad [\because \text{अंशमा } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ सूत्र प्रयोग गर्दा}] \\
&= \frac{2(2x - y)}{(4x^2 - 2xy + y^2)}
\end{aligned}$$

अर्को तरिका

समाधान : यहाँ,

$$\begin{aligned}
&= \frac{2x - y}{4x^2 - 2xy + y^2} - \frac{2x + y}{4x^2 + 2xy + y^2} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{\{(2x)^3 - (y)^3\} - \{(2x)^3 + y^3\}}{\{(4x^2 + y^2) - 2xy\} \{(4x^2 + y^2) + 2xy\}} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{8x^3 - y^3 - 8x^3 - y^3}{(4x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{-2y^3}{(4x^2)^2 + 2 \times 4x^2y^2 + (y^2)^2 - 4x^2} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{-2y^3}{(16x^4 + 8x^2y^2 + y^4 - 4x^2)} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{-2y^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} + \frac{16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{-2y^3 + 16x^3}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{2(8x^3 - y^3)}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \quad [\because \text{अंशमा 2 साभक्त लिदाँ }]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\{(2x)^3 - (y)^3\}}{16x^4 + 4x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{2(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)}{(4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2)} [\because \text{अंशमा } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2) \text{ को सूत्र प्रयोग गर्दा र हरमा } (4x^2 - 2xy + y^2)(4x^2 + 2xy + y^2) = 16x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \text{ प्रयोग गर्दा}] \\
&= \frac{2(2x - y)}{(4x^2 - 2xy + y^2)}
\end{aligned}$$

उदाहरण 10

सरल गर्नुहोस् : $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2} - \frac{2}{a^2-1}$

समाधान : यहाँ, $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)^2} - \frac{2}{a^2-1}$

$$= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a-1)(a-1)} - \frac{2}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1(a+1) - 2(a-1)}{(a-1)^2(a+1)}$$

$$= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{a+1-2a+2}{(a-1)^2(a+1)}$$

$$= \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{3-a}{(a-1)^2(a+1)}$$

$$= \frac{1(a-1)^2 + (a+1)(3-a)}{(a+1)^2(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1 + 3a - a^2 + 3 - a}{(a+1)^2(a-1)^2}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 + 3a - 3a + 4}{(a+1)^2(a-1)^2}$$

$$= \frac{4}{(a^2-1)^2}$$

परियोजना कार्य

- (क) कुनै 2/2 ओटा एउटै हर भएका एउटै हर नभएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरू लेख्नुहोस् । तिनीहरूमा भएको चल राशि कति हुँदा ती अभिव्यञ्जकहरूलाई परिभाषित गर्न सकिन्छ ? चल राशि कति हुँदा ती अभिव्यञ्जकहरूलाई परिभाषित गर्न सकिँदैन, लेख्नुहोस् ।

- (ख) बीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्दा खण्डीकरण एउटा महत्वपूर्ण पक्ष हो यस भनाइलाई कसरी पष्ट्याउन सकिन्छ ? उदाहरण सहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।
- (ग) बीजीय भिन्नहरूको सरलीकरण गर्दा म.स. र ल.सको महत्वपूर्ण भूमिका हुन्छ, यस भनाइलाई कसरी पुष्टि गर्न सकिन्छ ? उदाहरण सहित प्रष्ट पार्नुहोस् ।

अभ्यास 8

- (क) $3x - 8y$ लाई 0 ले भाग गर्दा नतिजा कति हुन्छ ?

(ख) $\frac{x^2 - y^2}{x - 11}$ अपरिभाषित भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
- x को मान कति हुँदा दिइएका अभिव्यञ्जकहरू अपरिभाषित हुन्छन् ? लेख्नुहोस् ।

(क) $\frac{8}{x - 3}$ (ख) $\frac{7x + 6}{x^2 - 25}$ (ग) $\frac{x^2 y}{3x - 27}$ (घ) $\frac{5x - 20}{6x - 3}$
- सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{x - y} - \frac{y}{x - y}$ (ख) $\frac{a}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a^2 - b^2}$ (ग) $\frac{a + 5}{a + 3} - \frac{2}{a + 3}$

(घ) $\frac{4x}{x + y} + \frac{4y}{x + y}$ (ङ) $\frac{3x}{3x - 4y} + \frac{4y}{4y - 3x}$ (च) $\frac{x^2 - y^2}{xyz} + \frac{y^2 - z^2}{xyz} + \frac{z^2 - x^2}{xyz}$
- सरल गर्नुहोस्:

(क) $\frac{a}{a - b} + \frac{b}{b - a}$ (ख) $\frac{1}{b - c} - \frac{b + c}{b^2 - c^2}$ (ग) $\frac{1}{m - n} + \frac{1}{m + n}$

(घ) $\frac{1}{m + n} + \frac{n}{m^2 - n^2}$ (ङ) $\frac{3}{x^2 - 4} + \frac{1}{(x - 2)^2}$
- सरल गर्नुहोस्:

(क) $\frac{p + q}{p - q} + \frac{p - q}{p + q}$ (ख) $\frac{a + 5}{a - 5} + \frac{a - 5}{a + 5}$ (ग) $\frac{2a + b}{2a - b} + \frac{2a - b}{2a + b}$
- सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{p^3 + q^3}{p^2 - pq + q^2} + \frac{p^3 - q^3}{p^2 + pq + q^2}$ (ख) $\frac{4x^2 + 25y^2}{4x^2 - 25y^2} - \frac{2x - 5y}{2x + 5y}$ (ग) $\frac{4x^3}{x^4 + a^4} - \frac{8x^7}{x^8 - a^8}$
- सरल गर्नुहोस्:

(क) $\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^2 - 4}$ (ख) $\frac{1}{x - 3} - \frac{6}{x^2 - 9}$ (ग) $\frac{9x^2 + y^2}{9x^2 - y^2} - \frac{3x - y}{3x + y}$

(घ) $\frac{16a^2 + b^2}{16a^2 - b^2} - \frac{4a - b}{4a + b}$ (ङ) $\frac{a^2 + 3ab - 4b^2}{a^2 - 16b^2} + \frac{b}{a - 4b}$ (च) $\frac{2a^2 - ab - 6b^2}{4a^2 - 9b^2} - \frac{2ab}{4a^2 - 6ab}$

8. सरल गर्नुहोस्:

$$\begin{array}{ll} \text{(क)} \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} + \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{(ख)} \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a-2b} + \frac{a}{4b^2-a^2} \\ \text{(ग)} \frac{5}{1+2y} - \frac{3y}{1-2y} - \frac{4-13y}{1-4y^2} & \text{(घ)} \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2x}{xy-y^2} \\ \text{(ङ)} \frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx} & \text{(च)} \frac{x}{x-2y} - \frac{x}{x+2y} - \frac{2x^2}{x^2-4y^2} \end{array}$$

9. सरल गर्नुहोस् :

$$\begin{array}{ll} \text{(क)} \frac{2}{(x-2)(x-3)} + \frac{2}{(x-1)(3-x)} + \frac{1}{(1-x)(2-x)} & \\ \text{(ख)} \frac{2(x-3)}{(x-4)(x-5)} + \frac{x-1}{(x-4)(3-x)} + \frac{x-2}{(x-3)(5-x)} & \\ \text{(ग)} \frac{1}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{1}{x^2-3x+2} & \\ \text{(घ)} \frac{4}{x^2-3x+2} + \frac{3}{x^2-5x+6} + \frac{2}{x^2-4x+3} & \\ \text{(ङ)} \frac{2a-6}{a^2-9a+20} - \frac{a-1}{a^2-7a+12} - \frac{a-2}{a^2-8a+15} & \\ \text{(च)} \frac{a}{a^2+5a+6} + \frac{15}{a^2+9a+14} - \frac{12}{a^2+10a+21} & \end{array}$$

10. सरल गर्नुहोस् :

$$\begin{array}{ll} \text{(क)} \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-b)(c-a)} & \\ \text{(ख)} \frac{y-z}{x^2-(y-z)^2} + \frac{z-x}{y^2-(z-x)^2} + \frac{x-y}{z^2-(x-y)^2} & \\ \text{(ग)} \frac{x^2-(a-b)^2}{(x+b)^2-a^2} + \frac{a^2-(x-b)^2}{(x+a)^2-b^2} + \frac{b^2-(x-a)^2}{(a+b)^2-x^2} & \\ \text{(घ)} \frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2} + \frac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2} + \frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2} & \end{array}$$

11. सरल गर्नुहोस् :

$$\begin{array}{ll} \text{(क)} \frac{x+3}{x^2+3x+9} + \frac{x-3}{x^2-3x+9} - \frac{54}{x^4-9x^2+81} & \\ \text{(ख)} \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} - \frac{2b^3}{a^4+a^2b^2+b^4} & \\ \text{(ग)} \frac{x-2}{x^2-2x+4} + \frac{x+2}{x^2+2x+4} - \frac{16}{x^4+4x^2+16} & \end{array}$$

$$(घ) \frac{a-5}{a^2-5a+25} + \frac{a+5}{a^2+5a+25} + \frac{250}{a^4+25a^2+625}$$

$$(ङ) \frac{1}{1-x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} - \frac{2x}{x^4+x^2+1}$$

$$(च) \frac{b+2}{1+b+b^2} - \frac{b-2}{1-b+b^2} - \frac{2b^2}{1+b^2+b^4}$$

12. सरल गर्नुहोस् :

$$(क) \frac{2}{a^2-1} + \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2}$$

$$(ख) \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x^2} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$(ग) \frac{1}{4(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{4(1+\sqrt{x})} + \frac{2\sqrt{x}}{4(1-x)}$$

$$(घ) \frac{1}{8(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{8(1+\sqrt{x})} + \frac{2\sqrt{x}}{8(1-x)}$$

उत्तर

1. (क) अपरिभाषित हुन्छ (ख) 11

2. (क) 3 (ख) ± 5 (ग) 9 (घ) $\frac{1}{2}$

3. (क) 1 (ख) $\frac{1}{a+b}$ (ग) 1 (घ) 4 (ङ) 1 (च) 0

4. (क) 1 (ख) 0 (ग) $\frac{2m}{m^2-n^2}$ (घ) $\frac{m}{m^2-n^2}$ (ङ) $\frac{4(x-1)}{(x+2)(x-2)^2}$

5. (क) $\frac{2(p^2+q^2)}{p^2-q^2}$ (ख) $\frac{2(a^2+25)}{a^2-25}$ (ग) $\frac{2(4a^2+b^2)}{4a^2-b^2}$

6. (क) 2p (ख) $\frac{20xy}{4x^2-25y^2}$ (ग) $\frac{4x^3}{a^4-x^4}$

7. (क) $\frac{1}{x+2}$ (ख) $\frac{1}{x+3}$ (ग) $\frac{6xy}{9x^2-y^2}$

(घ) $\frac{8ab}{16a^2-b^2}$ (ङ) $\frac{a}{a-4b}$ (च) $\frac{a-3b}{2a-3b}$

घाताङ्क (Indices)

9.0 परिचय (Introduction)

दिइएको अवस्थामा सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर अध्ययन गर्नुहोस् ।

(क) $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = \dots\dots\dots?$

(ख) $(3^3)^2 \times (3^2)^3 = \dots\dots?$ (ग) $\frac{4^5}{4^3} = \dots\dots\dots?$

(घ) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \dots\dots?$ (ङ) $2^0 = \dots\dots\dots?$

(च) $2^{-3} = \dots\dots\dots?$ (छ) $\sqrt[3]{6} = \dots\dots\dots?$

i) के माथि दिइएका समस्याहरूमा घाताङ्कको प्रयोग गर्न सकिन्छ ?
> सकिन्छ ।

ii) माथि दिइएका समस्याहरूको खाली स्थानमा के लेख्ने होला ?

(क) $(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^5 \times 2^6 = 2^{11}$ हुन्छ ।

(ख) $(3^3)^2 \times (3^2)^3 = 3^6 \times 3^6 = 3^{6+6} = 3^{12}$ हुन्छ ।

(ग) $\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$ हुन्छ । (घ) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$ हुन्छ ।

(ङ) $2^0 = 1$ हुन्छ । (च) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ हुन्छ । (छ) $\sqrt[3]{6} = 6^{\frac{1}{3}}$ हुन्छ ।

iii) (क) मा घाताङ्कको कुन नियम प्रयोग हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

(क) मा घाताङ्कको नियम $x^m \times x^n = x^{m+n}$ को प्रयोग हुन्छ ।

iv) घाताङ्क सम्बन्धी आवश्यक सबै नियमहरू तल दिइएको तिनलाई अध्ययन गर्नुहोस् ।

घाताङ्क सम्बन्धी नियमहरू यस प्रकार रहेका छन् ।

(1) यदि $x \neq 0$ भएमा $x^m \times x^n = x^{m+n}$ र $x^m \times x^{-n} = x^{m-n}$ हुन्छ, अर्थात् जसका आधार एउटै हुन्छन् । त्यसका घाताङ्कहरू जोड्नुपर्दछ ।

- (2) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ हुन्छ । त्यसैले आधार एउटै भएका पदहरू बीच भाग क्रिया गर्दा अंशको पदको घाताङ्कबाट हरको पदको घाताङ्क घटाउनु पर्दछ ।
- (3) $(x^m)^n = x^{mn}$ घाताङ्क सहित रहेको कुनै पद वा अभिव्यञ्जकको पुनः घाताङ्क भएमा ती घाताङ्कहरू गुणन गर्नुपर्दछ ।
- (4) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ कुनै बीजीय भिन्नको घाताङ्क उही हुन्छ भने अंश र हरको घाताङ्क पनि उही हुन्छ ।
- (5) $x^0 = 1$, अर्थात् कुनै पनि पद वा अभिव्यञ्जकको घाताङ्क शून्य (Zero) भएमा त्यसको मान 1 हुन्छ ।
- (6) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ र $\frac{1}{x^{-m}} = x^m$ कुनै पद वा अभिव्यञ्जकको घाताङ्क अंशमा भए हरमा र हरमा भए अंशमा लगदा घाताङ्कको ऋणात्मक चिह्न परिवर्तन हुन्छ । अर्थात् धनात्मक भए ऋणात्मक र ऋणात्मक भए धनात्मक हुन्छ ।
- (7) कुनै पनि पद अभिव्यञ्जक मूल चिह्न (radical sign) भित्र रहेमा मूलचिह्न हटाउँदा घाताङ्कको अंशमा 1 र हरमा मूल चिह्नको अवस्था अनुरूप निर्धारण गर्नुपर्दछ ।

$$\text{जस्तै : } \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{x^2} = (x^2)^{\frac{1}{3}} = (x)^{\frac{2}{3}}$$

सारांशमा घाताङ्क सम्बन्धी नियमहरू :

- (i) $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (ii) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ (iii) $(x^m)^n = x^{mn}$
- (iv) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}$ (v) $x^0 = 1$ (vi) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ र $\frac{1}{x^{-m}} = x^m$
- (vii) $\sqrt[n]{x^m} = (x)^{\frac{m}{n}}$ (viii) $x^a = x^b \because x = x^{\frac{b}{a}}$

9.1 घाताङ्क युक्त समीकरण (Exponential Equations)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएको अवस्थालाई अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

क) $2x = 8$ के हो ? दिइएको विकल्पहरूबाट सही उत्तर छान्नुहोस् र किन सो उत्तर सही हो कारण पनि दिनुहोस् ।

- i) बीजीय पद ii) बीजीय अभिव्यञ्जक iii) रेखीय समीकरण iv) वर्ग समीकरण

ख) $2^x = 8$ के हो ?

- i) (क) र (ख) मा x को स्थानमा के फरक पाउनु भयो ? लेख्नुहोस् ।
- ii) (क) मा x को मान कति हुँदा दिइएको समीकरण सत्य हुन्छ ?
- iii) (ख) मा x को मान कति हुँदा दिइएको समीकरण सत्य हुन्छ ?
- iv) के $2^x = 8$ घाताङ्क युक्त समीकरण हो ? हो भने किन हो र होइन भने किन होइन ? कारण पनि दिनुहोस् ।

(क) मा x एउटा चल राशि हो जुन आधार पनि हो त्यसकारण $2x = 8$ एउटा रेखीय समीकरण हो तर (ख) मा x घाताङ्कमा रहेको चल राशि हो त्यसकारण $2^x = 8$ एउटा **घाताङ्क युक्त समीकरण (Exponential Equations)** हो । (क) मा x को मान 4 भयो भने दिइएको समीकरण सत्य हुन्छ तर (ख) मा x को मान कति भएमा दिइएको समीकरण सत्य हुन्छ ? तल दिएको तालिका हेरौं त ।

$2^x = 8$	x						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$2^{-2} = \frac{1}{4}$	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

पक्कै पनि यहाँहरूले थाहा पाइसक्नु भएको हुनुपर्दछ x को मान कति हुँदा समीकरण सत्य हुँदो रहेछ ? के x को मान 3 हुँदा सत्य हो ?

$2^x = 8$ घाताङ्क युक्त समीकरण हो किनकी चल राशि x आधार 2 को घाताङ्कको रूपमा रहेको छ ।

तलको तालिका हेरी खाली ठाउँ भर्नुहोस् र केही नबुझेमा जानेको जो कोहीसँग छलफल गरी सिक्नुहोस् ।

$3^y = 9$	x						
	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^y	$3^{-3} = \frac{1}{27}$

क्रियाकलाप 2

तल दिइएका सम्बन्धहरूको अध्ययन गर्नुहोस् ।

(क) $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32, \dots$

(ख) $3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, \dots$

(ग) $4^1 = 4, 4^2 = 16, 4^3 = 64, 4^4 = 256, 4^5 = 1024, \dots$

माथि (क), (ख) र (ग) मा भएको जानकारीका आधारमा तल दिइएका प्रश्नहरूमा x को मान कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

a) $2^x = 32$ b) $3^x = 27$ c) $4^x = 256$

i) कति ओटा 2 गुणन गर्दा त्यसको मान 32 सँग बराबर हुन्छ ?

ii) कति ओटा 3 गुणन गर्दा त्यसको मान 27 सँग बराबर हुन्छ ?

iii) कति ओटा 4 गुणन गर्दा त्यसको मान 256 सँग बराबर हुन्छ ?

iv) घाताङ्क युक्त समीकरण हल गर्दा मुख्यतया के कस्ता कुरामा ध्यान पुराउनु जरुरी हुन्छ ?

यसलाई निम्नानुसार समाधान गरी परीक्षण गर्न सकिन्छ ।

(i)	(ii)	(iii)
$2^x = 32,$ अथवा, $2^x = 2^5$ $\therefore x = 5$ परीक्षण: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$3^x = 27,$ अथवा, $3^x = 3^3$ $\therefore x = 3$ परीक्षण: $3^5 = 3 \times 3 \times 3 = 27$	$4^x = 256,$ अथवा, $4^x = 4^4$ $\therefore x = 4$ परीक्षण: $4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

घाताङ्क युक्त समीकरण $a^x = b$ जहाँ a चला मान नै घाताङ्क हुन्छ । घाताङ्क युक्त समीकरण सम्बन्धी समस्याहरू हल गर्दा मुख्यतया निम्न कुरामा ध्यान पुर्याउनु जरुरी हुन्छ ।

(क) द्वैतिर एउटै आधार बनाउने

(ख) घाताङ्कलाई बराबर गर्ने

महत्त्वपूर्ण तथ्यहरू :

(1) यदि $a^x = a^y$ भए $x = y$ हुन्छ ।	(2) यदि $a^x = b^x$ भए $a = b$ हुन्छ ।
(3) यदि $a^x = 1$ भए $x = 0$ हुन्छ ।	(4) यदि $a^x = \frac{1}{a}$ भए $x = -1$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् : $4^x = 64$

समाधान : यहाँ,

$$4^x = 64$$

बराबर चिह्नको दुवैतिर एक पदमात्र रहेकोले दुवैतिरका आधारहरू उही बनाउनुपर्छ ।

अथवा, $4^x = 4^3$ ($\because 64 = 4 \times 4 \times 4$)

$\therefore x = 3$ (\because दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $4^{x-2} = 0.25$

समाधान : यहाँ,

$$4^{x-2} = 0.25$$

अथवा, $4^{x-2} = \frac{25}{100}$ (\because दशमलव हटाउँदा)

$$\text{अथवा, } 4^{x-2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } 4^{x-2} = (4)^{-1}$$

$$\text{अथवा, } (4)^{x-2} = (4)^{-1}$$

अथवा, $x - 2 = -1$ (\because दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

$$\text{अथवा, } x = -1 + 2$$

$$\therefore x = 1$$

उदाहरण 3

हल गर्नुहोस् : $2^{x-1} = (\sqrt{2})^x$

समाधान

यहाँ,

$$2^{x-1} = (\sqrt{2})^x$$

अथवा, $2^{x-1} = (2)^{\frac{x}{2}}$ (\because मूल चिह्न (radical sign) हटाउँदा)

अर्को तरीका

हल गर्नुहोस् : $4^{x-2} = 0.25$

समाधान : यहाँ,

$$4^{x-2} = 0.25$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = 2^{-2}$$

$$\text{अथवा, } (2)^{2(x-2)} = 2^{-2}$$

$$\text{अथवा, } 2(x-2) = -2$$

$$\text{अथवा, } x - 2 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

अथवा, $x - 1 = \frac{x}{2}$ (\because द्वैतरिका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

$$\text{अथवा, } 2x - 2 = x$$

$$\text{अथवा, } 2x - x = 2$$

$$\text{अथवा, } x = 2$$

उदाहरण 4

हल गर्नुहोस् :

$$3^{x+1} + \frac{3^{x+2}}{3} = 18$$

समाधान : यहाँ,

बराबर चिह्नको एकापट्टि रहेको दुईपदीय अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गरी एकपदीय बनाउनुपर्छ ।

$$\text{अथवा, } 3^x \times 3^1 + 3^{x+2-1} = 18 \quad [\because x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ र } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \text{ हुन्छ}]$$

$$\text{अथवा, } 3^x \times 3^1 + 3^{x+1} = 18$$

$$\text{अथवा, } 3^x \times 3^1 + 3^x \times 3^1 = 18 \quad [\because x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ हुन्छ}]$$

$$\text{अथवा, } 3^x(3+3) = 18 \quad [\because 3^x \text{ साझा लिँदा}]$$

$$\text{अथवा, } 3^x \times 6 = 18$$

$$\text{अथवा, } 3^x = \frac{18}{6}$$

$$\text{अथवा, } 3^x = 3$$

$$\text{अथवा, } 3^x = 3^1$$

अथवा, $x = 1$ (\because द्वैतरिका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनैपर्छ)

उदाहरण 5

$$\text{हल गर्नुहोस् : } 2^{3x-5} \times a^{x-2} = 2^{x-2} \times a^{1-x}$$

समाधान : यहाँ,

$$2^{3x-5} \times a^{x-2} = 2^{x-2} \times a^{1-x}$$

$$\text{अथवा, } \frac{2^{3x-5} \times a^{x-2}}{2^{x-2} \times a^{1-x}} = 1 \quad [\because \text{दायाँ पक्षले बाँया पक्षलाई भाग गर्दा}]$$

अथवा, $2^{3x-5-x+2} \times a^{x-2-1+x} = 1$ [$\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ हुन्छ]

अथवा, $2^{2x-3} \times a^{2x-3} = 1$

अथवा, $(2a)^{2x-3} = 1$ [$\because x^m \times y^m = (xy)^m$ हुन्छ]

अथवा, $(2a)^{2x-3} = (2a)^0$ [$\because x^0 = 1$ बायाँतर्फ आधार $2a$ भएकोले दायाँतर्फको 1 लाई पनि आधार $2a$ को घाताङ्क शून्य बनाएको]

अथवा, $2x - 3 = 0$ (\because दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

अथवा, $2x = 3$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

उदाहरण 6

हल गर्नुहोस् : $4^x + \frac{1}{4^x} = 16\frac{1}{16}$

समाधान :

यहाँ, $4^x + \frac{1}{4^x} = 16\frac{1}{16}$

अथवा, $4^x + \frac{1}{4^x} = \frac{257}{16}$

मानौं, $4^x = a$ (i) (\because एउटा पदको अंशमा 4^x र अर्को पदको हरमा उही 4^x हुँदा $4^x = a$ लिने)

तसर्थ, $a + \frac{1}{a} = \frac{257}{16}$

अथवा, $\frac{a^2 + 1}{a} = \frac{257}{16}$ ($\because a$ ल.स. लिँदा)

अथवा, $16(a^2 + 1) = 257a$ (\because क्रस गुण गर्दा)

अथवा, $16a^2 + 16 = 257a$

अथवा, $16a^2 - 257a + 16 = 0$

अथवा, $16a^2 - 256a - 1a + 16 = 0$ (\because गुणन गर्दा 256 हुने र जोड्दा 257 हुने गरी खण्डीकरण गर्दा)

अथवा, $16a(a - 16) - 1(a - 16) = 0$

अथवा, $(a - 16)(16a - 1) = 0$

अथवा, $a - 16 = 0$ (i) **वा** $16a - 1 = 0$ (ii)

अब, समीकरण (i) बाट

$$a - 16 = 0$$

अथवा, $a = 16$

अथवा, $4^x = 16$ (\because a को मान प्रतिस्थापन गर्दा)

अथवा, $4^x = 4^2$

$x = 2$ (\because दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

अतः x का मानहरू 2 र -2 हुन् ।

उदाहरण 7

हल गर्नुहोस्: $5 \times 4^{x+1} - 16^x = 64$

समाधान : यहाँ,

$$5 \times 4^{x+1} - 16^x = 64$$

अथवा, $5 \times (4^x \times 4) - (4^2)^x = 64$

अथवा, $20 \times 4^x - (4^x)^2 = 64$

मानौं, $4^x = a$

तसर्थ, $20a - a^2 = 64$

अथवा, $a^2 - 20a + 64 = 0$

अथवा, $a^2 - 16a - 4a + 64 = 0$

अथवा, $a(a - 16) - 4(a - 16) = 0$

अथवा, $(a - 4)(a - 16) = 0$

अथवा, $a - 4 = 0$(i)

अथवा, $a - 16 = 0$(ii)

अब, समीकरण (i) बाट

$$a - 4 = 0$$

अब, समीकरण (ii) बाट

$$16a - 1 = 0$$

अथवा, $a = \frac{1}{16}$

अथवा, $4^x = 4^{-2}$ (\because a को मान प्रतिस्थापन गर्दा

$$\frac{1}{16} = 4^{-2} \text{ हुने भएकोले}$$

$x = -2$ (\because दुवैतिरका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

अथवा, $a = 4$

$4^x = 4$ ($\because a$ को मान प्रतिस्थापन गर्दा)

$$4^x = 4^1$$

$\therefore x = 1$ (\because द्वैतिका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

अब, समीकरण (ii) बाट

$$a - 16 = 0$$

अथवा, $a = 16$

अथवा, $4^x = 16$ ($\because a$ को मान प्रतिस्थापन गर्दा)

$$अथवा, 4^x = 4^2$$

$\therefore x = 2$ (\because द्वैतिका आधारहरू बराबर भएकोले घाताङ्कहरू पनि बराबर हुनै पर्छ)

अतः x का मानहरू 1 र 2 हुन् ।

नोट: समीकरणहरूमा x का मानहरू प्रतिस्थापन गरी उत्तर मिल्छ वा मिल्दैन जाँचेर हेर्नुहोस् ।

उदाहरण 8

यदि $x^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्

$$(क) x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} \quad (ख) 2x^3 - 6x - 5 = 0$$

समाधान : यहाँ,

$$x^2 - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$अथवा, x^2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}} + 2$$

$$अथवा, x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + 2$$

$$अथवा, x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} + 2 \quad [\because (a)^2 + (b)^2 = (a + b)^2 - 2ab]$$

$$अथवा, x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \times 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} + 2 \quad [\because x^m \times y^m = (xy)^m \text{ हुन्छ}]$$

$$अथवा, x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \times 2^0 + 2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2 \times 1 + 2 \quad [\because 2^0 = 1]$$

$$\text{अथवा, } x^2 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^2 [\because - 2 + 2 = 0]$$

अथवा, $x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ (i) प्रमाणित भयो । [\because दुवै तर्फ वर्गमूल लिँदा]

(ख) समीकरण (i) को दुबैतिर घन गर्दा,

$$\text{अथवा, } x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$\text{अथवा, } x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\text{अथवा, } x^3 = 2 + 2^{-1} + 3 \times 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} \times x \quad [\because x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}]$$

$$\text{अथवा, } x^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3 \times 1 \times x \quad [\because 2^0 = 1]$$

$$\text{अथवा, } x^3 = \frac{4 + 1 + 6x}{2}$$

$$\text{अथवा, } 2x^3 = 5 + 6x$$

$$\text{अथवा, } 2x^3 - 6x - 5 = 0 \text{ प्रमाणित भयो ।}$$

परियोजना कार्य:

(क) रेखीय समीकरण (Linear equation), वर्ग समीकरण (Quadratic equation) र घाताङ्कयुक्त समीकरण (Exponential equation) मा के कुरा समानता हुन्छ, अध्ययन गरी लेख्नुहोस् । साथै यी तिनै समीकरणमा हुने फरक छुट्टाउनुहोस् ।

अभ्यास 9

1. हल गर्नुहोस्:

$$(क) 3^x = 9$$

$$(ख) 5^{x-1} = 25$$

$$(ग) \frac{1}{5^{2x-4}} = 125$$

$$(घ) 2^{x+3} = 16$$

$$(ङ) 25^{x-1} = 1$$

$$(च) 2^{3x+1} = 1$$

2. हल गर्नुहोस् :

$$(क) 25^{x+3} = \frac{1}{0.04}$$

$$(ख) 10^{3x-3} = \frac{1}{0.001}$$

$$(ग) 25^x = 0.04$$

3. हल गर्नुहोस् :

(क) $3^{x-1} = (\sqrt{3})^x$ (ख) $(\sqrt[3]{3})^{2x+5} = (\sqrt[4]{3})^{7x+5}$

(ग) $(\sqrt[3]{16})^{2x+1} = (\sqrt[4]{64})^{x+1}$ (घ) $(\sqrt{5})^{x+7} = (\sqrt[3]{5})^{2x+3}$

4. हल गर्नुहोस् :

(क) $3^{5x-4} + 3^{5x} = 82$ (ख) $2^{x+1} + 2^x = 3$ (ग) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 9$

(घ) $3^x + 3^{x+2} = \frac{10}{3}$ (ङ) $3^{x+2} + 3^{x+1} = 1\frac{1}{3}$ (च) $5^{x+1} + \frac{5^{x+2}}{5} = 50$

5. हल गर्नुहोस् :

(क) $5^{3x-5} \times a^{x-2} = 5^{x-2} \times a^{1-x}$ (ख) $2^{x-4} = 4a^{x-6}$

(ग) $a^{x-2} \times b^{3x-5} = b^{x-2} \times a^{1-x}$ (घ) $2^{4x+5} \times a^{x-3} = 4^{x+3} \times 2a^{1-x}$

6. हल गर्नुहोस् :

(क) $5^x + 5^{-x} = 25\frac{1}{25}$ (ख) $\frac{1}{7^x} + 7^x = 7\frac{1}{7}$ (ग) $9^x + \frac{1}{9^x} = 9\frac{1}{9}$

(घ) $2^x + \frac{1}{2^x} = 16\frac{1}{16}$ (ङ) $3^{x+3} + 3^{-x} = 28$ (च) $3^x + 81 \times 3^{-x} = 30$

7. हल गर्नुहोस् :

(क) $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 = 0$ (ख) $5^{2x} - 6 \times 5^{x+1} = -125$

(ग) $4^y - 24 \times 2^y + 128 = 0$ (घ) $16^x - 5 \times 4^{x+1} + 64 = 0$

(ङ) $9^x - 4 \times 3^{x+1} = -27$ (च) $4^x - 6 \times 2^{x+1} + 32 = 0$

8. दिइएको समीकरण $4 \times 3^{x+1} - 9^x - 27 = 0$ को हल गर्नुहोस् र हल गर्दा आउने x का मानहरूले $3^x - 4 \times 3^{x+1} + \frac{81}{3} = 0$ लाई पनि मान्य हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

9. यदि $x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $3x^3 - 9x - 10 = 0$

10. यदि $x^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) $x = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$

(ख) $3x(x^2 + 3) - 8 = 0$

11. यदि $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्: $2x^3 + 6x - 3 = 0$

12. यदि $x = 5^{\frac{2}{3}} + 5^{\frac{1}{3}} + 1$ भए $x^3 - 3x^2 - 12x - 16 = 0$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

13. यदि $x = (mn)^{\frac{1}{3}} - (mn)^{-\frac{1}{3}}$ भए $x^3 + 3x = mn - \frac{1}{mn}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर :

1. (क) 1 (ख) 3 (ग) $\frac{1}{2}$
(घ) 1 (ङ) 1 (च) $-\frac{1}{3}$
2. (क) -2 (ख) 2 (ग) -1
3. (क) 1 (ख) 0 (ग) $\frac{1}{7}$ (घ) 15
4. (क) $\frac{4}{5}$ (ख) 0 (ग) 1
(घ) -1 (ङ) -2 (च) 1
5. (क) $\frac{3}{2}$ (ख) 6 (ग) $\frac{3}{2}$ (घ) 1
6. (क) -2, 2 (ख) -1, 1 (ग) -1, 1
(घ) -2, 2 (ङ) 0, -3 (च) 1, 3
7. (क) 1, 2 (ख) 1, 2 (ग) 3, 4
(घ) 1, 2 (ङ) 1, 2 (च) 2, 3
8. 1, 2

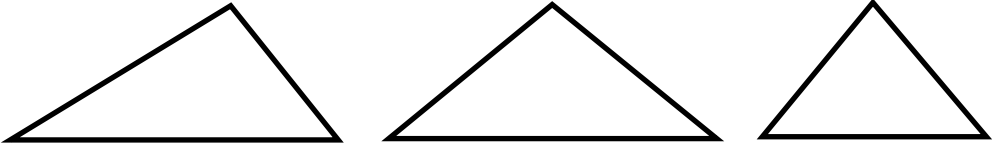
त्रिभुज र चतुर्भुजहरू (Triangle and Quadrilaterals)

10.1 आधारभूत अवधारणा (Fundamental Concepts)

भुजाहरूका आधारमा त्रिभुज 3 प्रकारका हुन्छन् ।

- (क) विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle): तिन ओटै भुजाहरू एक आपसमा बराबर नभएको त्रिभुजलाई विषमबाहु त्रिभुज भन्दछन् ।
- (ख) समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle): दुईओटा भुजा बराबर भएको त्रिभुजलाई समद्विबाहु त्रिभुज भन्दछन् ।
- (ग) समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle): तिन ओटै भुजाहरू बराबर भएको त्रिभुजलाई समबाहु त्रिभुज भन्दछन् ।

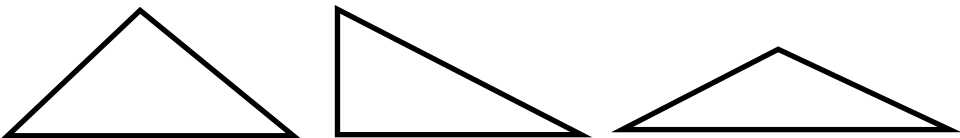
तलका त्रिभुजहरूका भुजाहरू स्केलले नाप्नुहोस् र कुन प्रकारको हो लेख्नुहोस् :



कोणहरूको आधारमा त्रिभुज तिन प्रकारका हुन्छन् :

- (क) न्यूनकोणी त्रिभुज (Acute-angled triangle): तिन ओटै कोणहरू न्यूनकोण (90° भन्दा कम) भएको त्रिभुजलाई न्यूनकोणी त्रिभुज भन्दछन् ।
- (ख) अधिककोणी त्रिभुज (Obtuse-angled triangle): त्रिभुजको कुनै एक कोण अधिककोण (90° देखि 180° सम्म) भएको त्रिभुजलाई अधिककोणी त्रिभुज भन्दछन् ।
- (ग) समकोणी त्रिभुज (Right-angled triangle): कुनै एउटा कोण समकोण (90°) भएको त्रिभुजलाई समकोणी त्रिभुज भन्दछन् ।

तलका त्रिभुजहरूका कोणहरू स्केलले नाप्नुहोस् र कुन प्रकारको हो ? लेख्नुहोस् ।



त्रिभुजका गुणहरू

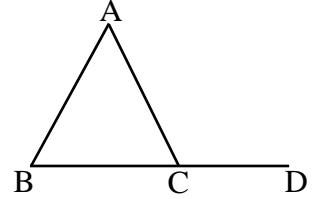
1. त्रिभुजका भिन्नि कोणहरूको नापको योगफल दुई समकोण हुन्छ ।

ΔABC एउटा त्रिभुज हो ।

$$\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC = 180^\circ$$

2. त्रिभुजको एउटा भुजालाई लम्ब्याउँदा बन्ने बाहिरी कोण दुई अनासन्न कोणहरूको योगफल सँग बराबर हुन्छ ।

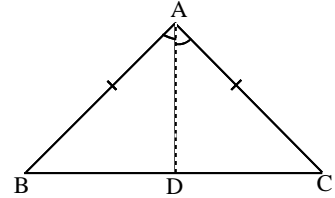
त्रिभुज ABC को भुजा BC लाई बिन्दु D सम्म लम्ब्याइएको छ । $\angle ACD$ बाह्य कोण तथा $\angle ABC$ र $\angle BAC$ अनासन्न भिन्नि कोणहरू हुन ।



तसर्थ, $\pi ACD = \pi ABC + \pi BAC$ हुन्छ ।

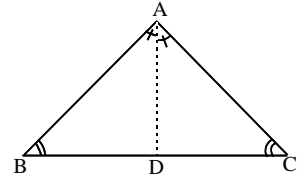
3. समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

ABC एउटा समद्विबाहु त्रिभुज हो । जहाँ $AB = AC$ छ भने $\angle ABC = \angle ACB$ हुन्छ



4. कुनै त्रिभुजका दुई कोणहरू बराबर छन भने ती कोणका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।

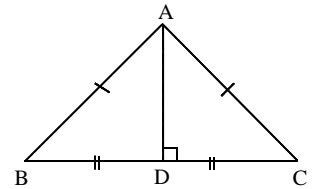
यहाँ, ΔABC मा $\angle ABC$ र $\angle ACB$ बराबर भने $AB = AC$ हुन्छ ।



5. समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धक आधारमा लम्ब हुन्छ, र यसले आधारलाई समद्विभाजन गर्दछ ।

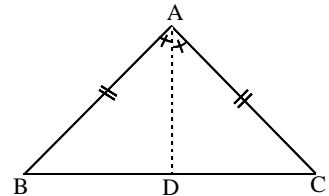
समद्विबाहु ΔABC मा $AB = AC$ र $\angle BAC$ को अर्धक AD छ भने

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $BD = DC$ र $AD \perp BC$ हुन्छ ।



6. समद्विबाहु त्रिभुजमा आधारको लम्बार्धकले शीर्षकोणलाई आधा गर्छ ।

ΔABC मा $AB = AC$ छ र BC को लम्बार्धक AD छ भने $\angle BAD = \angle CAD$ हुन्छ ।

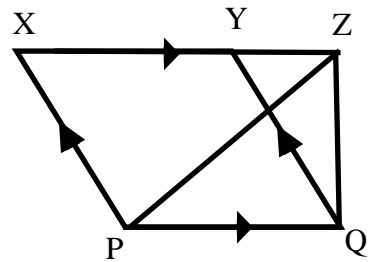
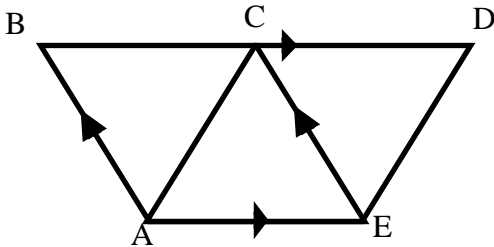
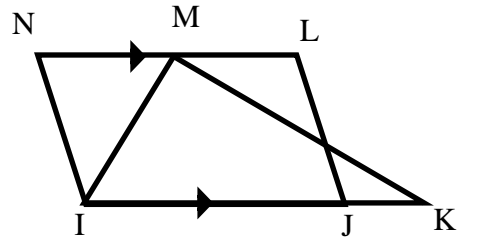
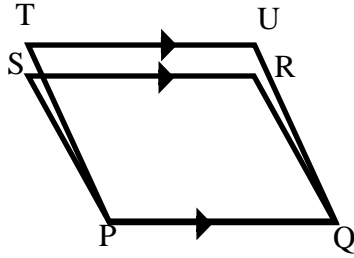


7. त्रिभुजको जुनसुकै दुई भुजाहरूको योग तेस्रो भुजा भन्दा ठूलो हुन्छ ।
8. कुनै त्रिभुजको ठूलो कोणको सम्मुख भूजा सानो कोणको सम्मुख भूजा भन्दा ठूलो हुन्छ । कुनै त्रिभुजको लामो भूजाको सम्मुख कोण छोटो भूजाको सम्मुख कोण ठूलो हुन्छ ।
9. एउटा बाह्य बिन्दुबाट कुनै रेखासम्म खिचिएको रेखाखण्डहरू मध्ये लम्ब सबभन्दा छोटो हुन्छ ।
10. एउटा समकोण त्रिभुजमा कर्ण को वर्ग अन्य दुई भुजाहरूको वर्गको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

10.2 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangle and Quadrilaterals)

तलका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र तलका प्रश्नहरूका उत्तरहरू खोज्नुहोस् ।

- (क) एउटै आधारमा उभिएका समानान्तर चतुर्भुज तथा त्रिभुजहरूको नाम लेख्नुहोस् ।
- (ख) उहि समानान्तर रेखामा भएका चित्रहरू कुन कुन हुन् ? प्रत्येकका समानान्तर रेखाहरू लेख्नुहोस् ।
- (ग) एउटै आधारमा र उहि समानान्तर रेखामा रहेका चित्रहरूका नाम तथा आधार र समानान्तर रेखाहरू लेख्नुहोस् ।



मथिका चित्रहरूको आधारमा निम्न अनुसारका चतुर्भुजहरू तथा त्रिभुजहरू पत्ता लगाउनुहोस् र नामाकरण गर्नुहोस् ।

- (क) एउटै आधार र फरक समानान्तर रेखा भएका ,
 (ख) फरक आधार र उही समानान्तर रेखा र
 (ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा भएका ।

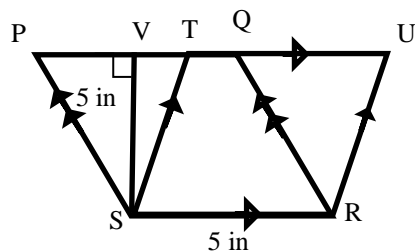
(क) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा भएका समानान्तर चतुर्भुजहरूको सम्बन्ध

दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजहरू PQRS र RSTU को क्षेत्रफल कति कति होला ?

यहाँ, दुवै समानान्तर चतुर्भुजको आधार 5 in र उचाइ 5 in छ । तसर्थ, स.च. PQRS को क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= SR \times SV \\ &= 5 \times 5 \text{ sq. inch} \\ &= 25 \text{ sq. inch} \end{aligned}$$

फेरि, स.च. RSTU को क्षेत्रफल = $SR \times SV$
 $= 5 \times 5 \text{ sq. inch} = 25 \text{ sq. inch}$



अतः समानान्तर चतुर्भुजहरू PQRS र RSTU को क्षेत्रफल को आधार SR र समानान्तर रेखा PU छ । तिनीहरूको क्षेत्रफल बराबर छ ।

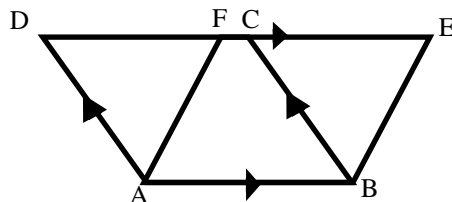
साध्य 1

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा भएका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

प्रमाण

थाहा दिइएको : यहाँ समानान्तर चतुर्भुजहरू ABCD र ABEF एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखा $AB \parallel DE$ मा रहेका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज ABEF को क्षेत्रफल



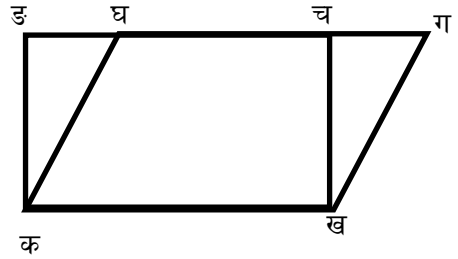
प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. त्रिभुज $\triangle ADF$ र $\triangle BCE$ मा $AD = BC$ $\angle ADF = \angle BCE$ $\angle AFD = \angle BEC$ 2. $\triangle ADF \cong \triangle BCE$ 3. $Ar(\triangle ADF) = Ar(\triangle BCE)$ 4. $Ar(\triangle ADF + \text{स.ल.च. } ABCF) = Ar(\triangle BCE + \text{स.ल.च. } ABCF)$ 5. $Ar(\text{स.च. } ABCD) = Ar(\text{स.च. } ABEF)$ अतः समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ को क्षेत्रफल र समानान्तर चतुर्भुज $ABEF$ को क्षेत्रफल बराबर भयो ।	1. i) समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ मा सम्मुख भुजाहरू ii) $AD \parallel BC$ मा संगत कोणहरू iii) $AF \parallel BE$ मा संगत कोणहरू 2. भु. को. को. तथ्य अनुसार 3. अनुरूप त्रिभुजको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । 4. बराबर भागहरूमा बराबर भाग जोड्दा 5. तथ्य 4 बाट ।

नोट :

(अ) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र आयतको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

यहाँ, थाहा दिइएको : समानान्तर चतुर्भुज कखगघ र आयत कखचड एउटै आधार कख र उहि समानान्तर रेखा गड मा रहेका छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने

समानान्तर चतुर्भुज कखगघ र आयत कखचड को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
(क) समानान्तर चतुर्भुज कखगघ को क्षेत्रफल = $कख \times खच$	(क) सचको क्षेत्रफल = आधार \times उचाइ
(ख) आयत कखचड को क्षेत्रफल = $कख \times खच$	(ख) आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ \times चौडाइ
(ग) स.च. कखगघ को क्षेत्रफल = आयत कखचड को क्षेत्रफल	(ग) तथ्य क) र ख) बाट

(आ) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र वर्गको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

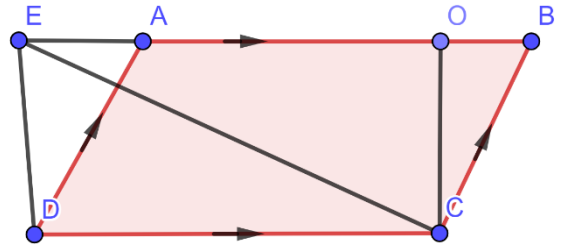
समाधान : माथिका आधारमा यसको प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ख) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको सम्बन्ध साध्य 2

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेको समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजहरूमध्ये त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।

शैद्धान्तिक प्रमाण

थाहा दिइएको : समानान्तर चतुर्भुज ABCD र त्रिभुज CDE एउटै आधार CD र उही समानान्तर रेखा BE मा रहेका छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने

त्रिभुज CDE को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$

समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

रचना : CO || DE खिच्नुहोस् ।

प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. Ar (स.च. ABCD) = Ar (स.च. CDEO)	1. एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखा CE // AB मा बनेका सच
2. Ar (त्रिभुज CDE) = $\frac{1}{2}$ Ar (स.च. CDEO)	2. विकर्ण CE ले स.च CDEO लाई बराबर दुई भागमा बाँड्छ ।
3. Ar (त्रिभुज CDE) = $\frac{1}{2}$ Ar (स.च. ABCD)	3. तथ्य 1 र 2 बाट

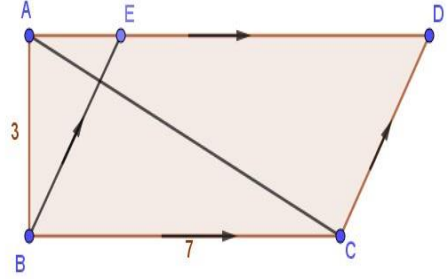
उदाहरण 1

दिइएको चित्र अवलोकन गरी त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् । समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, त्रिभुज ABC, आधार BC = 7 unit र उचाइ AB = 3 unit भएको समकोण त्रिभुज हो।

तसर्थ, त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार \times उचाइ
 = $\frac{1}{2} \times 7 \times 3 = 10.5$ square unit.



फेरि, समानान्तर चतुर्भुज ABCD को आधार AB = 7 unit र उचाइ AB = 3 unit छ ।

तसर्थ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = आधार \times उचाइ = 7 unit \times 3 unit = 21 square inch.

अतः त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल

उदाहरण 2

यदि V, U, S, T क्रमशः समानान्तर चतुर्भुज PQRO का चारओटा किनाराहरूका मध्यबिन्दुहरू हुन् भने $Ar(VUTS) = \frac{1}{2} Ar(PQRO)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

सँगैको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज PQRO का चारओटा किनाराहरूका मध्यबिन्दुहरू PQ, QR, RO र OP का मध्येबिन्दुहरू क्रमशः V, U, T, S हुन् ।

बिन्दुहरू S र U जोड्नुहोस् ।

चित्रअनुसार

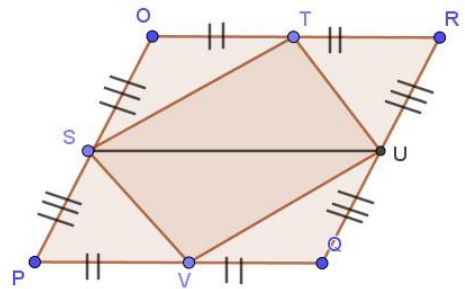
$SP = \frac{1}{2} PO$, (PO को मध्यबिन्दु S हो)

$QU = \frac{1}{2} QR$ (QR को मध्यबिन्दु U हो)

$PO = QR$ (समानान्तर चतुर्भुज PQRO का सम्मुख भुजाहरू)

तसर्थ, $PO = QR$ र $PS \parallel QU$ (PO \parallel QR भएकोले)

तसर्थ, PQUS एउटा समानान्तर चतुर्भुज भयो । (PS \parallel QU र PS = QU भएकोले)



त्यसैगरी, UROS एउटा समानान्तर चतुर्भुज भयो । (UR // OS र UR= SO भएकोले)

अब, $Ar(\Delta SVU) = \frac{1}{2} Ar(\text{स.च. PQUS}) \dots\dots\dots(i)$

(एउटै आधार SU र उही समानान्तर रेखा SU// PQ मा बनेका सच र त्रिभुज)

फेरी, $Ar(\Delta STU) = \frac{1}{2} Ar(\text{स.च. SORQ}) \dots\dots\dots(ii)$

(एउटै आधार SU र उही समानान्तर रेखा SU//OR मा बनेका सच र त्रिभुज)

(i) र (ii) लाई जोड्दा

$Ar(\Delta SVU) + Ar(\Delta STU) = \frac{1}{2} Ar(\text{स.च. PQUS}) + \frac{1}{2} Ar(\text{स.च. SURO})$

$\therefore Ar(SVUT) = \frac{1}{2} Ar(PQRO)$

प्रमाणित भयो ।

(ग) एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेका त्रिभुजहरूको सम्बन्ध

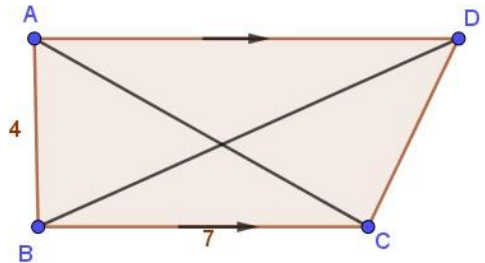
क्रियाकलाप 1

दिइएको चित्र हेरी निम्न कुराहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल कति हुन्छ ?

त्रिभुज BCD को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

दुई त्रिभुजको क्षेत्रफलको तुलना गर्नुहोस् ।



समाधान :

यहाँ, त्रिभुज ABC आधार $BC = 7$ in र उचाइ $AB = 4$ in भएको समकोण त्रिभुज हो ।

तसर्थ, त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \text{आधार} \times \text{उचाइ} = \frac{1}{2} 7 \text{ in} \times 4 \text{ in} = 14 \text{ square inch.}$

फेरि, त्रिभुज BCD को आधार $BC = 7$ in र $AD \parallel BC$ भएकोले उचाइ $AB = 4$ in छ ।

तसर्थ, त्रिभुज BCD को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \text{आधार} \times \text{उचाइ} = \frac{1}{2} 7 \text{ in} \times 4 \text{ in} = 14 \text{ square inch}$

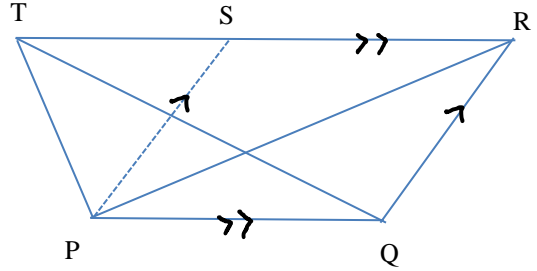
अतः त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल = त्रिभुज BCD को क्षेत्रफल भयो ।

साध्य 3

एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेका त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

थाहा दिइएको :

यहाँ, रेखाहरू PQ र TR दुई समानान्तर रेखाहरू हुन् । जसमा त्रिभुजहरू PQT र PQR बनेका छन् ।



प्रमाणित गर्नुपर्ने :

त्रिभुज PQR को क्षेत्रफल = त्रिभुज PQT को क्षेत्रफल

रचना : QR // PS खिचौं ।

यहाँ,

1. त्रिभुज PQR को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल
(विकर्ण PQ ले सच PQRS लाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ ।)
2. त्रिभुज PQT को क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर चतुर्भुज PQRS को क्षेत्रफल
(PQ // RS मा रहेका त्रिभुजको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलको आधा हुन्छ ।)
3. त्रिभुज PQR को क्षेत्रफल = त्रिभुज PQT को क्षेत्रफल
(तथ्य 1 र 2 बाट)

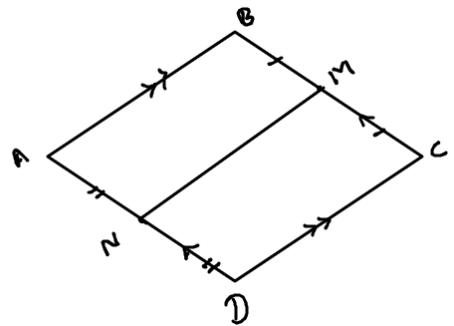
उदाहरण 2

समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N भुजाहरू BC र AD का मध्येबिन्दुहरू हुन् भने MN ले स.च. ABCD लाई दुई बराबर स.च.मा विभाजन गर्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N भुजाहरू BC र AD का मध्येबिन्दुहरू हुन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : Ar (सच ABMN) = AR(सच CDN M)



1. ABCD समानान्तर चतुर्भुज भएकोले $AD = BC$ र $AD \parallel BC$ हुन्छ ।
2. फेरी $BM = MC$ र $AN = ND$ हुन्छ । (समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N भुजाहरू BC र AD का मध्यबिन्दुहरू भएकोले)
3. $AN = BM$ र $AN \parallel BM$
4. ABMN समानान्तर चतुर्भुज हो ।
5. फेरी, $DN = CM$ र $DN \parallel CM$ (माथिकै तरिकालाई दोहोर्याउँदा ?)
6. CDMN एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।
7. यहाँ समानान्तर चतुर्भुजहरू ABMN र CDMN को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ । (बराबर आधार $AN = ND$ र उही समानान्तर रेखा BC मा रहेका सचहरू)

अतः $Ar(\text{सच ABMN}) = Ar(\text{सच CDMN})$

उदाहरण 3

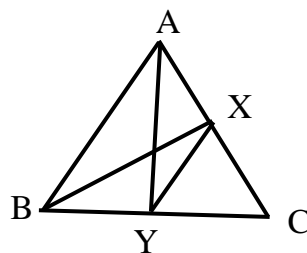
दिइएको चित्रमा $XY \parallel AB$, भए $\Delta CAY = \Delta CBX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएको :

त्रिभुज PQR मा $MN \parallel QR$ छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\Delta CAY = \Delta CBX$



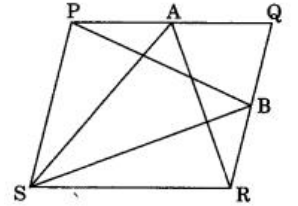
प्रमाण :

	तथ्यहरू		कारणहरू
1.	$\Delta XYA = \Delta YXB$	1.	(एउटै आधार XY र उही समानान्तर रेखा $AB \parallel XY$ मा बनेका त्रिभुजहरू)
2.	$\Delta XYA + \Delta XYC = \Delta YXB + \Delta XYC$	2.	त्रिभुज ΔXYC लाई दुवैतिर जोड्दा
3.	$\Delta CAY = \Delta CBX$	3.	सिङ्गो टुक्रो तथ्य

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

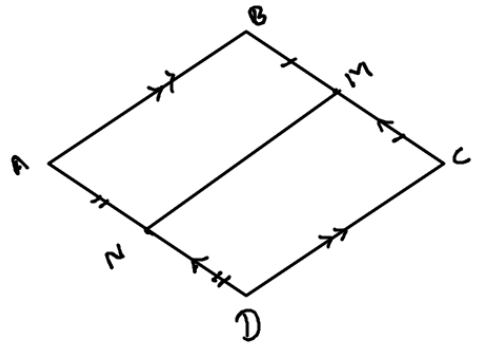
(क) बहुवैकल्पिक प्रश्नहरू

- एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच रहेका समानान्तर चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफलको अनुपात हुन्छ ।
a) 1 : 2 b) 1 : 1 c) 2 : 1 d) 3 : 1
- यदि एउटा चतुर्भुजलाई विकर्णले बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ भने उक्त चतुर्भुज तलका मध्ये कुन होइन ?
a) आयत b) वर्ग c) समलम्ब चतुर्भुज d) समानान्तर चतुर्भुज
- एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच रहेका समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको क्षेत्रफलको अनुपात हुन्छ ।
a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) 2 : 1 d) 1 : 1
- एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच रहेका समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुज मध्ये सचको क्षेत्रफल 36 cm^2 भए त्रिभुजको क्षेत्रफल कति हुन्छ ?
a) 36 cm^2 b) 18 cm^2 c) 72 cm^2 d) 12 cm^2
- दिइएको चित्रमा PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो जसमा बिन्दुहरू A र B भुजाहरू PQ र QR का मध्येबिन्दुहरू हुन् र स.च PQRS को क्षेत्रफल 48 cm^2 भए $\text{ar}(\Delta PBS) + \text{ar}(\Delta ASR)$ कति हुन्छ ?
a) 36 cm^2 b) 96 cm^2 c) 48 cm^2 d) 24 cm^2

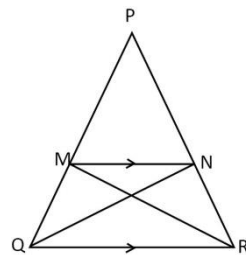


(ख) प्रमाणित गर्नुहोस् ।

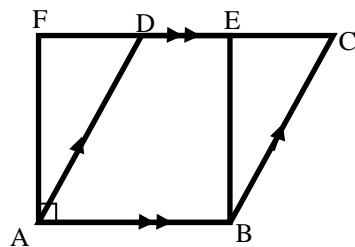
- समानान्तर चतुर्भुज ABCD मा M र N भुजाहरू BC र AD का मध्यबिन्दुहरू हुन् भने MN ले स. च. ABCD लाई दुई बराबर स.च.मा विभाजन गर्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



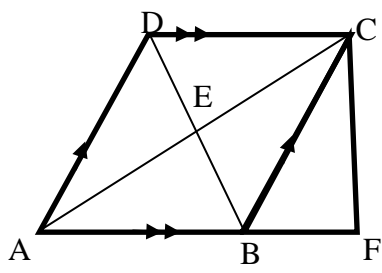
2. दिइएको चित्रमा $MN \parallel QR$, भए $\Delta PQN = \Delta PRM$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



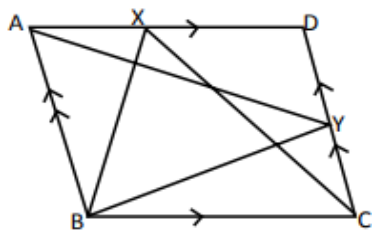
3. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो र ABEF एउटा वर्ग हो भने, स.च. ABCD को क्षेत्रफल र वर्ग ABEF को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



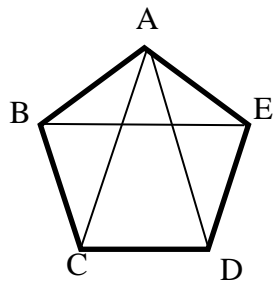
4. दिइएको चित्रमा DBFC एउटा चतुर्भुज हो । जसको विकर्ण BC सँग समानान्तर हुने गरी AD खिचिएको छ र FB भुजालाई लम्ब्याएर A सम्म पुऱ्याइएको छ । A र C जोडिएको अवस्थामा चतुर्भुज DBFC को क्षेत्रफल. = ΔAFC को क्षेत्रफल हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



5. सँगैको चित्रमा ABCD एउटा स.च. हो, जसका भुजा AD को X बिन्दु तथा भुजा CD को Y बिन्दुबाट त्रिभुजहरू XBC र YAB बनेका छन् भने $\Delta ABY = \Delta ABX + \Delta CDX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



6. सँगैको चित्रमा ABCDE एउटा पञ्चभुज हो, जसमा $BE \parallel CD$, $BC \parallel AD$ तथा $AC \parallel DE$ छन् । ΔABC को क्षेत्रफल र ΔADE को क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



(ग) परियोजना कार्य

एउटा जियो बोर्ड लिनुहोस् ।

फरकफरक रडका रवर बैण्ड वा धागोको प्रयोग गरी एउटै आधार र उही समानान्तर रेखा बिच बनेका निम्न कुरा पहिचान गर्नुहोस् ।

क) समानान्तर चतुर्भुको सम्बन्ध

ख) समानान्तर चतुर्भुज र त्रिभुजको सम्बन्ध

ग) त्रिभुजहरूको सम्बन्ध र

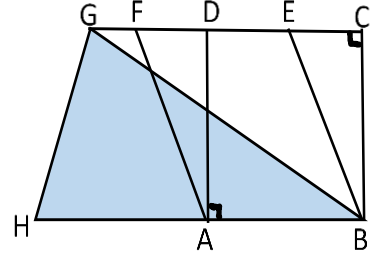
घ) त्रिभुज र चतुर्भुजको सम्बन्ध स्पष्ट देखिने गरी तयार पार्नुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज ABCD र एउटा आयत ABFE हो,

(क) समानान्तर चतुर्भुज ABEF र आयत ABCD को क्षेत्रफलमा के सम्बन्ध हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) दिइएको चित्रमा $HA = AB$ छ भने समानान्तर चतुर्भुज ABEF र त्रिभुज BGH बिचको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

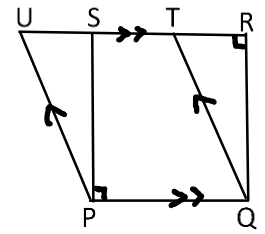


2. एउटै आधार PQ र उही समानान्तर रेखाहरू PQ र RU का बिचमा एउटा समानान्तर चतुर्भुज PQTU र एउटा आयत PQRS रहेको छ ।

(क) समानान्तर चतुर्भुज PQTS र आयत PQRS को क्षेत्रफलबिचमा के सम्बन्ध हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

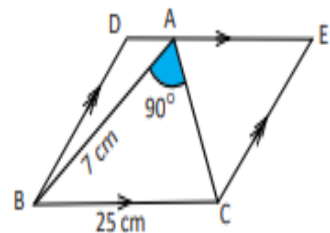
(ख) यदि आयत PQRS को क्षेत्रफल 35 cm^2 भए समानान्तर चतुर्भुज PQTU को क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) भुजा $PQ = 7 \text{ cm}$, $QR = 5 \text{ cm}$ र $\angle PQR = 120^\circ$ हुने समानान्तर चतुर्भुज PQRS को रचना गरी उक्त समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने आयत PQXY को रचना गर्नुहोस् ।



(घ) के त्रिभुज PXS र त्रिभुज QYR अनुरूप हुन्छन्, कारणसहित लेख्नुहोस् ।

3. एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखाहरू BC र DE का बिचमा एउटा समानान्तर चतुर्भुज BCED र त्रिभुज ABC बनेको छ । जहाँ $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 7 \text{ cm}$ र $BC = 25 \text{ cm}$ छ ।



(क) AC को नाप कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) समानान्तर चतुर्भुज BCED को क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) समानान्तर चतुर्भुज BCED र त्रिभुज ABC को क्षेत्रफलबिचको सम्बन्ध सैद्धान्तिक रूपमा पुष्टि गर्नुहोस् ।

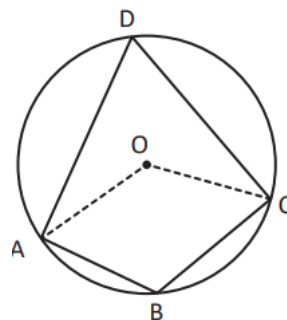
(घ) त्रिभुज ABC को रचना गर्नुहोस्, जहाँ $AC = 5 \text{ cm}$, $AB = 4 \text{ cm}$ र $\angle BAC = 45^\circ$ छ । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी बन्ने समानान्तर चतुर्भुज ADMN को रचना गर्नुहोस् ।

4. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा चक्रीय चतुर्भुज हो भने,

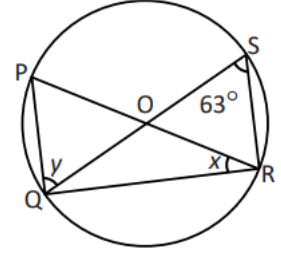
(क) $\angle ABC / \angle ADC$ को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

(ख) $\angle ADC = 1/2 \angle AOC$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(ग) यदि $\angle ABC = 120^\circ$ भए $\angle AOC$ को मान कति होला ?



5. चित्रमा देखाइएको केन्द्रबिन्दु इ भएको वृत्तमा $\angle PQR = y$, $\angle QSR = 63^\circ$ र $\angle PRQ = x$ छ ।



- (क) $\angle PQR$ को नाप कति हुन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।
- (ख) $\angle POS$ को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) प्रमाणित गर्नुहोस् : $x + y = 90^\circ$
- (घ) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\triangle QOR$ समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

रचना (Construction)

11.1. आधारभूत धारणा (Fundamental Concepts)

कम्पास र रूलरको प्रयोग गरी तल दिइएका रचनाहरू गर्नुहोस् ।

क) कम्पास र रूलरको प्रयोग गरी $\angle ABC = 60^\circ$ को कोणको अर्धक ।

ख) आधार $QR = 4\text{cm}$ र एउटा कोण $\angle QRP = 30^\circ$ भएको समकोण त्रिभुज PQR ।

ग) $AB = 4\text{cm}$ र $BC = 7\text{cm}$ $\angle ABC = 45^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ ।

अब माथिका रचनाहरूको आधारमा बराबर क्षेत्रफल भएका त्रिभुज र चतुर्भुजका रचनाहरू गरौं ।

11.2. बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज र चतुर्भुजहरूको रचना

(Construction of triangle and quadrilaterals with equal areas)

चरणहरू

(क) रूलर र सिसाकलमको प्रयोग गरी दिइएको अवस्था अनुसारको नमुना चित्र खिच्नुहोस् ।

(ख) दिइएको मानहरूलाई नमुना चित्रमा भर्नुहोस् ।

(ग) दिइएको अवस्था र भागहरूको नापका आधारमा कम्पास र रूलर प्रयोग गरी दिइएको चरणहरू प्रयोग गरी रचना गर्नु र नामाकरण गर्ने ।

(क) बराबर क्षेत्रफल हुने समानान्तर चतुर्भुजहरूको रचना

(Construction of Parallelograms equal in area)

उदाहरण 1

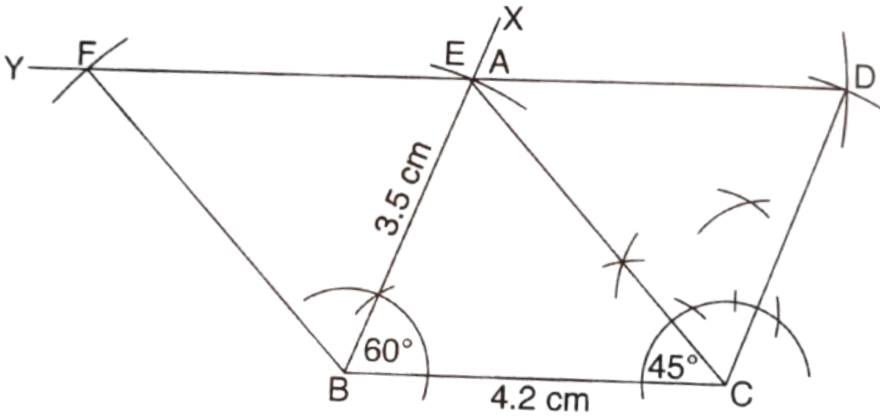
भुजाहरू $AB = 3.5\text{ cm}$, $BC = 4.2\text{ cm}$ र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा कोण 45° भएको समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्नुहोस् ।

चरणहरू

(क) $BC = 4.2\text{ cm}$, र $\angle XBC = 60^\circ$ खिच्नुहोस् । B बाट 3.5 cm को चाप लिइ BX मा चिन्ह लगाइ A नाम दिनुहोस् । बिन्दु C बाट 3.5 cm , र बिन्दु A बाट 4.2 cm को चापले काटी D नाम दिनुहोस् । अब A र D तथा C र D जोड्नुहोस् । समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ तयार भयो ।

- (ख) DA लाइ Y सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।
 (घ) बिन्दु C मा $\angle BCE = 45^\circ$ भएको कोण खिचनुहोस् र उक्त रेखाले DY मा काट्ने बिन्दुलाई E नाम दिनुहोस् ।
 (ङ) B बाट AB बराबरको चापले DY मा काट्नुहोस् र F नाम दिनुहोस्
 (च) बिन्दु B र F जोड्नुहोस् ।

आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज BCEF तयार भयो । एउटै आधार AB र उही समानान्तर रेखा $AB \parallel DY$ बिच रहेकाले यसको क्षेत्रफल सच ABCD सँग बराबर छ र छन् ।



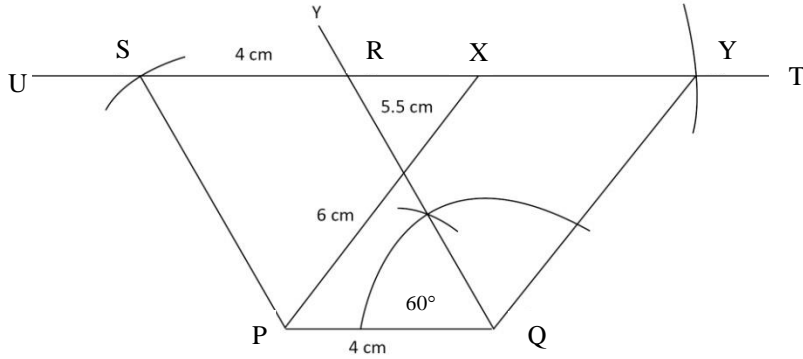
उदाहरण 2

$PQ = 4\text{cm}$, $QR = 5.5\text{cm}$ र $\angle PQR = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज PQRS सँग बराबर क्षेत्रफल भएको एउटा किनारा 6cm भएको स.च.को रचना गर्नुहोस् ।

चरणहरू

- (क) $PQ = 4\text{cm}$, $QR = 5.5\text{cm}$ र $\angle PQR = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज PQRS उदाहरण 1 अनुसार खिचनुहोस् । RS लाइ U र T सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।
 (ख) बिन्दु P बाट 6cm को चापले UT मा चिह्न लगाउनुहोस् र X नाम दिनुहोस् । फेरी, सोही नापको चापले बिन्दु Q बाट UT मा चिह्न लगाउनुहोस् र Y नाम दिनुहोस् ।
 (ग) रूलर र सिसाकलम प्रयोग गरी बिन्दुहरू P र X तथा Q र Y जोड्नुहोस् ।

आवश्यक समानान्तर चतुर्भुज PQXY हो । । जसमा जसको क्षेत्रफल सच ABCD सँग बराबर छ र एउटै आधार PX र उही समानान्तर रेखा $PQ \parallel UT$ बिच रहेका छन् ।



अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. $PQ = 5\text{cm}$, $QR = 5.5\text{cm}$ र $\angle PQR = 60^\circ$ भएको समानान्तर चतुर्भुज PQRS खिच्नुहोस् र उक्त स.च. को क्षेत्रफल सँग बराबर क्षेत्रफल हुने गरी एउटा कोण is 120° भएको स.च PQXY को रचना गर्नुहोस् ।
2. एउटा समानान्तर चतुर्भुजमा $AB = 5\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$ र विकर्ण $BD = 6\text{ cm}$ छ । उक्त समानान्तर चतुर्भुजसगँ बराबर क्षेत्रफल हुने एउटा कोण 75° भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

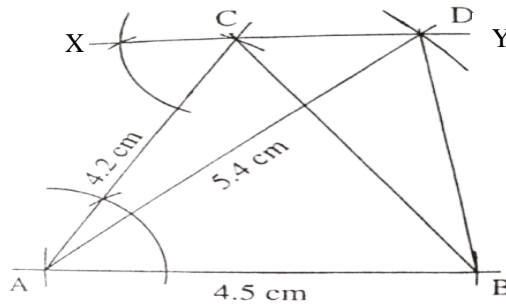
(ख) बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुजहरूको रचना (Construction of triangles equal in area)

उदाहरण 1

$\angle CAB = 60^\circ$, $AB = 4.5\text{ cm}$ and $AC = 4.2\text{ cm}$ भएको त्रिभुज ABC सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज खिच्नुहोस् जसको एउटा किनारा 5.4 cm छ ।

चरणहरू

- (क) $\angle CAB = 60^\circ$, $AB = 4.5\text{ cm}$ and $AC = 4.2\text{ cm}$ भएको त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् ।
- (ख) C मा $\angle CAB$ बराबरको कोण खिची बिन्दु A बाट जाने $XY \parallel AB$ खिच्नुहोस् ।



(ग) A बाट 5.4 cm अर्धव्यासको चाप लिई XY मा काट्नुहोस् र D नाम दिनुहोस् ।

(घ) बिन्दु A र D ; B र D जोड्नुहोस् ।

आवश्यक त्रिभुज ADB तयार भयो । त्रिभुज ABC र ADB एउटै आधार BC र उही समानान्तर रेखा $AB \parallel XY$ मा रहेका त्रिभुजहरू भएकोले यिनीहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. $QR = 6.4$ cm, $PQ = 5.6$ cm र $PR = 6$ cm भएको त्रिभुज PQR सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज रचना गर्नुहोस्, जसको एउटा भुजा 7 cm छ ।
2. $XY = 6.3$ cm, $\angle XZY = 30^\circ$ र $\angle XYZ = 45^\circ$ भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle OXY$ को रचना गर्नुहोस्, जसमा $OX = 7.5$ cm छ ।
3. $AB = 6.5$ cm, $BC = 7$ cm र $AC = 6$ cm भएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी एउटा भुजाको लम्बाइ 8 cm भएको एउटा त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

ग) बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज र समानान्तर चतुर्भुजको रचना

Construction of triangles and Parallelograms equal in area.

उदाहरण 1

$AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् । उक्त त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग बराबर क्षेत्रफल भएको एउटा भुजा $PB = 5.2$ cm भएको समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।

चरणहरू

(क) $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm र $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा त्रिभुज ABC खिच्नुहोस् ।

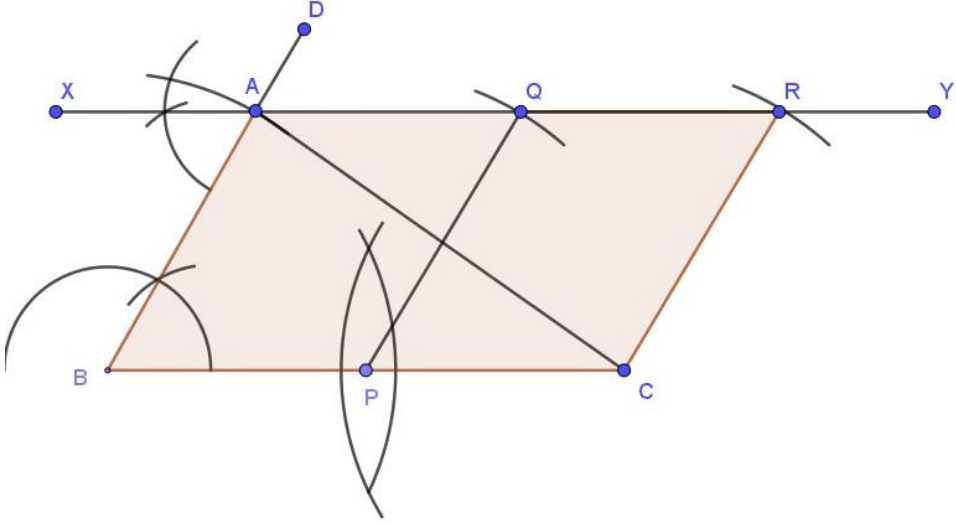
$BC = 5$ cm खिच्नुहोस् । B मा कम्पासको प्रयोगले $\angle DBC = 60^\circ$ को कोण खिच्नुहोस् । B बाट 4 cm को चाप लिइ BD मा काटी A नाम दिनुहोस् । त्रिभुज ABC तयार भयो ।

(ख) भुजा BC सँग समानान्तर हुने बिन्दु A बाट जाने रेखा XY खिच्नुहोस् ।

(ङ) 5.2 cm अर्धव्यास भएको चाप लिएर बिन्दु C बाट XY मा चाप काटी R नाम दिनुहोस् ।

(च) भुजा BC को मध्यबिन्दु P पत्ता लगाई P बाट CR बराबरको अर्धव्यासको चापले XY मा चिह्न लगाइ Q नाम दिनुहोस् । बिन्दुहरू P र Q तथा C र R जोड्नुहोस् ।

आवश्यक स. च. PCRQ हो जसको क्षेत्रफल त्रिभुज ABC सँग बराबर हुन्छ । (किन ?)



उदाहरण 2

$AB = 5\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$ and $\angle ABC = 60^\circ$ भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज ABCD खिचनुहोस् । उक्त सँग सँग बराबर क्षेत्रफल हुने त्रिभुज PBE जसको एउटा भुजा $PB = 5.6\text{cm}$ को रचना गर्नुहोस् :

चरणहरू

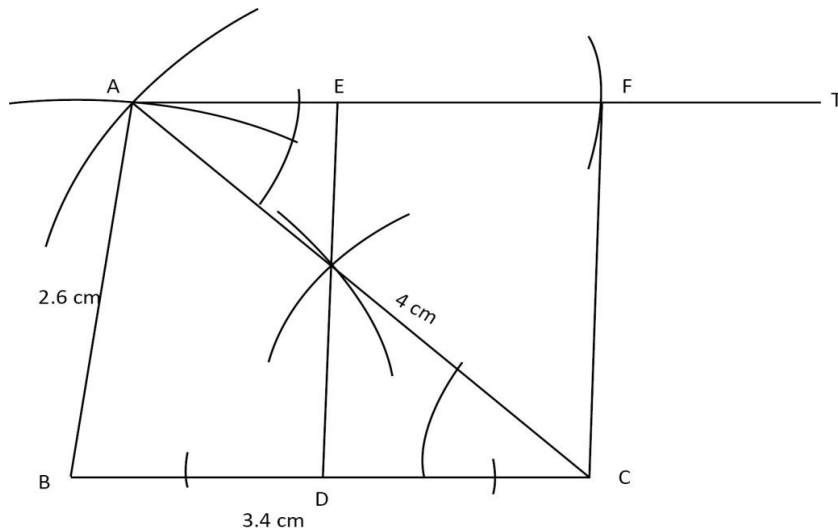
- (क) $BC = 4\text{cm}$ भएको सिधा रेखा खिचनुहोस् ।
- (ख) कम्पासको प्रयोग गरी $\angle HBC = 60^\circ$ भएको कोण खिचनुहोस् ।
- (ग) HB मा 5cm को चापले काटी A नाम दिनुहोस।
- (घ) C बाट AB बराबरको चाप र A बाट BC बराबरको चाप खिची काटिएको बिन्दुलाई D नाम दिनुहोस् ।
- (ङ) A र D बाट जाने सिधारेखा ST खिचनुहोस् । समानान्तर चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।
- (घ) भुजा $BC = CE$ हुनेगरी BC लाई E सम्म लम्ब्याउनुहोस् ।
- (ङ) बिन्दु B बाट 5.6 cm अर्धव्यासको चाप लिइ AD मा चिन्ह लगाउनुहोस् ।
- (च) बिन्दुहरू B र P; P र E जोड्नुहोस् ।

आवश्यक त्रिभुज BPE हो जसको क्षेत्रफल समानान्तर चतुर्भुज ABCD सँग बराबर हुन्छ । (किन ?)

(छ) DR बराबरको चापले ET मा काटी F नाम दिनुहोस् ।

(ज) बिन्दुहरू F र R जोड्नुहोस् ।

आवश्यक आयत RDEF हो जसको क्षेत्रफल त्रिभुज PQR सँग बराबर छ ।



अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. भुजाहरू $PQ = QR = 5.5$ cm, $RS = SP = 4.5$ cm र $\angle SPQ = 75^\circ$ भएको चतुर्भुज PQRS सँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PST$ को रचना गर्नुहोस् ।
2. $AB = 4.5$ cm, $BC = 5.5$ cm, $CD = 5.7$ cm र $DA = 4.9$ cm र विकर्ण $BD = 5.9$ cm भएको चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफलसँग बराबर हुने $\triangle DAE$ को रचना गर्नुहोस् ।
3. $PQ = 5$ cm, $QR = 9.6$ cm, $RS = 4.5$ cm, $SP = 5.4$ cm र $QS = 6.5$ cm भएको चतुर्भुज PQRS को बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle QRT$ को रचना गर्नुहोस् ।
4. समबाहु चतुर्भुज PQRS को रचना गर्नुहोस्, जसमा विकर्णहरू $PR = 6$ cm र $QS = 8$ cm छन् । सो समबाहु चतुर्भुजसँग बराबर क्षेत्रफल हुने $\triangle PSA$ को रचना गर्नुहोस् ।
5. 6 cm लम्बाइ र 4.5 cm चौडाइ भएको आयतको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने एउटा कोण 60° भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

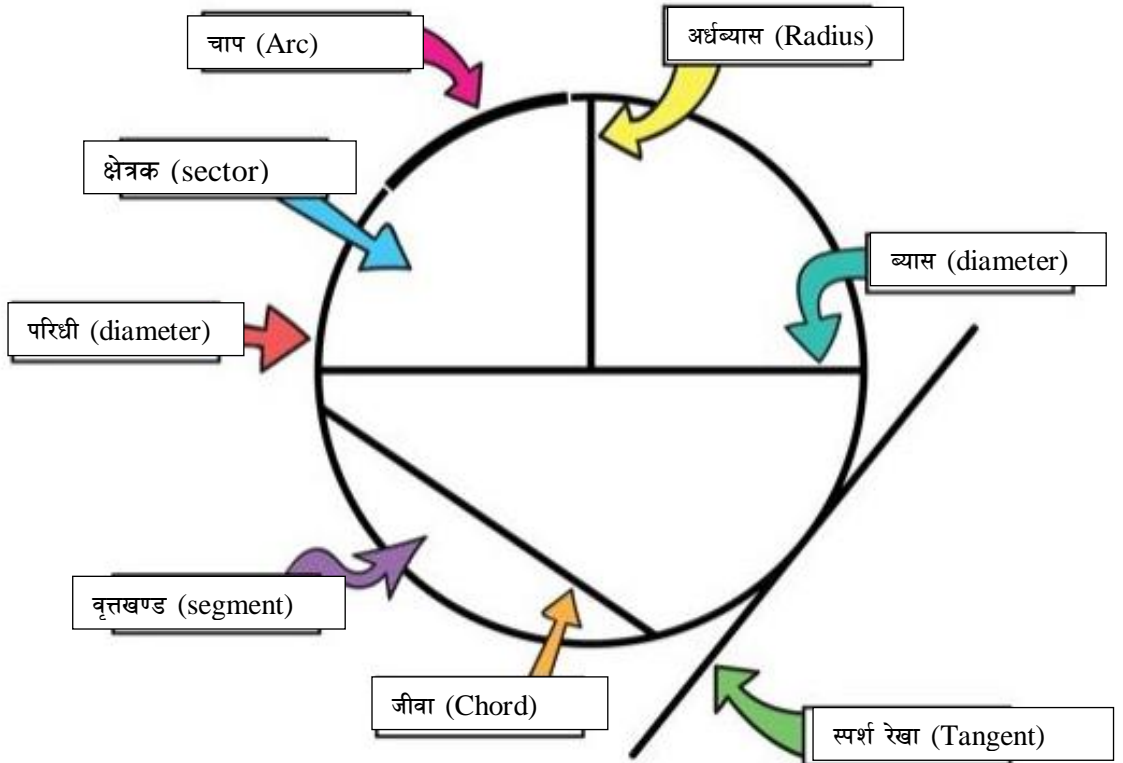
परियोजना कार्य : बाँसका सिन्का, छ्वाली वा जुस पाइपको प्रयोग गरी माथिका प्रत्येक रचनाका एक एक ओटा नमुना निर्माण गर्नुहोस् ।

वृत्त (Circle)

12.1 आधारभूत अवधारणा (Basic Concept)

तल दिइएका चित्रको अध्ययन गर्नुहोस् र वृत्तका विभिन्न भागहरूको नाम पहिचान गर्नुहोस् ।

अर्धव्यास (Radius), परिधि (Circumference), जीवा (Chord), व्यास (Diameter), चाप (Arc), अर्धवृत्त (Semi-circle), क्षेत्रक (Sector), वृत्तखण्ड (Segment), स्पर्श रेखा (Tangent)



12.1 वृत्तका आधारभूत तथ्यहरू (Basic facts of Circles)

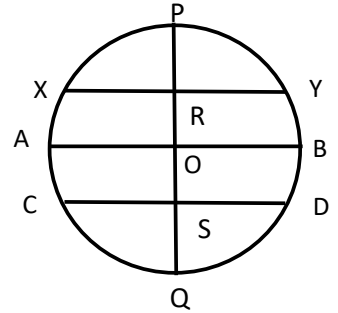
वृत्तका भागहरूको आधारमा हामी यस सम्बन्धी केही तथ्यहरू वृत्त सम्बन्धी साध्यहरू हामीले कागज पट्याएर, प्रयोगात्मक परीक्षणबाट तथा सैद्धान्तिक तरिकाबाट प्रमाणित गर्न सक्छौं ।

साध्य १

वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट कुनै जीबामा रेखित लम्बले त्यस जीबालाई समद्विभाजन गर्छ ।

क्रियाकलाप

एउटा वृत्तमा चित्रमा दिइएजस्तै XY, AB, CD तीनओटा जीवाहरू खिचनुहोस् । फेरि चित्रमा देखाइए जस्तै व्यास PQ खिचनुहोस् । तल तालिकामा दिइएका रेखाखण्डहरू नापेर तालिकामा भर्नुहोस् ।



XY =	AB =	CS =	निश्कर्ष
XR =	AO =	DS =	
RY =	OB =	QD =	

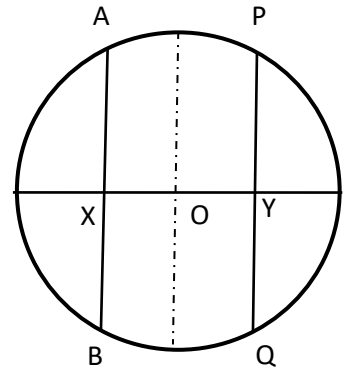
निश्कर्ष : वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट कुनै जीबामा रेखित लम्बले त्यस जीबालाई समद्विभाजन गर्छ ।

साध्य २

कुनै वृत्तको जीबाको लम्बार्धक त्यो वृत्तको केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ ।

क्रियाकलाप २

चित्रमा देखाए जस्तै O केन्द्र बिन्दु भएको वृत्त खिचनुहोस् । यसमा व्याससँग लम्ब हुनेगरी दुई बराबर जीवाहरू AB र PQ खिचनुहोस् । अब, चित्रमा देखिएअनुसार XA र XB तथा YP र YQ को दुरी रूलर प्रयोग गरी पत्ता लगाऔं । अब, जीवाहरूमा पर्ने बिन्दु केन्द्र बिन्दुबाट बराबर दुरीमा पर्छ / पर्दैन हेरौं ।

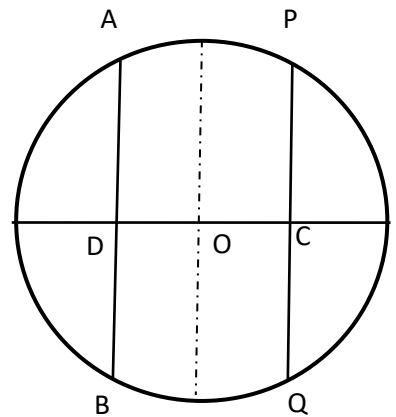


निश्कर्ष : कुनै वृत्तको जीबाको लम्बार्धक त्यो वृत्तको केन्द्रबिन्दु भएर जान्छ ।

साध्य ३

वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट उत्तिकै टाढा रहेका जीवाहरू बराबर हुन्छन् ।

चित्रमा देखाए जस्तै O केन्द्र बिन्दु भएको वृत्त खिचनुहोस् । यसमा O बाट बराबर दुरीमा पर्नेगरी दुईओटा दुई जीवाहरू AB र PQ खिचनुहोस् । अब, जीवाहरू AB र PQ को दुरी रूलर प्रयोग



गरी पत्ता लगाऔं । अब, जीबाहरूको लम्बाइ बराबर छ कि छैन होला लेख्नुहोस् ।

निश्कर्ष : वृत्तको केन्द्र बिन्दुबाट उत्तिकै टाढा रहेका जीबाहरू बराबर हुन्छन् ।

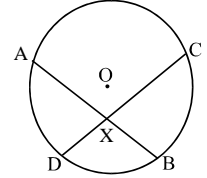
अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

(क) 5cm अर्धव्यास भएको वृत्तको केन्द्रबिन्दु बाट 4cm टाढा रहेको जीबाको लम्बाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस । (6cm)

(ख) 34 cm व्यास भएको एउटा वृत्तमा केन्द्रबिन्दुबाट 8 cm मा एउटा जीबा खिचिएको छ भने जीबाको लम्बाइ कति होला ? (30cm)

(ग) एउटा वृत्तको अर्धव्यास 26cm र कुनै एउटा जीबाको लम्बाइ 48cm छ । वृत्त केन्द्र बिन्दुबाट कति टाढा होला ? पत्ता लगाउनुहोस । (10 cm)

(घ) सँगैको चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु छ । AB र CD दुई बराबर जीबाहरू बिन्दु X मा प्रतिच्छेदित छन् । $AX = CX$ र $BX = DX$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



12.2 केन्द्रीय कोण र परिधी कोण (Central angle and angel at circumference)

एउटा वृत्त बोर्ड लिनुहोस् ।

कम्पासको प्रयोग गरी एउटा केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्त खिच्नुहोस् ।

उक्त वृत्तको परिधीमा दुई बिन्दुहरू A र B लिनुहोस् । र A र B लाई रबर ब्याण्डका केन्द्र O सँग जोड्नुहोस् ।

फेरी परिधीमा अर्को बिन्दु P लिनुहोस् र बिन्दुहरू A र B लाई रबर ब्याण्डको प्रयोग गरी P सँग जोड्नुहोस् ।

छेउका बिन्दुहरूलाई केन्द्रसँग जोड्दा बनेका कोणहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

केन्द्रमा बनेको कोणलाई केन्द्रीय कोण भनिन्छ । अर्थात् दुईओटा अर्धव्यासहरूका बिचमा बनेको कोण केन्द्रकोण हो । सँगैको चित्रमा $\angle AOB$ केन्द्रीय कोण हो ।

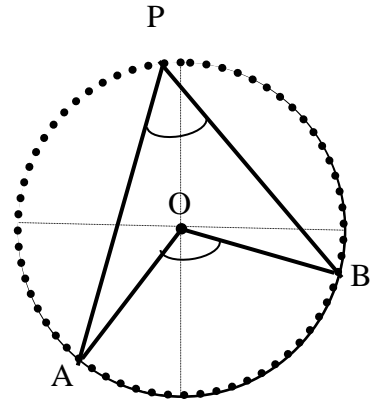
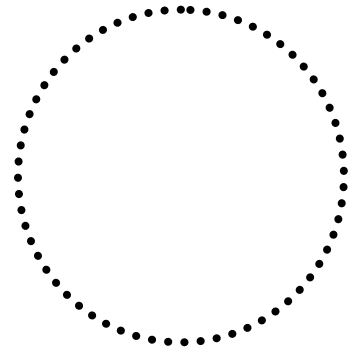
त्यसैगरी वृत्तको परिधीमा एउटा बिन्दु P लिनुहोस् ।

अतः वृत्तका दुईओटा जीबाहरू परिधीमा काटिएर बनेका कोणलाई परिधी कोण भनिन्छ ।

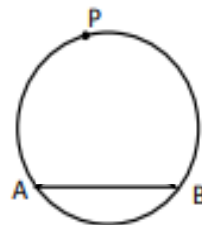
सँगैको चित्रमा $\angle APB$ परिधि कोण हो ।

माथिका दुबै चित्रमा कोणहरू $\angle AOB$ र $\angle APB$ चाप AB बनेका छन् ।

तसर्थ, यिनीहरूलाई एउटै चापमा आधारित केन्द्रकोण र परिधी कोणहरू भनिन्छ ।



वृत्तको परिधीको केहि भागलाई उक्त वृत्तको चाप (Arc) भनिन्छ ।
चित्रमा APB र AB चाप हुन् । यहाँ चाप APB लाई मुख्य
(major arc) भनिन्छ भने चाप AB लाई सहायक (minor arc)
भनिन्छ । जस्तै चित्रमा AP, PB, APB र AB चाप हुन् ।

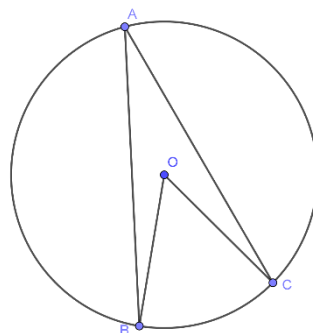
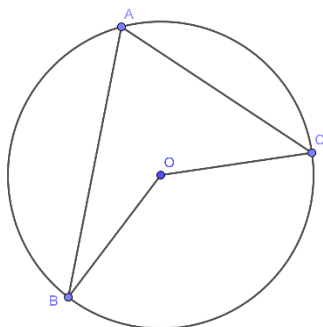


यदि कुनै चाप अर्धवृत्त भन्दा सानो भएमा minor arc र अर्धवृत्त
भन्दा ठुलो भएमा major arc भनिन्छ ।

साध्य 1

एउटै चापमा आधारित केन्द्रीय कोण र परिधी कोणको सम्बन्ध

प्रयोगात्मक परीक्षण



माथिका चित्रहरूमा एउटै चाप BC मा बनेका परिधी कोणहरू र केन्द्र कोणहरू पहिचान गर्नुहोस् ।

चाँदको प्रयोग गरी परिधी कोण र केन्द्र कोणको मान तलको जस्तै तालिका बनाई भर्नुहोस् ।

परिधी कोणको नाप र केन्द्रकोणको नापको सम्बन्ध समूहमा छलफल गरी लेख्नुहोस् र सबै समूहले
पालैपालो कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

केन्द्रकोण $\angle BOC$	परिधी कोण $\angle BAC$	सम्बन्ध	निष्कर्ष

निष्कर्ष : एउटै चापमा आधारित परिधी कोणको मान केन्द्रकोणको आधा हुन्छ । अर्थात्, केन्द्रकोण
परिधी कोणको दुई गुणा हुन्छ । जस्तै माथिको चित्रमा $\angle AOB = 2 \angle ACB$

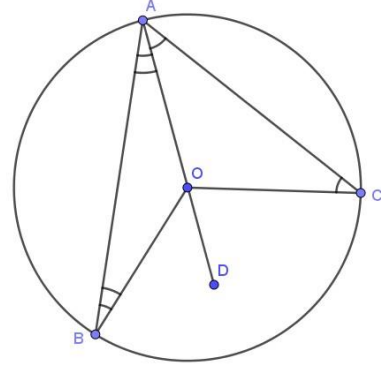
सैद्धान्तिक प्रमाण

थाहा दिइएको:

केन्द्र बिन्दु O भएको वृत्त छ। जसमा केन्द्र कोण $\angle BOC$ र परिधी कोण $\angle BAC$ चाप BC मा परिवेष्टित भएका छन्।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle BOC = 2 \angle BAC$

रचना : बिन्दुहरू A र O लाई जोडी बिन्दु D सम्म लम्ब्याउनुहोस्।



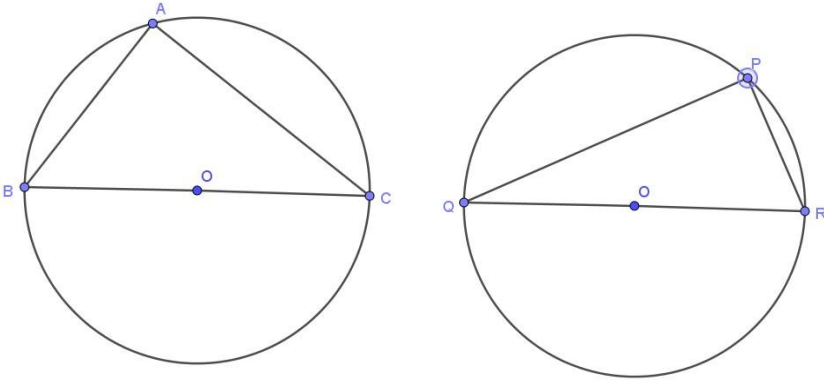
प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
ΔAOB मा	
1) $\angle OAB = \angle OBA$	1. OA र OB वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकोले
2) $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA$	2. ΔAOB मा OA लाई लम्ब्याउदा बन्ने बाहिरी कोण
3) $\angle BOD = 2 \angle OAB$	3. 1) र 2) बाट
ΔAOC मा	
4) $\angle OAC = \angle OCA$	4) OA र OC वृत्तका अर्धव्यासहरू भएकोले
5) $\angle COD = \angle OCA + \angle OAC$	5) ΔAOC मा OA लाई लम्ब्याउदा बन्ने बाहिरी कोण
6) $\angle COD = 2 \angle OAC$	6) 4) र 5) बाट
7) $\angle BOD + \angle COD = 2 \angle OAB + 2 \angle OAC$	7) 3) र 6) लाई जोड्दा
अतः $\angle BOC = 2 \angle BAC$	

साध्य 2

अर्ध वृत्तमा बनेको परिधि कोण एक समकोण हुन्छ ।

प्रयोगात्मक परीक्षण



माथि दिइएका दुई वृत्तहरूमा केन्द्र O, व्यासहरू BC र QR अनी परिधीकोणहरू क्रमशः BAC र QPR छन् ।

दुवै वृत्तमा बनेका तीनओटा कोणहरू पालैपालो नाप्नुहोस् ।

र व्यासको सम्मुखको कोणको मान कति भयो ? लेख्नुहोस् ।

निश्कर्ष : अर्ध वृत्तमा बनेको परिधि कोण एक समकोण हुन्छ ।

सैद्धान्तिक प्रमाण

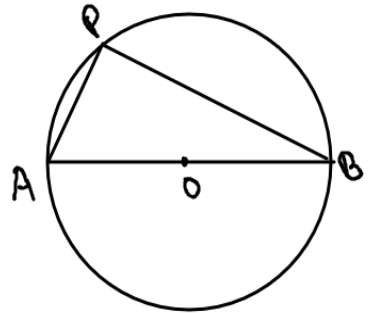
थाहा दिइएको : दिइएको चित्रमा O केन्द्रबिन्दु भएको वृत्तमा AB व्यास हो भने $\angle APB$ अर्ध वृत्तमा बनेको परिधि कोण हो ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle APB = 90^\circ$

यहाँ, $\angle APB$ र $\angle AOB$ दुवै क्रमशः चाप AB मा परिवेष्टित भएका परिधी कोण र केन्द्र कोणहरू हुन् ।

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

यहाँ, $\angle AOB$ सिधाकोण हो तसर्थ, $\angle APB = \frac{1}{2} 180^\circ = 90^\circ$ हुन्छ ।



नोट : यदि कुनै समकोण त्रिभुजको कर्ण बराबर व्यास भएमा उक्त वृत्त त्रिभुजको कर्णको सम्मुख शिर्षबिन्दुबाट जान्छ ।

साध्य 3

एउटै चापमा परिवेष्टित परिधीकोणहरू बराबर हुन्छन् ।

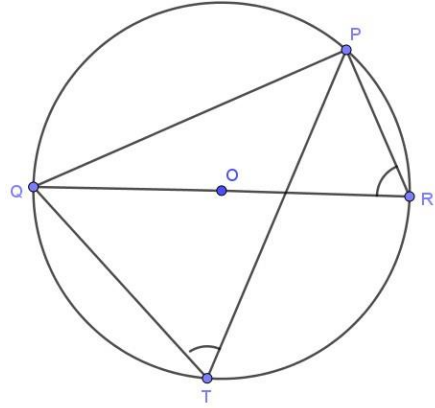
प्रयोगात्मक परीक्षण

केन्द्र O भएको एउटा वृत्त खिचनुहोस् ।

वृत्तमा कुनै दुई बिन्दुहरू P र Q लिने र उक्त बिन्दुहरू जोडेर जीवा PQ खिचनुहोस् ।

अब, चित्रमा देखाए जस्तै बिन्दुहरू R र T लिएर दुवैलाई क्रमशः P र Q सँग जोड्नुहोस् ।

अब बनेका कोणहरू $\angle PTQ$ र $\angle PRQ$ को नाप चाँदको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् । नापका कस्तो आयो निश्कर्ष लेख्नुहोस् ।



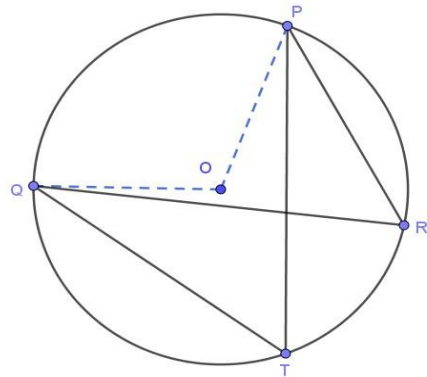
निश्कर्ष : एउटै चापमा परिवेष्टित परिधी कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

सैद्धान्तिक प्रमाण

थाहा दिइएको: केन्द्र बिन्दु O भएको एउटा वृत्त छ जसमा $\angle PTQ$ र $\angle PRQ$ चाप PQ मा परिवेष्टित भएका छन् ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle PTQ = \angle PRQ$

रचना : वृत्तको केन्द्र O लाई बिन्दुहरू P र Q सँग क्रमसँग जोडौं ।



प्रमाण

तथ्यहरू	प्रमाणहरू
1. $\angle POQ = 2 \angle PTQ$	1. एउटै चाप PQ मा परिवेष्टित परिधी कोण र केन्द्रकोण
2. $\angle POQ = 2 \angle PRQ$	2. एउटै चाप PQ मा परिवेष्टित परिधी कोण र केन्द्रकोण
3. $2 \angle PTQ = 2 \angle PRQ$	3. कारण 1 र 2 बाट
4. $\angle PTQ = \angle PRQ$	4. कारण 3 बाट

साध्य 4

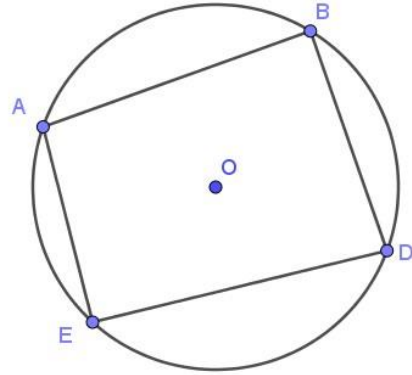
चक्रिय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

प्रयोगात्मक प्रमाण

एउटा वृत्त खिच्नुहोस् ।

उक्त वृत्तको परिधीमा चार बिन्दुहरू A, B, D र E लिनुहोस् ।

क्रमशः बिन्दुहरू A र B; B र D; D र E; E र A जोड्नुहोस् । यसरी बनेका चतुर्भुज ABDE, जसका चार शिर्षबिन्दुहरू वृत्तको परिधीमा रहेका छन् यसलाई चक्रिय चतुर्भुज भनिन्छ ।



अब चतुर्भुजका चारओटा कोणहरू तथा वृत्तको परिधीमा बनेका चारओटा परिधी कोणहरूका नामहरू लेख्नुहोस् । जस्तै,

$\angle EAB, \angle ABD, \angle DEA, \angle CDE$

चाँदको प्रयोग गरी माथिका सबै कोणहरूको नाप्नुहोस् ।

चतुर्भुज ABDE का चारकोणहरू मध्ये सम्मुख कोणहरू $\angle EAB$ र $\angle BDE$ तथा $\angle ABD$ र $\angle DEA$ का नापहरूको योगफल निकाली तलको तालिकामा भरौं ।

$\angle EAB$	$\angle ABD$	$\angle BDE$	$\angle DEA$	$\angle EAB + \angle BDE$	$\angle ABD + \angle DEA$

माथिको तालिकाका आधारमा चक्रिय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको योगफलका सम्बन्धलाई कक्षामा प्रस्तुत गरौं ।

निश्कर्ष : चक्रिय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।

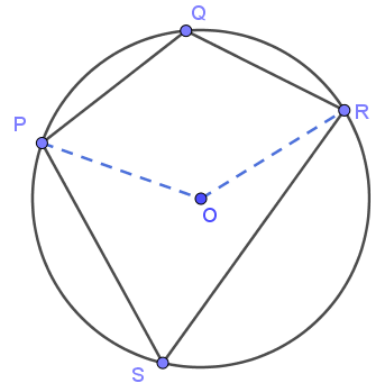
सैद्धान्तिक प्रमाण

थाहा दिइएको : केन्द्रबिन्दु O भएको वृत्त र चक्रिय चतुर्भुज PQRS छ ।

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle SPQ + \angle QRS = 180^\circ$

$\angle PQR + \angle RSP = 180^\circ$

रचना : बिन्दुहरू A र C लाई वृत्तको केन्द्र O सँग जोडौं ।



प्रमाण : चित्रमा,

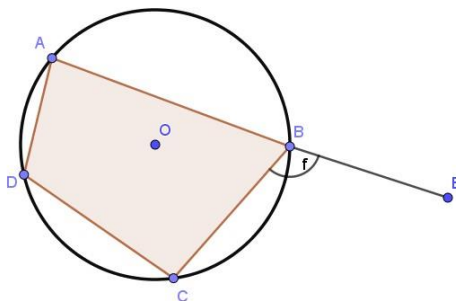
- 1) अधिक कोण $\angle POR = 2 \angle PSR$ [\because बराबर चाप PQR मा परिवेष्टित केन्द्र कोण र परिधी कोण]
 - 2) बृहत कोण $\angle POR = 2 \angle PQR$ [\because बराबर चाप PSR मा परिवेष्टित केन्द्र कोण र परिधी कोण]
- (1) र (2) लाई जोड्दा
- 3) $2 \angle PSR + 2 \angle PQR =$ अधिक कोण $\angle POR +$ बृहत कोण $\angle POR$
अथवा, $2(\angle PSR + \angle PQR) = 360^\circ$ [\because बिन्दु O को परिपरी बनेको कोणहरू]
अथवा, $\angle PSR + \angle PQR = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$
तसर्थ, $\angle PSR + \angle PQR = 180^\circ$
 - 4) यदि वृत्तको केन्द्रबिन्दु O सँग बिन्दुहरू Q र S जोडेको खण्डमा $\angle PQR + \angle RSP = 180^\circ$ हुन्छ ।

साध्य 5

चक्रिय चतुर्भुजको एउटा भुजा लम्ब्याउदा बन्ने बाहिरी कोण सम्मुख भित्री कोणसँग बराबर हुन्छ ।

सैद्धान्तिक प्रमाण

यहाँ, चक्रिय चतुर्भुज ABCD मा Ab लाई लम्ब्याइ E सम्म पुर्याइएको छ । जसमा $\angle CBE$ बाहिरी कोण हो ।



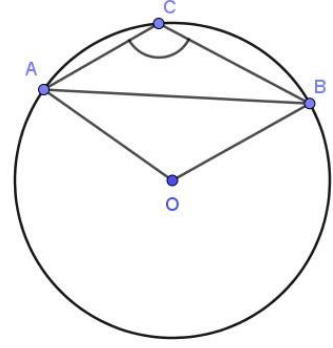
प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\angle ADC = \angle CBE$

प्रमाण

तथ्यहरू	कारणहरू
1. $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$	1. चक्रिय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरूको योगफल
2. $\angle ABC + \angle CBE = 180^\circ$	2. आसन्न कोणहरूको योगफल
3. $\angle ADC + \angle ABC = \angle ABC + \angle CBE$	3. 1 र 2 बाट
4. $\angle ADC = \angle CBE$	4. प्रमाणित भयो

उदाहरण 1

दिइएको चित्रमा $\angle ACB = 130^\circ$ र O केन्द्रबिन्दु भएको वृत्तको परिधीमा बिन्दुहरू A, B र C छन् भने $\angle OAB$ को मान कति हुन्छ पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

चित्रअनुसार,

बृहत कोण $\angle AOB = 2 \times \angle ACB = 2 \times 130^\circ = 260^\circ$ [\because चाप AB मा परिवेष्टित केन्द्र र परिधी कोणहरू]

बृहत कोण $\angle AOB + \angle AOB = 360^\circ$ [\because बिन्दु O को परिपरी बनेको कोणहरू]

$$260^\circ + \angle AOB = 360^\circ$$

$$\angle AOB = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ$$

फेरी, $\triangle AOB$ समद्विबाहु त्रिभुज हो तसर्थ $\angle OAB = \angle OBA$

अथवा, $\angle OAB + \angle OBA + \angle AOB = 180^\circ$ [\because त्रिभुजका तीन कोणहरूको योगफल]

अथवा, $\angle OAB + \angle OAB + 100^\circ = 180^\circ$

अथवा, $2\angle OAB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

अतः $\angle OAB = 80^\circ / 2 = 40^\circ$

उदाहरण 2

संगैको चित्रमा $\angle FGH = 80^\circ$ र $\angle HFG = 35^\circ$ भए $\angle FIG$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान :

यहाँ,

त्रिभुज FGH मा $\angle HGF + \angle FGH + \angle FHG = 180^\circ$

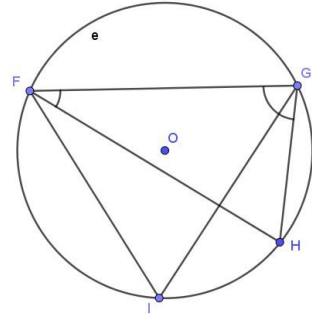
$$\text{Or, } 80^\circ + 35^\circ + \angle FHG = 180^\circ$$

$$\text{Or, } 115^\circ + \angle FHG = 180^\circ$$

$$\text{Or, } \angle FHG = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$$

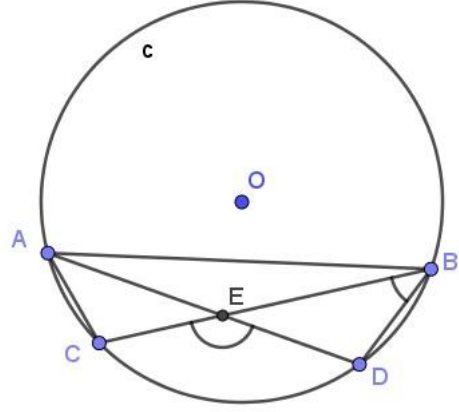
फेरी, $\angle FIG = \angle FHG = 65^\circ$ [\because बराबर चाप FG मा परिवेष्टित परिधी कोणहरू]

$$\angle FIG = 76^\circ$$



उदाहरण 3

सँगेको चित्रमा A, B, C र D वृत्तका चार बिन्दुहरू हुन् । जीवाहरू AD र BC बिन्दु E मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । यदि $\angle CED = 140^\circ$ र $\angle EBD = 45^\circ$ भए $\angle ACB$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान :

यहाँ,

$$\angle AEB = \angle CED = 140^\circ \text{ र } \angle EBD = 45^\circ$$

$$\angle AEB + \angle BED = 180^\circ \text{ [सिधा कोण]}$$

$$\angle BED = 180^\circ - \angle AEB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

$$\text{फेरी, } \angle EDB + \angle BED + \angle EBD = 180^\circ \quad [\text{त्रिभुजका तीन कोणहरू}]$$

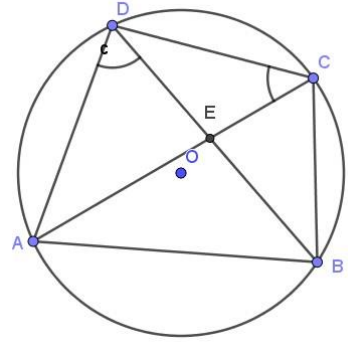
$$\text{अथवा, } \angle EDB = 180^\circ - 40^\circ - 45^\circ = 95^\circ$$

$$\text{फेरी, } \angle EDB = \angle ACB \quad [\text{बराबर चाप AB मा भएका परिधी कोणहरू}]$$

$$\text{तसर्थ, } \angle ACB = 95^\circ$$

उदाहरण 4

चक्रिय चतुर्भुज ABCD मा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु E मा काटिएका छन् । यदि $\angle ACD = 35^\circ$ $\angle ADB = 60^\circ$ भए $\angle DAB$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् । साथै, यदि $AD = CD$ भए $\angle CAB$ को मान कति होला ?



समाधान

यहाँ, चक्रिय चतुर्भुज ABCD मा विकर्णहरू AC र BD बिन्दु E मा काटिएका छन् ।

$$\angle ABC = \angle ADB = 60^\circ \quad [\text{बराबर चाप AB मा भएका परिधी कोणहरू}]$$

$$\angle BCD = \angle ABC + \angle ACD = 60^\circ + 35^\circ = 95^\circ$$

$$\text{फेरी, } \angle DAB + \angle BCD = 180^\circ \text{ [चक्रिय चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू]}$$

$$\angle DAB + 95^\circ = 180^\circ$$

$$\angle DAB = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$$

फेरी, यदि $AD = CD$ भए तसर्थ, $\angle DAC = \angle ACD = 35^\circ$

$$\angle BAD = \angle DAC + \angle CAB = 85^\circ$$

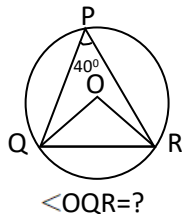
$$\text{Or, } 35^\circ + \angle CAB = 85^\circ$$

$$\text{Or, } \angle CAB = 85^\circ - 35^\circ = 50^\circ$$

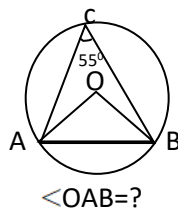
अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. तलका वृत्तहरूमा केन्द्रबिन्दु O छ भने मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

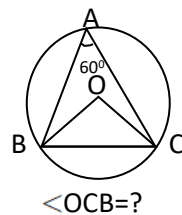
i.



ii)

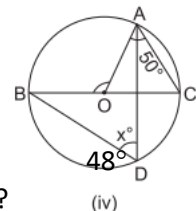
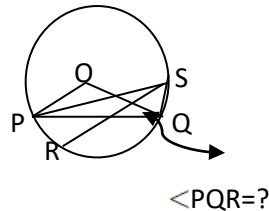
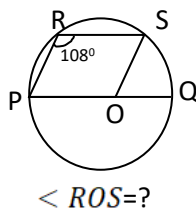
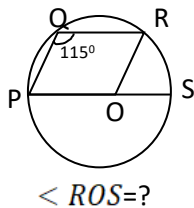


iii)



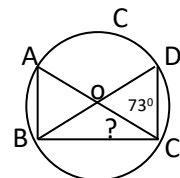
Answers: i) 90° ii) 100° iii) 60°

2. तलका चित्रहरूमा सोधिएको कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

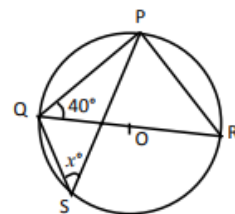


Answers: i) 50° ii) 36° iii) 21° iv) 50°

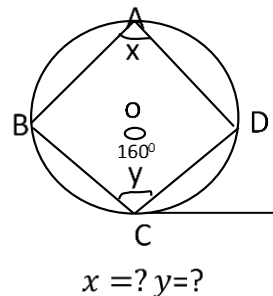
3. (क) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो । $\angle BDC = 73^\circ$ भए $\angle ACB$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् । (30°)



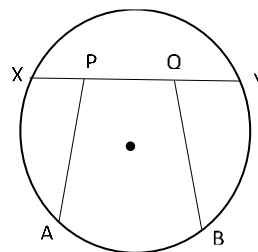
(ख) सँगैका चित्रमा O वृत्तको केन्द्रबिन्दु हो । यदि $\angle PQR = 40^\circ$ र $\angle PSQ = x^\circ$ भए x° को मान पत्ता लगाउनुहोस् । (50°)



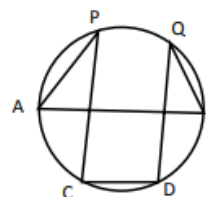
- (ग) दिइएको चित्रमा, O वृत्तको केन्द्र बिन्दु हो ।
 $ABCD$ एउटा चक्रिय चतुर्भुज हो, यदि $\angle BCD = 160^\circ$ छ भने x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।
 $(80^\circ, 100^\circ)$



- (घ) संगैको चित्रमा $XP = YQ$ र चाप $AX =$ चाप BY भए $\angle APX = \angle BQY$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

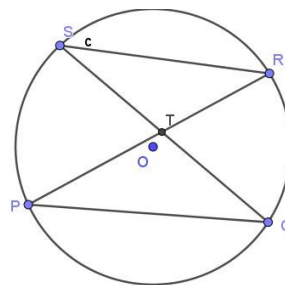


- (ङ) दिइएको चित्रमा यदि $\angle APC = \angle BQD$ छ भने $AB \parallel CD$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



- (च) दिइएको चित्रमा जीवा PR र QS परस्परमा बिन्दु T मा काटिएका छन् । यदि $TQ = TR$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

- (i) जीवा $PQ =$ जीवा SR
(ii) जीवा $PR =$ जीवा QS
(iii) चाप $PQR =$ चाप QRS



प्रयोगात्मक तथा परियोजना कार्य

केन्द्रहरू क्रमशः A र B भएका तिन जोडा बराबर वृत्तहरू PQX र RSY खिचनुहोस् । बराबर चापहरू PQ र RS बनाई जीवाहरू PQ र RS जोड्नुहोस् । PQ र RS नाप्नुहोस् । के जीवा AB ले वृत्तको परिधिमा बनाएको कोण केन्द्रीय कोणको आधा छ ? आएको नतिजालाई तालिकामा भर्नुहोस् ।

तथ्याङ्क शास्त्र (Statistics)

13.1 आधारभूत अवधारणा (Fundamental Concepts)

- ✓ तपाईंको घरका सबै सदस्यहरूको उमेर लेख्नुहोस् ।
- ✓ उक्त सबै उमेरहरूको योगफललाई जम्मा परिवार सङ्ख्याले भाग गर्नुहोस् ।
- ✓ यसरी आउने सङ्ख्यालाई उमेरको मध्यक भनिन्छ ।
- ✓ उमेर जनाउने सङ्ख्याहरूलाई बढ्दो क्रममा मिलाई लेख्नुहोस् ।
- ✓ सबैभन्दा बिचको उमेर जनाउने सङ्ख्या कति रहेछ पत्ता लगाउनुहोस् ।
- ✓ यसरी आउने मानलाई उमेरको मध्यिका मान भनिन्छ ।
- ✓ के प्राप्त सङ्ख्याहरूमा कुनै दोहोरिएका सङ्ख्याहरू छन् त ?
- ✓ सबैभन्दा बढी दोहोरिएको मानलाई रित वा बहुलक भनिन्छ ।
- ✓ अब हामी खण्डित श्रेणी र अभिछिन्न श्रेणीका तथ्याङ्कबाट मध्यक तथा मध्यिका रित कसरी पत्ता लगाउने त्यसबारे अध्ययन गरौं है त ।

13.2 खण्डित श्रेणीको मध्यक (Mean of discrete series)

तल दिइएको श्रेणी मा निश्चित मानको निश्चित बारम्बारता छ ।

x	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
f	f ₁	f ₂	f ₃	f ₄	f ₅	f ₆	f ₇

उक्त श्रेणीबाट मध्यक पत्ता लगाउनका लागि निम्न सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{f_1x_1+f_2x_2+\dots+f_nx_n}{f_1+f_2+\dots+f_n} \\ &= \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{\sum f \cdot x}{N}\end{aligned}$$

उदाहरण 1

तल दिइएको तथ्याङ्कबाट एउटा परीक्षामा विद्यार्थीले पाएको प्राप्ताङ्कको औसत पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	45	50	60	65	70	80	90	100
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	8	7	5	3	1

समाधान

माथिको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा निम्नअनुसार देखाउन सक्छौं ।

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	fx
45	2	90
50	3	150
60	6	360
65	8	520
70	7	490
80	5	400
90	3	270
100	1	100
	$\sum f = 35$	$\sum fx = 2380$

$$\text{यहाँ, } N = \sum f = 35$$

$$\sum fx = 2380$$

$$\text{अब, सूत्र अनुसार, मध्यक } \bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{2380}{35} = 68$$

$$\text{त्यसैले, } \bar{x} = 68$$

उदाहरण 1

एउटा क्रिकेट खेलमा तलको तालिकामा भएअनुसार विकेट लिइयो जसमा मध्यक \bar{x} को मान 7.3 भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

विकेट (x)	5	6	7	8	9
खेलाडी सङ्ख्या (f)	4	6	12	k	8

समाधान : यहाँ $\bar{x} = 7.3$

अब बारम्बारता तालिका बनाऔं ।

x	f	f × x
5	4	20
6	6	36
7	12	84
8	k	8k
9	8	72
	$N = \sum f = 30 + k$	$\sum fx = 212 + 8k$

अब, सूत्र अनुसार, मध्यक $\bar{x} = \frac{\sum f \times x}{N}$

$$\text{अथवा, } 7.3 = \frac{212 + 8k}{60 + k}$$

$$\text{अथवा, } 219.0 + 7.3k = 212 + 8k$$

$$\text{अथवा, } 0.7k = 7$$

$$k = \frac{7}{0.7} = 10$$

त्यसैले k को मान 10 हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- क) एउटा IQ परीक्षामा 15 जनाले पाएको निम्नानुसार प्राप्ताङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	5	6	7	10	9	8
बारम्बारता	2	3	1	2	3	5

- (ख) केही दिनको रेकर्डमा तापक्रमको अवस्था निम्नानुसार रह्यो भने तापक्रमको मध्यक मान कति होला?

तापक्रम (°C)	18	17	25	35	37
दिनको सङ्ख्या	12	15	28	25	20

- ग) कम्पनीका कामदारहरूको मासिक तलबको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

मासिक तलब (00)	100	150	170	180	200
कर्मचारी सङ्ख्या	6	4	10	9	6

2. एउटा परीक्षामा पाएको प्राप्ताङ्कको मध्यक $\bar{X} = 19.42$ भए y को मान कति होला?

प्राप्ताङ्क	5	10	15	20	25	30
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	y	8	5	4

13.3 वर्गीकृत श्रेणीको मध्यक (Mean of Continuous series)

कुनै समुदायका 40 जना मानिसको उमेर निम्नानुसारको रहेछ ।

26, 11, 31, 27, 32, 42, 49, 37, 31, 39, 45, 14, 22, 27, 28, 15, 14, 29, 21, 39
35, 14, 43, 18, 26, 48, 31, 42, 39, 25, 34, 27, 21, 20, 25, 21, 35, 36, 32, 49.

माथिको तथ्याङ्कमा सबैभन्दा सानो अङ्क 10 छ । यसलाई 10 को वर्गान्तरमा निम्नानुसार तालिकीकरण गर्न सकिन्छ

वर्गान्तर	मिलान चिन्ह	जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या
10-20		6
20-30		14
30-40		13
40-50		7

माथिको तालिकालाई बारम्बारता तालिका भनिन्छ । प्रत्येक वर्गान्तरको जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्यालाई उक्त वर्गान्तरको बारम्बारता भनिन्छ ।

वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक कसरी पत्ता लगाउने ?

$$\text{हामीलाई थाहा छ, खण्डित श्रेणीको मध्यक } \bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{\sum fx}{N}$$

वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनका लागि सर्वप्रथम प्रत्येक वर्गान्तरको मध्यमान निम्नानुसार पत्ता लगाउने ।

$$\text{मध्यमान (m}_i\text{)} = \frac{\text{वर्गान्तरको तल्लो बिन्दु} + \text{वर्गान्तरको माथिल्लो बिन्दु}}{2}$$

$$\text{उदाहरणका लागि 30-40 को वर्गान्तर छ भने मध्यमान} = \frac{40+30}{2} = \frac{70}{2} = 35 \text{ भयो ।}$$

त्यसपछि, खण्डित श्रेणीका जस्तै x को ठाँउमा m राखेर मध्यक निकालिन्छ ।

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot m_i}{\sum f_i} = \frac{\sum fm}{N}$$

यसलाई प्रत्यक्ष विधि वा (Direct method) पनि भनिन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको अवस्थामा मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

$$\sum fm = 1250, N = 50,$$

समाधान :

$$\text{यहाँ, } \sum fm = 1250$$

$$N = 50$$

$$\bar{x} = ?$$

$$\begin{aligned} \text{हामीलाई थाहा छ, } \bar{x} &= \frac{\sum fm}{N} \\ &= \frac{1250}{50} = 25 \end{aligned}$$

उदाहरण 2

स्वास्थ्य केन्द्रमा स्वास्थ्य जाँच गर्न आउनेको तौलको विवरण निम्नानुसार पाइयो । उक्त तथ्याङ्कको मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

तौल (KG)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
मानिसको सङ्ख्या	12	18	27	20	17	6

समाधान : यहाँ,

तौल (KG)	मानिसको सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	$f.m$
0-10	12	$\frac{0 + 10}{2} = 5$	60
10-20	18	$\frac{10 + 20}{2} = 15$	270
20-30	27	$\frac{20 + 30}{2} = 25$	675
30-40	20	$\frac{30 + 40}{2} = 35$	700
40-50	17	$\frac{40 + 50}{2} = 45$	765
50-60	6	$\frac{50 + 60}{2} = 55$	330
$\sum f = N = 100$			$\sum fm = 2800$

हामीलाई थाहा छ, $\bar{x} = \frac{\sum fm}{N} = \frac{2800}{100} = 28$

अतः मध्यक तौल (\bar{x}) = 28

उदाहरण 3

एउटा समुदायका मानिसहरूको उचाइको मध्यक (\bar{x}) को मान 157.75cm भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उचाइ (cm)	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	8	p	7	5	9

समाधान :

यहाँ, अङ्क गणितीय मध्यक पत्ता लगाउँदा

उचाइ (cm)	सङ्ख्या (f)	मध्यमान (m)	f.m
140-145	2	142.5	285
145-150	5	147.5	737.5
150-155	8	152.5	1220
155-160	k	157.5	157.5p
160-165	7	162.5	1137.5
165-170	5	167.5	837.5
170-175	3	172.5	517.5
	N = 30 + p		$\sum fm = 4735 + 157.5 p$

हामीलाई थाहा छ, मध्यक (\bar{x}) = $\frac{\sum fm}{N}$

$$\text{Or, } 157.75 = \frac{4735 + 157.5p}{30 + p}$$

$$\text{Or, } 4732.5 + 157.75p = 4735 + 157.5p$$

$$\text{Or, } 157.75p - 157.50p = 4735 - 4732.5$$

$$\text{Or, } 0.25 p = 2.5$$

$$\text{Or, } p = 10$$

उदाहरण 4

तल दिइएको कच्चा तथ्याङ्कलाई 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

5, 35, 22, 51, 47, 35, 15, 39, 19, 43, 38, 27, 33, 29, 40, 13, 40, 29, 9, 57, 7, 28, 38, 18

समाधान

यहाँ, बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

वर्गान्तर	मिलन चिन्ह	बारम्बारता (f)	मध्यमान (m)	f.m
0-10	III	3	5	15
10-20	IIII	4	15	60
20-30	IIII	5	25	125
30-40	IIII	6	35	210
40-50	IIII	4	45	180
50-60	II	2	55	110
		N = 24		$\sum fm = 700$

$$\begin{aligned}\text{हामीलाई थाहा छ, मध्यक } \bar{x} &= \frac{\sum fm}{N} \\ &= \frac{700}{24} = 29.17\end{aligned}$$

$$\therefore \text{मध्यक } \bar{x} = 29.17$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. तलका अवस्थामा मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

- 35, 43, 47, 46, 54, 56, 55, 36
- 13.5, 14.2, 15.8, 15.2, 16.9, 16.5, 17.4, 19.3, 15.2

c.

X	5	8	10	12	14	16
F	4	5	8	10	2	2

(10.32)

d.

उमेर (वर्ष)	12	13	14	15	16	17
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	4	6	12	10	6

(12.95)

2. तलका तथ्यांकहरूबाट प्रत्यक्ष विधिबाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

a.

उमेर (वर्ष)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	9	15	7	4

(24)

b.

अङ्क (score)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
खेलाडी सङ्ख्या	1	4	10	8	7	5

(43.86)

c.

ज्याला (रु.)	200-400	400-600	600-800	800-1000	1000-1200
कामदार सङ्ख्या	3	7	10	6	4

(706.67)

d.

वर्गान्तर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बरम्बारता	7	5	6	12	8	2

(28.75)

3. तलका तथ्यांकहरूबाट थाहा नभएको मान पत्ता लगानुहोस् ।

a. $\bar{x} = 49$, $\sum fm = 980$, $N = ?$ (10)

b. $\bar{x} = 102.25$, $N = 8$, $\sum fm = ?$ (818)

5. a. दिइएको अवस्थामा मध्यक (\bar{x}) को मान 32.5 भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
-------------	------	-------	-------	-------	-------	-------

विद्यार्थी सङ्ख्या	5	10	k	35	15	10
--------------------	---	----	---	----	----	----

(25)

- b. दिइएको अवस्थामा मध्यक(\bar{x}) को मान 14.2 भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

X	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
F	35	400	350	p	65

(150)

- c. दिइएको अवस्थामा मध्यक(\bar{x}) को मान 36.24 cm भए y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर (वर्ष)	16-24	24-32	32-40	40-48	48-54	54-62
कामदार सङ्ख्या	6	8	y	8	4	2

(12)

6. तल दिइएको कच्चा तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक (\bar{x}) पत्ता लगाउनुहोस् ।

- a. 15, 51, 32, 12, 32, 33, 23, 43, 35, 46, 57, 19, 59, 25, 20, 38, 16, 45, 39, 40

(10 वर्गान्तर)

- b. 25, 15, 24, 42, 22, 35, 34, 41, 33, 38, 54, 50, 36, 40, 27, 18, 35, 16, 51, 31, 23, 9, 16, 23, 31, 51, 7, 30, 17, 40, 60, 32, 50, 10, 23, 12, 21, 28, 37, 20, 58, 39, 10, 41, 13 (5 वर्गान्तरको)

परियोजना कार्य

- क) आफ्नो समुदायमा भएका कम्तिमा 100 जनाको उमेर सोधेर लेख्नुहोस् ।
 ख) उक्त तथ्याङ्कलाई उपयुक्त वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 ग) बारम्बारता तालिकालाई हिस्टोग्राममा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
 घ) प्रस्तुत बारम्बारता तालिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।
 ङ) सबै कार्यको विस्तृत प्रतिवेदन तयार पारी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

13.4. मधीका (Median)

क्रियाकलाप 1

क) तलका तथ्याङ्कहरूलाई बढ्दो क्रममा मिलाई राख्नुहोस् ।

23, 45, 65, 23, 34, 54, 76, 44, 21, 12, 27, 43, 54, 22, 55, 63, 47

ख) सुरुवात गणना गरी ठिक बिचमा पर्ने मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

तथ्याङ्कको बिचको मान जसले दिइएको तथ्याङ्कलाई ठिक दुई भागमा विभाजन गर्छ भने त्यसलाई मधीका (median) भनिन्छ ।

13.4.1 खण्डित श्रेणीका तथ्याङ्कबाट मधीका (Median of discrete series of data)

खण्डित श्रेणीको मधीका पत्ता लगाउने तरिका

खण्डित श्रेणीका तथ्याङ्कबाट मधीका पत्ता लगाउँदा निम्नानुसारका चरणहरू अवलम्बन गरिन्छ ।

क) सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउने ।

ख) $\frac{N+1}{2}$ को मान पत्ता लगाउने

ग) $\frac{N+1}{2}$ भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारताको मान हेर्ने ।

घ) उक्त सञ्चित बारम्बारता भएको तथ्याङ्कको मान नै मधीका हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएको तथ्याङ्कबाट मधीका पत्ता लगाउनुहोस् ।

x	10	12	15	20	25	30	32
f	4	8	13	10	8	7	5

सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा

x	F	सञ्चित बारम्बारता c.f
10	4	4
12	8	4 + 8 = 12
15	13	12 + 13 = 25
20	10	25 + 10 = 35
25	8	35 + 8 = 43
30	7	43 + 7 = 50
32	5	50 + 5 = 55
	N=55	

$$\text{अब मध्यिका पर्ने स्थान} = \frac{N+1}{2} \text{ औं पद}$$

$$= \frac{55+1}{2} \text{ औं पद}$$

$$= \frac{56}{2} \text{ औं पद}$$

$$= 28 \text{ औं पद}$$

यहाँ 28 औं पदमा 20 भएकाले मध्यिका 20 हुन्छ अथवा

सञ्चित बारम्बारता 28 भन्दा ठिक ठूलो सञ्चित बारम्बारताको संगतीमान मध्यिका हुन्छ। यहाँ 28 भन्दा ठीक ठूलो मान 35 हो। त्यसको संगती मान 20 हो। त्यसैले मध्यिका = 20 हुन्छ।

यदि सञ्चित बारम्बारता 28 छ भने सञ्चित बारम्बारता 28 ले दिने संगती (corresponding) मान नै मध्यिका हुन्छ।

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस्

उमेर (वर्ष)	15	18	21	24	29	34
मानिस सङ्ख्या	3	4	8	10	7	5

समाधान :

यहाँ, मध्यिकाको लागि तालिका निर्माण गर्दा

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित वारम्बारता (cf)
15	3	3
18	4	7
21	8	15
24	10	25
29	7	32
34	5	37
	N = 37	

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned}\text{मध्यिका (md)} &= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ पद} \\ &= \left(\frac{37+1}{2}\right)^{th} \text{ पद} \\ &= 19^{th} \text{ पद}\end{aligned}$$

यहाँ 19 औं पदमा 24 भएकाले मध्यिका 24 हुन्छ अथवा

19 सँग बराबर वा भन्दा ठिक माथिको ठुलो सञ्चित वारम्बारता 25 हो तसर्थ, 25 सञ्चित वारम्बारता भएको उमेर 24 हो। तसर्थ, मध्यिका = 24

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

तल दिइएका तथ्यांकहरूबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस्।

- क) 2.4, 4.6, 3.6, 4.7, 5.1, 2.5, 3.3, 4.5, 4.9, 2.9, 1.8 (3.6)
- ख) 97, 101, 104, 199, 95, 108, 119, 168, 148, 199, 142, 82, 199, 151, 99, 107 (121)

ग)

प्राप्ताङ्क	15	19	26	30	34	41	46	51
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	6	5	7	8	12	5	4

(34)

घ)

x	90	105	120	140	165	180	200
f	12	18	20	25	17	12	6

(140)

13.4.2 वर्गीकृत तथ्याङ्कबाट मध्यािका (Median of continuous series of data)

वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यािका निम्न चरणहरू अपनाई पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

(क) भन्दा सानो सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउने । (प्रत्येक वर्गान्तरको माथिल्लो बिन्दु भन्दा कम)

(ख) $\frac{N}{2}$ पत्ता लगाइ मध्यािकाको स्थान पहिचान गर्ने ।

(ग) $\frac{N}{2}$ को मानसँग त्यो भन्दा ठिक माथिको ठुलो सञ्चित बारम्बारताको सङ्ख्या भएको वर्गान्तरमा नै मध्यािका पर्ने वर्गान्तर हो ।

(घ) तलको सूत्र प्रयोग गरी मध्यािकाको मान पत्ता लगाउने ।

$$Md = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$$

जहाँ, L = मध्यािका पर्ने वर्गान्तरको तल्लो बिन्दु ।

N = जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

$C.I = \frac{N}{2}$ सँग बराबर वा सोभन्दा माथिको सञ्चित बारम्बारता ।

f = मध्यािका पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

h = मध्यािका पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

उदाहरण 2

दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यािका पत्ता लगाउनुहोस् :

प्राप्ताङ्क	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
विद्यार्थी सङ्ख्या	6	10	16	18	12	10	8

समाधान

यहाँ, मध्यिकाको लागि तालिका निर्माण गर्दा

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	भन्दा कम बारम्बारता	सञ्चित बारम्बारता ($c.f$)
0-10	6	10 भन्दा कम = 6	6
10-20	10	20 भन्दा कम = 6+10	16
20-30	16	30 भन्दा कम = 6+10+16	32
30-40	18	40 भन्दा कम = 6+10+16+18	50
40-50	12	50 भन्दा कम = 6+10+16+18+12	62
50-60	10	60 भन्दा कम = 6+10+16+18+12+10	72
60-70	8	70 भन्दा कम = 6+10+16+18+12+10+8	80
	N= 80		

हामीलाई थाहा छ,

मध्यिका (md) पर्ने वर्गान्तर = $\left(\frac{N}{2}\right)^{th} = \left(\frac{80}{2}\right)^{th} = 40^{th}$ class of cf

40 वा सोभन्दा ठीक माथिल्लो सञ्चित बारम्बारताको मान 50 छ। तसर्थ, मध्यिका पर्ने वर्गान्तर 20 – 40 हुन्छ।

जहाँ, $L = 30$, $c.f = 32$, $f = 18$, $h = 8$

सुत्र अनुसार मध्यिका (md) = $L + \frac{N-cf}{f} \times h$

$$= 30 + \frac{40-32}{18} \times 8$$

$$= 30 + \frac{64}{18}$$

$$= 30 + 3.56 = 33.56$$

उदाहरण 3

यदि तलको बारम्बारता तालिकाको मध्यिका मान 91.6 भए छुटेको बारम्बारता k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

x	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
f	5	k	22	25	14	4

समाधान

बरम्बारता पत्ता लगाउने तालिका

x	f	भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता $c.f$
0-20	5	5
20-40	k	$5+k$
40-60	22	$27+k$
60-80	25	$52+k$
80-100	14	$66+k$
100-120	4	$70+k$

हामीलाई थाहा छ,

मध्यिका (md) = 63.2

मध्यिका पर्ने वर्गान्तर 60-80

जहाँ, $L = 60$, $f = 25$, $c.f = 27+k$, $h = 20$, $N = 70+k$

सुत्रअनुसार, $Md = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h$

$$\text{Or, } 63.2 = 60 + \frac{\frac{(70+k)}{2} - (27+k)}{25} \times 20$$

$$\text{Or, } 63.2 - 60 = \frac{70+k-54-2k}{50} \times 20$$

$$\text{Or, } 3.2 = (16 - k) \times \frac{2}{5}$$

$$\text{Or, } 3.2 \times 5 = 32 - 2k$$

$$\text{Or, } 2k = 32 - 16$$

$$\text{Or, } 2k = 16$$

$$\text{तसर्थ, } y = 8$$

$$\therefore \text{छुटेको बारम्बारता (k) = 8}$$

उदाहरण 4

तलका तथ्याङ्कहरूबाट 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

44, 32, 8, 27, 35, 18, 55, 19, 22, 44, 33, 22, 47, 27, 45, 37, 28, 8, 17, 57, 9, 21, 35, 18

समाधान

माथिको तथ्याङ्कलाई बारम्बारता तालिकामा रूपान्तरण गर्दा

वर्गान्तर	मिलान चिह्न	बारम्बारता	भन्दाकम सञ्चित बारम्बारता
0-10	III	3	3
10-20	IIII	4	3+4=7
20-30		5	7+5=12
30-40	I	6	12+6=18
40-50	IIII	4	18+4=22
50-60	II	2	22+2=24
		N = 24	

$$\begin{aligned} \text{अब, मध्यिका पर्ने वर्गान्तर} &= \frac{N}{2} \\ &= \frac{24}{2} = 12 \end{aligned}$$

12 सँग सञ्चित बारम्बारता बराबर छ ।

तसर्थ, मध्यिका पर्ने वर्गान्तर, 20 – 30 हुन्छ ।

जहाँ, L = 20, c.f = 12, f = 5, h = 10

$$\begin{aligned} \text{मध्यिका (md)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\ &= 20 + \frac{12 - 12}{5} \times 10 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{मध्यिका} = 20$$

अथवा,

12 भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारता 18 लिँदा, मध्यिका पर्ने वर्गान्तर, 30 – 40 हुन्छ ।

जहाँ, L = 30, c.f = 18, f = 6, h = 10

$$\begin{aligned} \text{मध्यिका (md)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\ &= 30 + \frac{12 - 18}{6} \times 10 \\ &= 30 - 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{मध्यिका} = 20$$

उदाहरण 5

तलको तालिकाबाट मध्याका पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर समूह	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	40-60	60-70	70-80	80-90	90-100
मानिस सङ्ख्या	6	12	10	32	22	18	15	5	4	3

समाधान

सर्वप्रथम भन्दा सानो र भन्दा ठुलो सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्ने ।

उमेर समूह	मानिस सङ्ख्या f	भन्दा सानो सञ्चित बारम्बारता	Less than cf
0-10	6	10 भन्दा सानो	6
10-20	12	20 भन्दा सानो	18
20-30	10	30 भन्दा सानो	28
30-40	32	40 भन्दा सानो	60
40-50	22	50 भन्दा सानो	82
50-60	18	60 भन्दा सानो	100
60-70	15	70 भन्दा सानो	115
70-80	5	80 भन्दा सानो	120
80-90	4	90 भन्दा सानो	124
90-100	3	100 भन्दा सानो	127

अब मध्याका पर्ने वर्गान्तर $= \left(\frac{N}{2}\right)$ औं पद

$$= \frac{127}{2} = 63.35$$

मध्याका पर्ने वर्गान्तर 40- 50 भयो । किनकी 63.35 भन्दा ठीक माथिको सञ्चित बारम्बारता 82 हो ।

अब, तसर्थ, मध्यिका पर्ने वर्गान्तर, 40-50 हुन्छ ।

जहाँ, $L = 40$, $c.f = 60$, $f = 22$, $h = 10$

$$\begin{aligned} \text{मध्यिका (md)} &= L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times h \\ &= 40 + \frac{63.35 - 60}{22} \times 10 \\ &= 40 + 1.53 = 41.53 \end{aligned}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. दिइएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

प्राप्ताङ्क	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	6	7	11	9	4	1

(64.54kg)

(ख)

उचाइ (cm)	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175
मनिस सङ्ख्या	3	4	8	10	8	4	3

(157.5 cm)

(ग)

खर्च (प्रतिदिन)	100 भन्दा कम	100-200	200-300	300-400	400-500	500 भन्दा बढि
कामदार सङ्ख्या	20	36	52	25	20	7

(Rs. 246.15)

2. (क) एउटा परीक्षामा विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्कको मध्यिका $Md = 35$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	8	k	4	5

(6)

- (ख) एउटा कम्पनीमा काम गर्ने कामदारहरूको ज्यालाको मधीका $Md = 132.5$ भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

ज्याला (Rs.)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160
कामदार सङ्ख्या	5	6	P	4	7	5

(3)

- (ग) एउटा समूदायमा भएका बयस्कहरूको उमेरको मधीका $Md = 36$ वर्ष भए थाहा नभएको बारम्बारताको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उमेर (yr)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
मानिस सङ्ख्या	50	70	100	300	?	220	70	60

(150)

3. तलका तथ्यांकहरूबाट मधीका पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)

प्राप्ताङ्क	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	5	4

78.33)

(ख)

आम्दानी (Rs)	<600	<700	<800	<900	<1000
कामदार सङ्ख्या	30	98	152	177	200

(703.70)

4. क) एउटा कक्षा परीक्षामा 30 जना विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेका प्राप्ताङ्क निम्नानुसार रहेका छ ।

22, 56, 62, 37, 48, 30, 58, 42, 29, 39, 37, 50, 38, 41, 32, 20, 28, 16, 43, 18, 40, 52, 44, 27, 35, 45, 36, 49, 55, 40

माथिको तथ्याङ्कबाट 10 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) कक्षा 10 का 30 जना विद्यार्थीहरूको उचाईलाई से मी मा निम्नानुसार दिइएको छ ।
उक्त तथ्याङ्कबाट 5 वर्गान्तरको बारम्बारता तालिका निर्माण गरी मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

142, 145, 151, 157, 159, 160, 165, 162, 156, 158, 155, 141, 147, 149, 148,
159, 154, 155, 166, 168, 169, 172, 174, 173, 176, 161, 164, 163, 149, 150,
154, 153, 152, 164, 158, 159, 162, 157, 156, 155. (157.5)

13.5. रीत वा बहुलक (mode)

दिइएको तथ्याङ्कमा सबभन्दा बढी दोहोरिएको सङ्ख्यालाई रीत (mode) भनिन्छ । खण्डित श्रेणीमा जसको बढी बारम्बारता छ, त्यो सङ्ख्या नै रीत हुन्छ । त्यस्तै वर्गीकृत (continuous) श्रेणीमा पनि सबभन्दा बढी बारम्बारता भएका श्रेणीलाई रीत श्रेणी (modelclass) भनिन्छ ।

13.5.1 व्यक्तिगत श्रेणीको रीत

दिइएको आँकडा 4, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 7, 8,8,5,6,6,6,7छ ।

यी आँकडाहरूमा

4 3 पटक दोहोरिएको छ ।

5 1 पटक दोहोरिएको छ ।

6 5 पटक दोहोरिएको छ ।

7 4 पटक दोहोरिएको छ ।

8 2 पटक दोहोरिएको छ ।

सबभन्दा बढी पटक अर्थात 5 पटक दोहोरिएको सङ्ख्या 6 हो । त्यसैले रीत 6 हुन्छ ।

13.5.2 खण्डित श्रेणीको रीत

यहाँ दिइएको खण्डित श्रेणीलाई हेरौं ।

वस्तुको साइज	10	11	12	13	14	15	16	17
बारम्बारता	2	5	7	9	10	6	4	3

यहाँ सबैभन्दा धेरै बारम्बारता 14 को छ । त्यसको अर्थ 14 साइजको सामान पटक पटक अर्थात सब भन्दा बढी 10 पटक दोहोरिएको हुनाले यसको रीत 14 हुन्छ ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- दिइएको आंकडाबाट रित निकाल्नुहोस् ।
 - 23, 22, 20, 25, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 22, 18, 22, 25
 - 8, 16, 28, 60, 30, 60, 8, 12, 8
 - 110, 105, 100, 150, 250, 175, 225, 275, 110, 150, 100, 110
- तलका खण्डित श्रेणी (discrete series) रित निकाल्नुहोस् ।

(क)

प्राप्ताङ्क	5	6	7	10	9	8
बारम्बारता	2	3	1	2	3	5

(ख)

तापक्रम	18	17	25	35	37
दिनको सङ्ख्या	12	15	28	25	20

(ग)

मासिक तलब	100	150	170	180	200
कर्मचारी सङ्ख्या	6	4	10	9	6

13.5.3 वर्गीकृत तथ्याङ्कको रित (Mode of continuous series of data)

तरिका

- सर्वप्रथम सबैभन्दा ठुलो बारम्बारता र उक्त बारम्बारता भएको वर्गान्तर पत्ता लगाउने ।
- उक्त वर्गान्तरलाई रित पर्ने वर्गान्तर भनिन्छ, जसको तल्लो अङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।
- रितपर्ने वर्गान्तर भन्दा तल्लो वर्गान्तर, रित पर्ने वर्गान्तर र उक्त वर्गान्तर भन्दा माथिल्लो वर्गान्तरको बारम्बारता पत्ता लगाउने र क्रमशः f_0 , f_1 र f_3 मान्ने ।
- रितपर्ने वर्गान्तरको अन्तर (h) पत्ता लगाउने
अब रित निकाल्नका लागि तलको सूत्र प्रयोग गर्ने

$$\text{रित (mode)} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

उदाहरण 1

तलको आँकडाबाट बहुलक वा रित पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क (kg)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	7	11	10	3	1

समाधान

यहाँ, बहुलक पत्ता लगाउँदा

तौल (kg)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थी सङ्ख्या	3	5	7 (f ₀)	11 (f ₁)	10 (f ₂)	3	1

यहाँ, सबैभन्दा धेरै बारम्बारता 11 छ । उक्त बारम्बारताको वर्गान्तर 60-70 हो ।

तसर्थ, L = 60, f₁ = 11 भयो ।

फेरी बहुलक पर्ने श्रेणीको

फेरी, f₀ = 7, f₂ = 10 र h = 10 छ ।

$$\text{हामीलाई थाहा छ, रित (mode)} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$= 60 + \frac{11 - 7}{2 \times 11 - 7 - 10} \times 10$$

$$= 60 + \frac{4}{5} \times 10$$

$$= 60 + 8 = 68$$

अतः बहुलक (रित) = 68

उदाहरण 2

तलको तथ्याङ्कबाट लेखाचित्र प्रयोग गरी रित वा बहुलक पत्ता लगाउनुहोस् ।

वर्गान्तर	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बरम्बारता	5	8	12	7	5	3

समाधान

यहाँ, सबैभन्दा धेरै बारम्बारता भएको वर्गान्तर 20-30 हो । तसर्थ बहुलक पर्ने वर्गान्तर 20- 30 भयो ।

जहाँ, $f_0 = 8$, $f_1 = 12$, $f_2 = 7$, $h = 10$ र $L = 20$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned}\text{फेरी, बहुलक(mode)} &= L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h = 20 + \frac{12 - 8}{2 \times 12 - 8 - 7} \times 10 \\ &= 20 + \frac{4}{9} \times 10 = 20 + 4.44 = 24.44,\end{aligned}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. दिइएका बारम्बारता तालिकाहरूबाट रित (Mode) पत्ता लगाउनुहोस्।

(क)

प्राप्ताङ्क	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	5	8	6	4	5

(ख)

ज्याला (Rs.)	100-110	110- 120	120-130	130-140	140-150	150-160
कामदार सङ्ख्या	5	6	4	7	5	4

(ग)

उमेर (yr)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
मनिस सङ्ख्या	50	70	100	300	220	150	70	60

2. समुदायमा भएका 100 जना मानिसहरूको उमेर सोधेर लेख्नुहोस् । उक्त आँकडालाई 20 को वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई बहुलक पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू : 1. क) (33) ख) (136) ग) (38.57)

13.6 चतुर्थांशहरू (Quartiles)

(क) एउटा 100 m लम्बाइ भएको बाटो सफा गर्नु छ । यसमा 0 देखि 100 सम्म चिह्न लगाइएको छ । अब कुन सङ्ख्या अंकित चिह्नले उक्त बाटोलाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्छ ?

यदि उक्त बाटोलाई चार बराबर भागमा बाँड्नु छ भने कुनकुन अङ्कले बाड्लान् ?

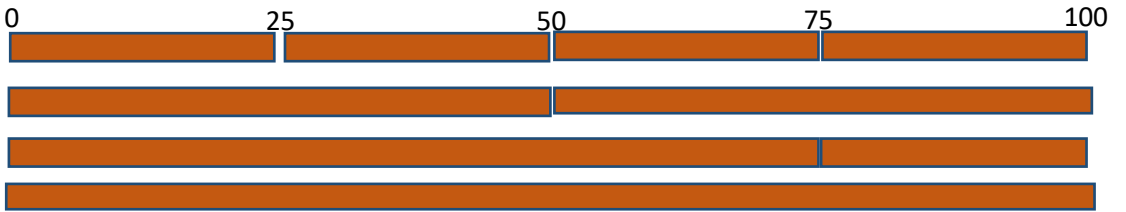
तलको चित्रमा अबलोकन गरौं है त ।

(ख) पहिलोलाई बराबर 4 भागमा बाँड्नुहोस् र प्रत्येक टुक्राको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् । 25 ले 100 लाई बराबर 4 भागमा बाँड्छ । यो पहिलो चतुर्थांश हो ।

(ग) दोस्रोलाई बराबर 2 भागमा बाँड्नुहोस् र प्रत्येक टुक्राको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) तेस्रोलाई बराबर 4 भागलाई 3 भाग एकातिर र अर्को एक भाग अर्कोतिर गरी दुई भाग लगाउनुहोस् ।

यसलाई निम्नानुसार चित्रमा देखाउन सकिन्छ ।



माथिको चित्रमा हेर्दा 4 बराबर भागमा विभाजन गर्दा 25m का टुक्राहरू बन्छन् ।

बराबर 2 भागमा बाँड्दा 50 m का टुक्राहरू बन्छन् । यसलाई मध्यिका पनि भनिन्छ ।

त्यस्तै 4 बराबर टुकामध्ये 3 बराबर टुक्राहरू जोड्दा जम्मा लम्बाइ 75 m हुन्छ ।

25 पहिलो चतुर्थांश (Q_1), 50 दोस्रो चतुर्थांश (Q_2)= median र 75 तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) हो ।

कुनै आँकडालाई बराबर चार भागमा बाँड्ने मानहरूलाई चतुर्थांश भनिन्छ । सर्वप्रथम तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राखिन्छ

प्रथम चतुर्थांशलाई एक चौथाइ या पुरैको 25% को रूपमा बुझ्न सकिन्छ । तृतीय चतुर्थांशलाई तीन चौथाइ या 75% को रूपमा सम्झन सकिन्छ ।

13.6.1 व्यक्तिगत श्रेणीको चतुर्थांस निकाल्ने तरिका

$$Q_1 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{n+1}{4} \text{ औं पद}$$

$$Q_2 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{2(n+1)}{4} = \frac{n+1}{2} \text{ औं पद (माध्यिका)}$$

$$Q_3 \text{ पर्ने स्थान} = \frac{3(n+1)}{4} \text{ औं पद हुन्छ।}$$

उदाहरण 1

चतुर्थांशलाई निम्न उदाहरणबाट प्रष्ट पार्न सकिन्छ।

दिइएको आँकडाबाट पहिलो चतुर्थांश र तेस्रो चतुर्थांशको मान पत्ता लगाउनुहोस्।

7, 18, 55, 33, 67, 41, 29

समाधान

दिइएको आँकडालाई बढ्दो क्रममा लेख्दा,

7, 18, 29, 33, 41, 55, 67

जम्मा सङ्ख्या $n = 7$,

$$\text{पहिलो चतुर्थांश} = \frac{n+1}{4} \text{ औं पद} = \frac{7+1}{4} \text{ औं पद} = \frac{8}{4} \text{ औं पद}$$

$$= 2 \text{ औं पद}$$

तसर्थ, $Q_1 = 18$ हुन्छ।

$$\text{त्यसै गरी } Q_3 = \frac{3(n+1)}{4} \text{ औं पद}$$

$$= \frac{2(7+1)}{4} \text{ औं पद}$$

$$= 6 \text{ औं पद}$$

$Q_3 = 55$ हुन्छ।

13.6.2 खण्डित श्रेणी को चतुर्थांश निकाल्ने तरिका

बढ्दो क्रममा लेखिएको आँकडालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा लेखिन्छ। त्यसपछि पहिलो, दोस्रो र तेस्रो चतुर्थांश पर्ने स्थान पत्ता लगाएर चतुर्थांशहरू निकालिन्छ। यसलाई निम्न उदाहरणबाट प्रष्ट गर्न सकिन्छ।

ज्याला रु 00.	20	22	23	25	27	28	30
कामदार	8	10	11	16	20	25	15

समाधान

दिइएको आँकडालाई सञ्चित बारम्बारता तालिकामा लेख्दा,

ज्याला (x)	कामदार (f)	$c.f$
20	8	8
22	10	18
23	11	29
25	16	45
27	20	65
28	25	90
30	15	105
	$N = 105$	

$$\begin{aligned}\text{अब सूत्र अनुसार पहिलो चतुर्थांश (Q}_1\text{)} &= \frac{N+1}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{105+1}{4} \text{ औं पद} \\ &= \frac{106}{4} \text{ औं पद} \\ &= 26.5 \text{ औं पद}\end{aligned}$$

अब, 26.5 भन्दा ठीक माथिको $c.f.$ 29 हो। त्यसैले 29 को संगतीमान 23 नै पहिलो चतुर्थांश हुन्छ।

$$\text{अतः } Q_1 = 23$$

$$\begin{aligned}\text{त्यस्तै, } Q_3 &= \frac{3(N+1)}{4} \text{ औं पद} \\ &= 3 \times 26.5 = 79.5 \text{ औं पद}\end{aligned}$$

79.5 भन्दा ठीक माथिको $c.f.$ 90 हो। त्यसैले $Q_3 = 28$ हुन्छ।

उदाहरण 1

तलको तथ्याङ्कबाट Q_1 र Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् ।

कामदारको उमेर	20	25	28	30	32	35	42	46
कामदार सङ्ख्या	2	8	12	10	14	7	5	1

समाधान

Q_1 र Q_3 को गणनाका लागि भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण गर्ने ।

कामदारको उमेर	कामदार सङ्ख्या (f)	c.f.
20	2	2
25	8	10
28	12	22
30	10	32
32	14	46
35	7	53
42	5	58
46	1	59

$$\begin{aligned}\text{यहाँ, } Q_1 &= \left(\frac{N+1}{2}\right)^{\text{th}} \text{पद} \\ &= \left(\frac{60}{2}\right)^{\text{th}} \text{पद} \\ &= 15^{\text{th}} \text{पद}\end{aligned}$$

\therefore 15 सँग बराबर तथा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारताको मान 22 हो ।

तसर्थ, सञ्चित बारम्बारता 22 हुँदाको x को मान = 28 नै Q_1 हो ।

$$\therefore Q_1 = 28$$

$$\text{फेरी, } Q_3 = \left(\frac{3(N+1)}{4}\right)^{\text{th}} \text{पद}$$

$$= \left(\frac{3(60)}{4}\right)^{\text{th}} \text{ पद}$$

$$= 45^{\text{th}} \text{ पद}$$

45 सँग बराबर तथा ठिक ठुलो मान 46 हो ।

तसर्थ, सञ्चित बारम्बारता 46 हुँदाको x को मान = 32 नै Q_3 हो ।

ie. $Q_3 = 32$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

तलको तथ्याङ्कहरूबाट Q_1, Q_2, Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) 10, 12, 14, 11, 22, 15, 27, 14, 16, 13, 25

(ख)	अङ्क	42	48	49	53	56	59	60	65	68	70
	खेलाडी सङ्ख्या	2	3	5	8	9	11	7	8	6	4

(ग)	प्राप्ताङ्क	<35	<40	<50	<55	<60	<65	<75	<85
	विद्यार्थी सङ्ख्या	3	10	22	40	70	95	110	123

13.6.3 वर्गीकृत श्रेणीबाट चतुर्थांश पत्ता लगाउने तरिका

(क) भन्दा कम सञ्चित बारम्बारता पत्ता लगाउने ।

(ख) सूत्र $Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right)^{\text{th}}$ पद र $Q_3 = \left(\frac{3N}{4}\right)^{\text{th}}$ पत्ता लगाउने

(ग) सञ्चित बारम्बारतामा Q_1 का लागि $\frac{N}{4}$ सँग बराबर वा त्यो भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारताको भएको वर्गान्तरमा र Q_3 का लागि $\frac{3N}{4}$ भन्दा ठिक माथिको सञ्चित बारम्बारता भएको वर्गान्तरमा हेर्ने ।

(घ) त्यसपछि निम्नानुसारको सूत्रहरू प्रयोग गर्ने ।

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f}$$

जहाँ, $L = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको तल्लो बिन्दु ।

$N =$ जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

$C.f = N/4$ संग बराबर वा सोभन्दा अधिल्लो सञ्चित बारम्बारता ।

$f = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

$h = Q_1$ पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$$

जहाँ, $L = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको तल्लो बिन्दु ।

$N =$ जम्मा तथ्याङ्कको सङ्ख्या

$C.f = 3N/4$ संग बराबर वा सोभन्दा अधिल्लो सञ्चित बारम्बारता ।

$f = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको बारम्बारता

$h = Q_3$ पर्ने वर्गान्तरको अन्तर

उदाहरण 2

तलको तथ्याङ्कबाट Q_1 र Q_3 पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	8	15	14	10	8	3

समाधान

Q_1 र Q_3 को गणनाका लागिभन्दा कम सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण

प्राप्ताङ्क	विद्यार्थी सङ्ख्या	सञ्चित बारम्बारता
10-20	2	2
20-30	8	10
30-40	15	25
40-50	14	39
50-60	10	49
60-70	8	57
70-80	3	60

अब, Q_1 पर्ने वर्गान्तर $(\frac{N}{4})^{th}$

$$= (\frac{60}{4})^{th}$$

$$= 15^{th}$$

i.e. Q_1 पर्ने वर्गान्तर 30-40 हो किनभने 15 भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारताको मान 25 छ ।

यहाँ, $L = 30$, $c.f = 10$, $f = 15$, $h = 10$

$$\text{अतः } Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h$$

$$Q_1 = 30 + \frac{15 - 10}{15} \times 10$$

$$= 30 + 3.34$$

$$= 33.34$$

फेरी, Q_3 पर्ने वर्गान्तर $\frac{3N}{4}$

$$= \frac{3 \times 60}{4}$$

$$= 45^{\text{th}} \text{ पद}$$

Q_3 पर्ने वर्गान्तर 50-60 हो किनभने 45 भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारताको मान 49 छ ।

अब, $L = 50$, $c.f = 39$, $f = 10$, $h = 10$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$$

$$= 50 + \frac{45 - 39}{10} \times 10$$

$$= 50 + 6$$

$$= 56$$

उदाहरण 3

तलको तथ्याङ्कबाट Q_1 , Q_2 , Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

आम्दानी (सयमा)	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
कामदार सङ्ख्या	10	15	40	55	30	25	5

समाधान

चतुर्थांश पत्ता लगाउनका लागि सञ्चित बारम्बारता तालिका निर्माण

आम्दानी (सयमा)	कामदार सङ्ख्या	भन्दाकम सञ्चित बारम्बारता
0-5	10	10
5-10	15	25
10-15	40	65
15-20	55	120
20-25	30	150
25-30	25	175
30-35	5	180

यहाँ, Q_1 पर्ने वर्गान्तर $N/4 = 180/4 = 45$

45 भन्दा ठुलो सञ्चित बारम्बारता 65 हो । तसर्थ Q_1 पर्ने वर्गान्तर 10-15 हो ।

जहाँ, $L = 10$, $cf = 25$, $N/4 = 45$ $h = 5$, $f = 40$

$$\begin{aligned}\text{अतः } Q_1 &= L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 10 + \frac{45 - 25}{40} \times 5 = 10 + 2.5 = 12.5\end{aligned}$$

फेरी, Q_2 पर्ने वर्गान्तर $2N/4 = 2 \times 180/4 = 90$

90 भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारता 120 हो तसर्थ Q_2 पर्ने वर्गान्तर 15-20 हो ।

जहाँ, $L = 15$, $cf = 65$, $2N/4 = 90$ $h = 5$, $f = 55$

$$\begin{aligned}\text{अतः } Q_2 &= L + \frac{\frac{2N}{4} - cf}{f} \times h \\ &= 15 + \frac{90 - 65}{55} \times 5 = 15 + 2.28 = 17.28\end{aligned}$$

फेरी, Q_3 पर्ने वर्गान्तर $3N/4 = 3 \times 180/4 = 135$

135 भन्दा ठिक ठुलो सञ्चित बारम्बारता 150 हो । तसर्थ Q_3 पर्ने वर्गान्तर 20 – 25 हो ।

जहाँ, $L = 20$, $cf = 120$, $3N/4 = 135$ $h = 5$, $f = 30$

$$\text{अतः } Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$$

$$= 20 + \frac{135-120}{30} \times 5 = 20 + 2.5 = 22.25$$

अतः $Q_3 = 22.25$

उदाहरण 4

यदि माथिल्लो चतुर्थांशको मान 46 भए, a को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

खर्च (हजारमा)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
विद्यार्थी सङ्ख्या	15	18	P	20	17

समाधान : चतुर्थांश पत्ता लगाउने तालिका

खर्च (हजारमा)	विद्यार्थी सङ्ख्या	भन्दाकम सञ्चित बारम्बारता
10-20	15	15
20-30	18	33
30-40	a	33 + a
40-50	20	53 + a
50-60	17	70 + a

यहाँ, दिइएको $Q_3 = 46$ छ ।

तसर्थ Q_3 पर्ने वर्गान्तर 40 – 50 हो ।

जहाँ, $L = 40$, $cf = 33 + a$, $3N/4 = 3(70+a)/4$ $h = 10$, $f = 20$

$$\text{अतः } Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times h$$

$$\text{OR, } 46 = 40 + \frac{\frac{3(70+a)}{4} - (33+a)}{20} \times 10$$

$$\text{OR, } 46 - 40 = \frac{210+3a-132-4a}{80} \times 10$$

$$\text{Or, } 6 = \frac{78-a}{8} \times 1$$

$$\text{Or, } 48 = 78 - a$$

$$\text{Or, } a = 78 - 48 = 30$$

$$\therefore a = 30$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. तलको तथ्याङ्कहरूबाट Q_1, Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क)	उमेर	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
	विद्यार्थी सङ्ख्या	5	12	25	26	24	28	20	15

(ख)	प्राप्ताङ्क	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
	विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	6	12	13	11	7

(ग)	उचाइ(cm)	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150	150-160	160-170
	विद्यार्थी सङ्ख्या	3	4	9	15	20	14	7

(घ)	ज्याला (Rs)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
	कामदार सङ्ख्या	6	11	21	34	25	22

2. (क) यदि $Q_1 = 8$ भए, k को मान कति होला ?

उमेर (yr)	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36
मानिस सङ्ख्या	9	6	5	k	7	9

($K=8$)

(ख) यदि $Q_1 = 31$ भए छुटेको बारम्बारता कति होला ?

वर्गान्तर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	4	5	?	8	7	6

(10)

(ग) यदि $Q_3 = 51.75$ भए q को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

तौल (in kg)	40-44	44-48	48-52	52-56	56-60	60-64
बारम्बारता	8	10	14	q	3	1

(16)

3. तलको तथ्याङ्कहरूबाट Q_1, Q_3 को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उचाइ (cm)	<125	<130	<135	<140	<145	<150	<155
बरम्बारता	0	5	11	24	45	60	72

4. तल दिइएका आँकडाहरूले एउटा गाउँका 40 जना वयस्क मानिसको उमेरलाई जनाउँछ । उक्त आँकडालाई 10 को वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका बनाई पहिलो र तेस्रो चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

65, 25, 35, 35, 62, 42, 50, 72, 78, 34, 30, 42, 60, 40, 58, 53, 70, 30, 34, 51, 54, 42, 59, 20, 40, 28, 46, 60, 47, 52, 35, 72, 30, 58, 30, 51, 59, 28, 45, 55

परियोजना कार्य

विद्यालयका कक्षा 9 / 10 का 100 जना विद्यार्थीले आन्तरिक परीक्षा 70 पूर्णाङ्कमा प्राप्त गरेको जम्मा प्राप्ताङ्क सौधेर लेख्नुहोस् ।

- उक्त तथ्याङ्कलाई उपयुक्त वर्गान्तरको बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
- तथ्याङ्कको प्रयोग गरी भन्दा ठुलो र भन्दा सानो सञ्चित बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।
- बारम्बारता बक्रहरू खिच्नुहोस् ।
- बारम्बारता बक्रको आधारमा तिनओटै चतुर्थांशहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- सबै कार्यालयको सिलसिलेवार रूपमा प्रतिवेदन तयार गरी कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. 50 जना विद्यार्थीको उचाइ निम्नानुसार रहेको छ ।

उचाइ (से.मी. मा)
115, 118, 142, 145, 151, 157, 159, 160, 165, 162, 156, 125, 137, 155, 149, 122, 128, 133, 144, 158, 155, 141, 169, , 161, 164, 163, 149, 150, 154, 147, 149, 148, 159, 154, 155, 166, 168, 153, 152, 164, 158, 159, 162, 157, 156, 172, 174, 173, 176, 155.

- (क) उक्त तथ्याङ्कहरूलाई 10 को वर्गान्तर बनाई बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।
 (ख) माथिको बारम्बारता तालिकाबाट मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ग) (क) मा तयार पारिएको बारम्बारता तालिकालाई हिस्टोग्राममा देखाउनुहोस् ।
 (घ) माथिको तथ्याङ्कको मध्यिका मान कति होला ?
2. तलको तालिकाले एउटा विद्यालयका विद्यार्थीहरूको तौल (kg) मा जनाउछ ।

तौल (Kg)
45,33,23,24,18, 20, 13, 24, 35, 34, 56, 56,35, 39,44, 42, 33, 22, 26, 47, 46, 48, 55,51,34,31,28,29,35,39,44,40,47, 49,28, 48,,19,27, 57, 42,51,50,47,23, 33, ,37,29, 27, 22, 28, 36, 35,57, 54, 40, 50, 30, 29, 23, 38,36, 45, 45

- (क) माथिको तथ्याङ्कबाट 5 वर्गान्तरमा बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।
 (ख) भन्दा सानो र भन्दा ठुलो बारम्बारता तालिका तयार पार्नुहोस् ।
 (ग) बहुलक र मध्यिकाको फरक पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. हरिपाउमा रहेका 40 घरधुरीले निम्नानुसारको विधुत खपत गरेछन् ।

वर्गान्तर	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
बारम्बारता	4	5	10	8	7	6

- (क) माथिको तालिकाबाट मध्यक खपत पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (ख) तालिकाको आधारमा सञ्चीत बारम्बारता तालिकाहरू तयार पार्नुहोस् ।
 (ग) मध्यिका पर्ने वर्गान्तर पत्ता लगाउनुहोस् ।
 (घ) बहुलक पर्ने वर्गान्तर र दोस्रो चतुर्थांश पर्ने वर्गान्तर कुन कुन हुन् ?
 (ङ) मध्यक, मध्यिका र बहुलको एक आपसमा कति कति फरक छन् ?

सम्भाव्यता (Probability)

14.1 आधारभूत अवधारणा (Fundamental Concepts)

हामी कुनैपनि घटना घट्ने वा नघट्ने अनुमान गर्ने गर्दछौं । जस्तै :

क) आकाशमा बादल छ । आज पानी पर्ला जस्तो छ ।

ख) परीक्षामा पास भइन्छ होला ।

ग) यसपटक फलानो उम्मेदवारले जित्छ होला, आदि ।

माथिका कथनहरू अनिश्चित सम्भावनाहरू हुन् । यही अनिश्चितताको मापन गर्नुलाई नै सम्भाव्यता (Probability) भनिन्छ । जस्तै,; माथिका कथनहरूमा आज आकाशमा बादल देखिन्छ, पानी पर्ने सम्भावना छ, छाता बोक्नु पर्ला । पानी पर्ने सम्भावनाको कुरा अनुमान मात्र हो, पानी पर्ने निश्चितता छैन । त्यसैले आकाशमा देखिने बादल पानी पर्ने सम्भाव्यताको सङ्केत हो ।

सम्भाव्यतामा प्रयोग हुने केही परिभाषित शब्दहरू

(क) परीक्षण (Experiment)

कुनै पनि निश्चितताको साथ भविष्यवाणी गर्न नसकिने परिणामहरू आउने क्रियाकलापलाई नै परीक्षण भनिन्छ । जस्तै एउटा सिक्कालाई उफार्दा माथिपट्टी अग्रभाग (H) वा पश्चभाग (T) के आउँछ ?

निश्चित हुँदैन तसर्थ, सिक्का उफार्ने कार्य परीक्षण हो ।



(ख) यादृच्छिक परीक्षण (Random Experiment)

कुनै पनि परीक्षणको नतिजाहरूलाई पहिले नै के आउछ भन्न नसकिने परीक्षणलाई यादृच्छिक परीक्षण भनिन्छ । जस्तै: एउटा लुडो गोटि (dice) लाई उफार्दा, 1 देखि 6 सम्म कुन भाग माथि देखिन्छ भन्ने कुरा भन्न सकिने अवस्था हुँदैन अथवा किटानीका साथ भन्न सकिँदैन । त्यसैले गोटी उफार्ने काम यादृच्छिक परीक्षण हो । त्यस्तै सिक्का उफार्नु, तासको डेकबाट एउटा पत्ती थुत्नु जस्ता क्रियाहरू पनि यादृच्छिक परीक्षण हुन् ।

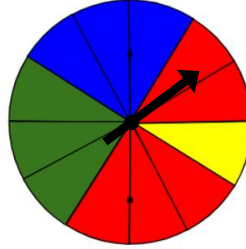
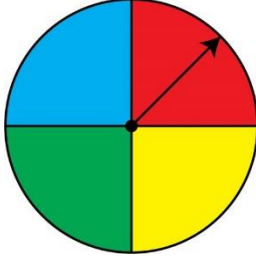


(ग) सम्भाव्य परिणाम (Possible Outcomes)

कुनै पनि परीक्षणमा प्राप्त हुन सक्ने सम्पूर्ण नतिजालाई नै परिणाम भनिन्छ । जस्तै: एउटा सिक्का उफार्दा अग्र भाग (H) वा पश्चभाग (T) मध्ये कुन देखिन्छ, त्यसलाई सिक्का उफार्दाको परिणाम हो ।

(घ) समान सम्भाव्यताका परिणाम (Equally likely outcomes)

तलका प्रत्येक स्पीनरहरूलाई घुमाउदा सियो अडिने रङ्हरू समान छन् त ? अवलोकन गरौं ।



जस्तै: पहिलो चित्रमा स्पीनरलाई घुमाउँदा त्यसको सियो चार रङ् मध्ये कुनैपनि रङमा अडिने सम्भावना बराबर हुन्छ । तसर्थ रातो, हरियो, पहेँलो तथा निलो सबैमा सुई रोकिने समान सम्भाव्यताका परिणाम हुन् ।

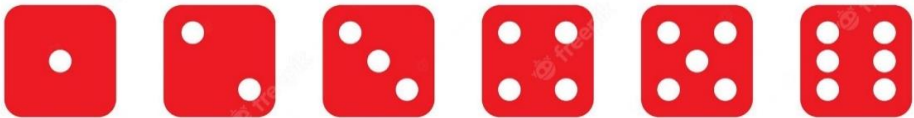
फेरी, दोस्रो चित्रमा स्पीनरलाई घुमाउदा त्यसको सियो चार रङ् मध्ये कुनैपनि रङमा अडिने सम्भावना बराबर हुँदैन किनकी सबै रङ्ले ओगटेको भागहरूको क्षेत्रफल बराबर छैन । तसर्थ रातो, हरियो, पहेँलो तथा निलो सबैमा सुई रोकिने समान सम्भाव्यताका परिणाम भएनन् ।

कुनै परीक्षणमा हुन सक्ने घटनाहरूको सम्भाव्यता समान छ भने त्यस्तो परिणामलाई समान सम्भाव्यताका परिणाम भनिन्छ ।

(ङ) नमुना क्षेत्र (Sample Space)

कुनै परीक्षणमा प्राप्त हुन सक्ने सबै परिणामहरूको समूहलाई नै नमुना क्षेत्र भनिन्छ । यसलाई सामान्यतया S ले जनाइन्छ । जस्तै:

सिक्कालाई उफार्दा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र $S = \{H, T\}$ भयो र $n(S) = 2$ हुन्छ ।



डाइसलाई गुडाउँदा प्राप्त हुने नमुना क्षेत्र $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ लेखिन्छ र $n(S) = 6$ हुन्छ ।

(च) घटना (Event)

कुनै परीक्षणबाट प्राप्त हुने केही परिणामहरूको समूहलाई घटना भनिन्छ । घटना भनेको नमुना क्षेत्रको उपसमूह पनि हो । यसलाई साधारणतया E ले जनाइन्छ ।

जस्तै: एउटा डाइस उफार्दा प्राप्त नतिजा $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ छन् भने जोरसङ्ख्या पर्ने, बिजोर सङ्ख्या पर्ने रूढ सङ्ख्या पर्ने आदि यसका घटनाहरू हुन् । $\{ \}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 6\}$ सबै घटनाहरू हुन् ।

(छ) पारस्परिक निषेधक घटना (Mutually Exclusive Event)

कुनै परीक्षणमा एउटा घटना आउदा अर्को घटना आउने सक्दैन भने ती घटनाहरूलाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भनिन्छ ।

जस्तै, एक पटक सिक्का उफार्दा कि H आउछ कि T आउछ तर दुवै एकैपटकमा आउदैन तसर्थ H आउने र T आउने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् ।

त्यस्तै गरी कुनै एउटा डाइसलाई गुडाउँदा आउने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् वा होइनन् सोचेर निर्णय गर्नुहोस् ।

सम्भाव्यता पत्ता लगाउने सूत्र

एउटा सिक्कालाई उफार्दा,

नमुना क्षेत्र $(S) = \{H, T\}$ तसर्थ सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 2$

H आउने घटना $(E) = \{H\}$ तसर्थ अनुकूल परिणाम सङ्ख्या $n(E) = 1$

$$\frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2} = 0.5$$

कुनै घटना (E) को सम्भाव्यता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\text{अनुकूल परिणाम संख्या}}{\text{सम्भाव्य कुल परिणाम संख्या}}$

उदाहरण 1

कुनै डाइसलाई एकपटक गुडाउँदा बिजोर सङ्ख्या देखिने सम्भावना कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, डाइसलाई गुडाउँदा बन्ने नमुना क्षेत्र $(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

सम्भाव्य कुल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 6$

अनुकूल घटना $(E) = \text{बिजोर सङ्ख्या आउने} = \{1, 3, 5\}$

अनुकूल घटना सङ्ख्या $n(E) = 3$

जोर सङ्ख्या आउने सम्भाव्यता $P(E) = ?$

$$\text{हामीलाई थाहा छ, } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

तासको बारेमा सामान्य जानकारी

	महार आकृतिहरू												
चिडी	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
इटा	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
पान	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
हुकुम	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K

तासको गड्डीमा जम्मा 52 ओटा तास हुन्छन् । तिनीहरूका 2 ओटा रङ हुन्छन् । रातो 26 ओटा र कालो 26 ओटा पान(♥) र इटा (♦)रातो रङका हुन्छन् भने हुकुम (♠)र चिडी (♣) कालो रङका हुन्छन् ।

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- तलका परीक्षणहरूबाट नमूना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
 - एउटा डाइस एकपटक गुडाउँदा
 - एउटा सिक्का दुई पटक उफार्दा
 - एक हप्ताबाट एउटा बार छनौट गर्दा
- तलका अवस्थाहरूका घटनाहरू लेख्नुहोस् ।
 - एउटा डाइस एकपटक गुडाउँदा विजोर सङ्ख्या आउने
 - एउटा सिक्का दुई पटक उफार्दा दुईओटै पश्चभाग (T) आउने ।
- दुई सिक्कालाई एकपटक उफार्दा एउटा अग्रभाग (H) र अर्को पश्चभाग (T) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

एक एक ओटा प्याकेट तास लिऔं । त्यसमा भएका राता, काला, पान (Heart), ड्रँटा (Diamond), हुकुम (Spade), चिडी (Clube), चित्र भएका तास (Face Cards), गुलाम (Jack), मिस्सी (Queen), बादशाह (King), एक्का (Ace) सबैको सङ्ख्याहरू तलको तालिकामा भरौं ।

♣	♦	♥	♠

A	J	Q	K

(ग) तालिकाका आधारमा एउटा तास निकाल्दा निम्नानुसारका घटनाको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

i) पान पर्ने

ii) 6 पर्ने

iii) कालो तास पर्ने

iv) रातो मिस्सी पर्ने

v) बादशाह र मिस्सी पर्ने

vi) एक्का नपर्ने

सम्भाव्यता स्केल (Probability Scale)

क्रियाकलाप 1

दिइएको स्पीनरलाई घुमाउनुहोस् ।

सुई अडिने रङका घटनाहरूलाई क्रमशः A, B, C, D लेखी

A = {सेतो} , B = {पहेँलो}, C = {निलो},

D = { हरियो} E= { रातो}

प्रत्येक घटनाका सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

P(A) =,

P(B) =,

P(C) =,

P(D) =,

P(E) =,

सम्भाव्यता अलग अलग निकाले पछि सबैको सम्भाव्यता जोडौं ।

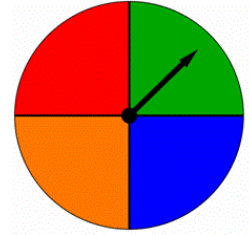
P(A) =

P(A) + P(B) =

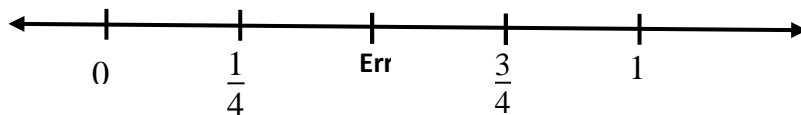
P(A) + P(B) + P(C) =

P(A) + P(B) + P(C) + P(D) =

P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) =



माथिको सम्भाव्यतालाई सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्दा



माथिको सङ्ख्या रेखाबाट हामी के निश्कर्ष निकाल्न सकिन्छ भने,
स्पीनरमा सेतो रङमा अडीने $P(A) = 0$

स्पीनरमा सुई पहेँलो रङमा अडीने सम्भाव्यता $P(B) = \frac{1}{4}$

स्पीनरमा सुई पहेँलो र निलो रङमा अडीने सम्भाव्यता $P(\{\text{पहेँलो, निलो}\}) = \frac{2}{4}$

स्पीनरमा सुई पहेँलो, निलो, हरियो रङमा अडीने सम्भाव्यता $P(\{\text{पहेँलो, निलो, हरियो}\}) = \frac{3}{4}$

स्पीनरमा सुई पहेँलो, निलो, हरियो, रातो रङमा अडीने सम्भाव्यता

$$P(\{\text{पहेँलो, निलो, हरियो, रातो}\}) = \frac{4}{4} = 1$$

यसरी सम्भाव्यताको सबभन्दा सानो मान 0 हो भने सबभन्दा ठुलो मान 1 हो । जसलाई सम्भाव्यताको स्केल (probability of scale) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

निलो, पहेँलो र रातो बराबर आकारमा तीनओटा बलहरू भएको बट्टाबाट एउटा बल निकाल्दा निलो बल आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ र निलो बल नआउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

समाधान

यहाँ, बट्टामा भएका जम्मा बलको सङ्ख्या 3

∴ जम्मा सम्भाव्यता परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 3$

निलो बलको सङ्ख्या 1 छ । तसर्थ अनुकूल परिणाम सङ्ख्या $n(E) = 1$

∴ निलोबल आउने सम्भाव्यता $p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{3}$

निलो बल नआउने सम्भाव्यता, $p(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 2

एक प्याकेट राम्ररी फिटेको 52 पत्ती तासको समूहबाट एउटा तासको पत्ती तान्दा मिस्सी पर्ने सम्भाव्यता कति होला ? निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ, सम्भाव्य कूल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 52$

अनुकूल परिणाम सङ्ख्या वा मिस्सी सङ्ख्या $n(Q) = 4$

मिस्सी पर्ने सम्भाव्यता $p(Q) = \frac{n(Q)}{n(S)}$

$$\therefore p(Q) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

उदाहरण 3

एउटा भोलामा सबै एउटै साइजका 5 ओटा रातो, 3 ओटा कालो र 4 ओटा हरियो गुच्चाहरू छन् । अब, सो भोलाबाट नहेरिकन एउटा गुच्चा निकाल्दा,

- रातो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
- हरियो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ।

समाधान

यहाँ, जम्मा गुच्चाको सङ्ख्या $n(S) = 5 + 3 + 4 = 12$

अर्थात् सम्भाव्य कूल परिणाम सङ्ख्या $n(S) = 12$

- रातो गुच्चाको सङ्ख्या $n(R) = 5$

अर्थात् अनुकूल सम्भाव्य परिणाम सङ्ख्या $n(R) = 5$

$$\therefore \text{रातो गुच्चा आउने सम्भाव्यता } p(R) = \frac{n(R)}{n(S)}$$

$$P(R) = \frac{5}{12}$$

- हरियो गुच्चाको सङ्ख्या $n(G) = 4$

अर्थात् अनुकूल परिणाम सङ्ख्या $n(G) = 4$

$$\therefore \text{हरियो गुच्चा आउने सम्भाव्यता } p(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{4}{12}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

1. एउटा सिक्कालाई उफार्दा आउने सम्भाव्यताहरूलाई स्केलमा देखाउनुहोस् ।
2. एउटा भोलामा सबै एउटै साइजका 3 ओटा निलो गुच्चा, 4 ओटा कालो र 7 ओटा रातो गुच्चाहरू छन् । यदि नहेरिकन सो भोलाबाट एउटा गुच्चा निकाल्ने हो भने
क) कालो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
ख) कालो गुच्चा नपर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
ग) अन्य सम्भाव्यताहरूलाई सम्भाव्यता (0–1) स्केलमा देखाउनुहोस् ।
3. राम्ररी फिटेको 52 पत्ती तासको समूहबाट एउटा पत्ती तान्दा
क) कालो तास आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? $\frac{1}{2}$
ख) रातो अथवा कालो आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? 1
4. एक हप्तामा पर्ने बारहरूबाट एउटा बार छनोट गर्दा (क) T बाट आउने बार पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? (ख) T बाट नआउने बार आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

14.3 सम्भाव्यताका सिद्धान्तहरू (Principles of Probabilities)

तलको उदाहरणको अवलोकन गर्नुहोस् ।

एउटा डाइसलाई एकपटक उफार्दा मानौ A ले माथि जोर सङ्ख्या देखिने, B ले माथि रूठ सङ्ख्या देखिने र C ले माथि बिजोर सङ्ख्या देखिने घटनाहरू जनाउँछ ।

यसलाई निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ ।

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \text{माथि जोर सङ्ख्या देखिने} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{माथि रूठ सङ्ख्या देखिने} = \{2, 3, 5\}$$

$$C = \text{माथि बिजोर सङ्ख्या देखिने} = \{1, 3, 5\}$$

माथिको उदाहरणमा हेर्दा घटना A आउदा B पनि आउन सक्छ किनकी दुवैमा 2 साभ्ना छ । तसर्थ A र B पारस्परिक निषेधक घटनाहरू होइनन् ।

फेरी, घटना A आउँदा C आउदैन किनकी दुवैमा साभ्ना छैनन् । तसर्थ A र C पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् ।

त्यस्तै B र C कस्ता घटनाहरू होलान् ? लेख्नुहोस् ।

कुनै पनि परीक्षणमा एउटा घटनाले अर्को घटनाको सम्भाव्यतालाई निषेध गर्दछ भने ती घटनाहरूलाई पारस्परिक निषेधक घटनाहरू (Mutually Exclusive events) भनिन्छ । उदाहरणका लागि एउटा डाइसलाई गुडाउँदा माथिपट्टी जोर सङ्ख्या आउने वा बिजोर

सङ्ख्या आउने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन् । त्यसैगरी एउटा घटना आउँदा अर्को घटना पनि आउन सक्ने घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू होइनन् । माथिको उदाहरणमा B र C पारस्परिक निषेधक घटनाहरू होइनन् ।

सम्भाव्यताको जोडको सिद्धान्त (Addition Law of Probability)

सँगैको भेन चित्रमा हेरौं ।

समूहहरू A र B का सदस्यहरू सूचीकरण गरौं ।

$$A = \{1, 3, 5\};$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$n(A) = 3 ; n(B) = 3$$

समूह A र B को संयोजन पत्ता लगाऔं ।

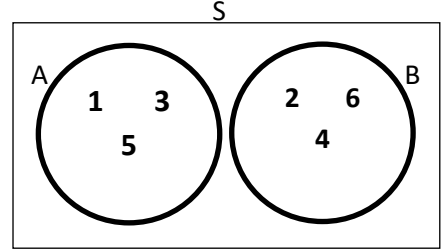
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ भयो । } n(A \cup B) = 6$$

यहाँ, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ भयो ।

फेरी, दुवैतिर $n(S)$ ले भाग गर्दा,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

Or, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



कुनै पनि दुई घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू भएमा तिनीहरूको संयोजनको संभाव्यता अलग अलग सम्भाव्यताको योगफलसँग बराबर हुन्छ । यसलाई सम्भाव्यताको जोडको सिद्धान्त (Addition principle of Probability) भनिन्छ ।

फेरी, सँगैको भेन चित्रमा यदि A र B मा साझा घटना 2 छ ।

$$(A \cap B) = \{2\} \text{ तसर्थ, } n(A \cap B) = 1$$

अर्थात्, तिनीहरू पारस्परिक निषेधित घटनाहरू होइनन् ।

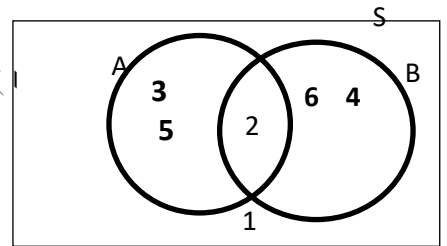
फेरी समूहहरू A र B खण्टिएका उपसमूहहरू हुन् ।

$$\text{तसर्थ, } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

फेरी, दुवैतिर $n(S)$ ले भाग गर्दा,

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Or, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



अतः यदि A र B पारस्परिक निषेधक घटनाहरू नभएमा, सम्भाव्यताको जोडको सिद्धान्त अनुसार

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 1

एक हप्ताको नाम मध्ये एउटा नाम लिंदा S बाट सुरु हुने अथवा T बाट सुरु हुने नाम आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $S = \{\text{Sunday, Monday, Tuesday, Wednesday, Thursday, Friday, Saturday}\}$

$$n(S) = 7$$

मानौं, $A = \{S \text{ बाट सुरु हुने बारहरू}\} = \{\text{Sunday, Saturday}\}; n(A) = 2$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

$B = \{T \text{ बाट सुरु हुने बारहरू}\} = \{\text{Tuesday, Thursday}\}; n(B) = 2$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{7}$$

M बाट सुरु हुने अथवा T बाट सुरु हुने नाम आउने सम्भाव्यता $= p(A \cup B) = ?$

यहाँ, A र B पारस्परिक निषेधित घटनाहरू हुन् ।

$$\text{तसर्थ, } p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

उदाहरण 2

एउटा भोलामा 3 ओटा रातो, 5 ओटा पहेँलो र 6 ओटा सेतो उस्तै र उत्रै बलहरू छन् । एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा रातो अथवा सेतो बल आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ जम्मा बलहरूको सङ्ख्या, $n(S) = (3 + 5 + 6)$ ओटा बलहरू $= 14$ ओटा बलहरू

कालो बलको सङ्ख्या, $n(R) = 3$ ओटा बलहरू

पहेँलो बलको सङ्ख्या $n(Y) = 5$ ओटा बलहरू

रातो बलको सङ्ख्या $n(W) = 6$ ओटा बलहरू

रातो अथवा सेतो बल आउने $= P(R \cup W) = ?$

$$\therefore \text{कालो बल आउने सम्भाव्यता } P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{3}{14}$$

$$\text{सेतो बल आउने सम्भाव्यता } P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{6}{14}$$

यी घटनाहरू पारस्परिक निषेधक भएकाले सम्भाव्यताको जोड सिद्धान्तअनुसार,

$$P(R \cup W) = P(R) + P(W) = \frac{3}{14} + \frac{6}{14} = \frac{9}{14}$$

उदाहरण 3

1 देखि 20 सम्म लेखिएका जम्मा 20 ओटा बराबर अड्क पत्तीहरूबाट नहेरिकन एउटा पत्ती थुत्दा 5 ले भाग जाने अथवा 3 ले भाग जाने अड्कपत्ती आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

$$n(S) = 20$$

मनौं, $A = 1$ देखी 20 सम्मका 5 ले भाग जाने सङ्ख्याहरू = {5, 10, 15, 20}

$$n(A) = 4 ; p(A) = \frac{4}{20}$$

$B = 1$ देखी 20 सम्मका 3 ले भाग जाने सङ्ख्याहरू = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

$$n(B) = 6 ; p(B) = \frac{6}{20}$$

$$A \cap B = \{15\}; n(A \cap B) = 1 ; p(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$p(A \cup B) = ?$$

यहाँ, A र B पारस्परिक निषेधक घटना नभएकोले

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20}$$

$$= \frac{4+6-1}{20} = \frac{9}{20}$$

उदाहरण 4

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर कुनै एउटा तासको पत्ती थुत्दा एक्का, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, जम्मा तासको सङ्ख्या, $n(S) = 52$

एक्काको सङ्ख्या, $n(A) = 4$; $p(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

मिस्सीको सङ्ख्या, $n(Q) = 4$; $p(Q) = \frac{n(Q)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

गुलामको सङ्ख्या, $n(J) = 4$; $p(J) = \frac{n(J)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

एक्का, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता = $p(A \cup Q \cup J) = ?$

यहाँ, A, Q र J तिनै ओटा घटनाहरू पारस्परिक निषेधक घटनाहरू हुन्, तसर्थ तिनीहरूको संभाव्यता

$$\begin{aligned} \text{बादशाह, मिस्सी अथवा गुलाम पर्ने सम्भाव्यता} &= p(A \cup Q \cup J) = p(A) + p(Q) + p(J) \\ &= \frac{1}{13} + \frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- तल दिइएका घटनाहरू पारस्परिक निषेधक हुन् वा हैनन् पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - एउटा सिक्का उफार्दा अग्रभाग (H) आउने वा पछिल्लो भाग (T) आउने
 - एउटा डाइस उफार्दा रूढ सङ्ख्या आउने वा जोर सङ्ख्या आउने ।
 - राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा मुहार आकृति भएको आउने वा पान आउने
 - राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा 2 आउने वा K आउने
 - 5 ओटा सेतो, 8 ओटा हरियो र 7 ओटा निलो बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा हरियो अथवा निलो बल आउने
- तल दिइएका घटनाहरूका सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - दुईओटा सिक्का उफार्दा कम्तिमा एउटा अग्रभाग आउने ।
 - एउटा डाइस उफार्दा रूढ सङ्ख्या नआउने
 - राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा मुहार आकृति नभएको आउने
 - 5 ओटा खैरो, 7 ओटा पहेँलो र 8 ओटा निलो बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा पहेँलो बल आउने
- तलका घटनाहरूको संभाव्यता कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - 7 ओटा रातो, 8 ओटा पहेँलो र 5 ओटा निलो उहि आकारको बल भएको भोलाबाट एउटा बल नहेरीकन निकाल्दा रातो अथवा निलो बल आउने

- (ख) दुईओटा सिक्कालाई सँगै उफार्दा दुईओटै अग्रभाग आउने अथवा दुईओटै पश्चभाग आउने
- (ग) एउटा डाइस उफार्दा विजोर सङ्ख्या आउने अथवा 4 आउने
- (घ) राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा 8 आउने वा मिस्सी आउने
- (ङ) राम्ररी फिटिएको तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा मुहार आकृति भएको आउने वा हुकुम आउने
4. तलका घटनाहरूको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (क) ERASTOTHENESIS मा भएका अक्षरहरूमा एउटा तान्दा E अथवा S आउने
- (ख) MISSUNDERSTANDING मा भएका अक्षरहरूमा एउटा तान्दा S अथवा T आउने
- (ग) SUCCESSFULNESS मा भएका अक्षरहरूमा एउटा तान्दा C अथवा S आउने

14.4 अनाश्रित र पाराश्रित घटना (Dependent and Independent Events)

क्रियाकलाप 1

- (क) एउटा तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा बादशाह आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ । फेरी त्यो तासलाई गड्डीमा नै मिसाएर अर्को तास थुत्दा पुनः बादशाह नै आउने सम्भाव्यता कति होला?

पहिलो तास बादशाह आउने सम्भाव्यता $\frac{4}{52}$ हुन्छ ।

फेरी सोहि गड्डीमा मिसाउँदा दोस्रो तास बादशाह आउने सम्भाव्यता $\frac{4}{52}$ नै भयो।

पहिलो घटनाले दोस्रोलाई असर गरेन ती दुई घटनाहरू अनाश्रित घटनाहरू भए ।

- (ख) एउटा सिक्कालाई र डाइसलाई सँगै उफार्दा सिक्कामा अग्रभाग आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ र डाइसमा जोर सङ्ख्या देखिने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

यसमा सिक्काको सम्भाव्यताले डाइसको सम्भाव्यतालाई कुनै असर गरेन तसर्थ यी अनाश्रित घटनाहरू भए ।

- (ग) एउटा तासको गड्डीबाट एउटा तास थुत्दा बादशाह आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? पहिलो तास बादशाह आउने सम्भाव्यता $\frac{4}{52}$ हुन्छ ।

त्यो तासलाई गड्डीमा नमिसाएर अर्को तास थुत्दा पुनः बादशाह नै आउने सम्भाव्यता कति होला ?

फेरी सोहि गड्डीमा नमिसाउदा जम्मा तासको सङ्ख्या 51 भयो भने बादशाहको सङ्ख्या 3 भयो ।

दोस्रो तास बादशाह आउने सम्भाव्यता $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$ भयो।

पहिलो घटनाले दोस्रो घटनाको सम्भाव्यतालाई असर गर्यो । ती दुई घटनाहरू पराश्रित घटनाहरू भए ।

दुई वा दुईभन्दा बढी घटनाहरूमा एउटाको प्राप्तिले अर्को घटनालाई असर गर्दैन भने त्यस्ता घटनाहरूलाई अनाश्रित घटनाहरू (Independent Event) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकै समय उफार्दा सिक्काको अग्रभाग (H) र डाइसमा 5 आउने घटनाहरू कस्ता घटनाहरू हुन्?

समाधान

यहाँ, एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा सिक्कामा H अथवा T मध्ये कुनै पनि आउन सक्छ भने डाइसमा 1 देखि 6 अङ्कसम्म कुनै पनि आउन सक्छ । सिक्कामा आउने घटनाले डाइसमा आउने घटनालाई कुनै असर गर्दैनन् ती घटनाहरू अनाश्रित हुन् ।

कुनै परीक्षणमा दुई वा दुईभन्दा बढी घटनाहरूमा एउटाको प्राप्तिले अर्को घटनाको सम्भाव्यतामा प्रभाव पार्ने घटनाहरूलाई पराश्रित घटना (Dependent Events) भनिन्छ ।

उदाहरण 2

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः नराखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास निकाल्दा दुवै तास बादशाह (K) नै पर्ने घटनाहरू कस्ता घटनाहरू हुन् ?

समाधान

यहाँ, 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिलो तास निकाल्दा उक्त तासको गड्डीमा जम्म 4 ओटा K हुन्छन् ।

K आउने सम्भाव्यता $\frac{4}{52}$ हुन्छ । फेरी उक्त K लाई बाहिर नै राख्दा जम्मा 51 ओटा मात्र बाँकि रहे र भने अब 3 ओटा मात्र K रहे ।

दोस्रो K आउने सम्भावना $\frac{3}{51}$ भयो । यहाँ, दोस्रो घटनाको सम्भाव्यता, पहिलो घटनाको सम्भाव्यतामा भर पर्ने देखियो ।

तसर्थ, यी दुई पराश्रित घटनाहरू भए ।

14.4.1 सम्भाव्यताको गुणन सिद्धान्त (Multiplication Principle of Probability)

एउटा सिक्का र एउटा घनाकार डाइसलाई एकै साथ उफार्दा

सिक्काको नमुना क्षेत्र $(S_1) = \{H, T\}$; $n(S_1) = 2$

डाइसको नमुना क्षेत्र $(S_2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(S_2) = 6$

दुवैको सम्भावित नमुना क्षेत्र $S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$ $n(S) = 12$

अब, सिक्कामा T आउनेलाई डाइसमा जोर सङ्ख्या पर्ने सम्भाव्यता कतिहोला ?

अब, सिक्कामा T आउने घटनालाई A र डाइसमा जोर सङ्ख्या पर्ने घटनालाई B मानौं ।

T आउने र डाइसमा जोर सङ्ख्या पर्ने $= (A \cap B) = \{(T,2), (T,4), (T,6)\}$;
 $n(A \cap B) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{1}{2} \text{ र } P(B) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{फेरी, } P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

अतः यदि दुईओटा घटनाहरू A र B पारस्परिक अनाश्रित छन् भने,

$$P(A \text{ र } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण 3

एउटा सिक्का र तीन रङ रातो, निलो र पहेँलो भएको स्पीनरलाई सँगै घुमाउँदा, सिक्कामा T र स्पीनरको सुई हरियो रङमा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

सिक्काको नमूना क्षेत्र $S_1 = \{H, T\}$; $n(S_1) = 2$

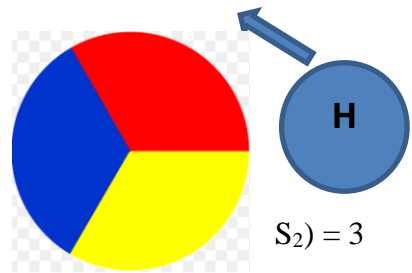
सिक्काको H आउने सम्भाव्यता $P(H) = \frac{1}{2}$

स्पीनरको नमूना क्षेत्र $S_2 = \{\text{रातो, निलो र पहेँलो}\}$, $n(S_2) = 3$

स्पीनरको सुई पहेँलोमा अडिने सम्भाव्यता $P(Y) = \frac{1}{3}$

सिक्काको T आउने र स्पीनरको सुई हरियोमा अडिने सम्भाव्यता $P(H \cap Y) = ?$

सिक्काको T आउने र स्पीनरको सुई हरियोमा अडिने घटनाहरू पारस्परिक अनाश्रित घटनाहरू हुन् ।



तसर्थ , $P(H \cap Y) = P(H) \cdot P(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

अर्को तरिका

सिक्का र स्पीनरको सम्भावी नमुना क्षेत्र

$S = \{(H, \text{पहेँलो}), (H, \text{निलो}), (H, \text{रातो}), (T, \text{पहेँलो}), (T, \text{निलो}), (T, \text{रातो})\}$, $n(S) = 6$

सिक्काको H आउन र स्पीनरको सुई पहेँलोमा अडिने $(A) = \{(H, \text{पहेँलो})\}$ $n(A) = 1$

सिक्काको H आउन र स्पीनरको सुई पहेँलोमा अडिने सम्भाव्यता $P(A) = n(A) / n(S) = 1/6$

उदाहरण 4

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः राखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास निकाल्दा पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तार एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिलो तास निकाल्दा उक्त तासको गड्डीमा जम्मा 4 ओटा K हुन्छन् ।

तसर्थ, K आउने सम्भाव्यता $P(K) = 4/52$ हुन्छ।

पहिलो तासलाई पुनः सोही प्याकेटमा राख्दा जम्मा 52 ओटै तास भए । एक्काको सङ्ख्या पनि 4 नै हुन्छ ।

दोस्रो तास A आउने सम्भावना $P(A) = 4/52$ नै भयो ।

पहिलो तास K र दोस्रो तास A आउने संभाव्यता $= P(K \cap A) = ?$

यहाँ, दुवै घटनाहरू अनाश्रित घटनाहरू भए ।

हामीलाई थाहा छ, $P(K \cap A) = P(K) \cdot P(A) = 4/52 \times 4/52 = 1/13 \times 1/13 = 1/169$

उदाहरण 5

एक सेट 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिले निकालेको तास पुनः नराखी एकपछि अर्को गर्दै 2 ओटा तास निकाल्दा पहिलो तास बादशाह (K) र दोस्रो तार एक्का (A) पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 52 पत्ती तासलाई राम्ररी फिटेर पहिलो तास निकाल्दा उक्त तासको गड्डीमा जम्मा 4 ओटा K हुन्छन् ।

तसर्थ, K आउने सम्भाव्यता $P(K) = 4/52$ हुन्छ।

पहिलो तासलाई पुनः सोही प्याकेटमा नराख्दा जम्मा $52-1 = 51$ ओटा तास भए । एक्काको सङ्ख्या 4 नै हुन्छ ।

दोस्रो तास A आउने सम्भावना $P(A) = 4/51$ भयो ।

पहिलो तास K र दोस्रो तास A आउने संभाव्यता $= P(K \cap A) = ?$

यहाँ, दुवै घटनाहरू पारस्परिक आश्रित घटनाहरू भए ।

हामीलाई थाहा छ, $P(K \cap A) = P(K) \cdot P(A) = 4/52 \times 4/51 = 1/13 \times 4/51 = 4/663$

उदाहरण 6

एउटा भोलामा 5 ओटा निलो र 6 ओटा रातो गुच्चाहरू छन् । तीमध्ये दुई ओटा गुच्चा नहेरी निकाल्दा पहिलो गुच्चा रातो र दोस्रो निलो गुच्चा आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

(क) पहिलो गुच्चालाई पुनः राखेर दोस्रो निकाल्दा (ख) पहिलो नराखीकन दोस्रो गुच्चा निकाल्दा ।

समाधान

एउटा भोलामा भएका जम्मा गुच्चा सङ्ख्या $= 5 + 6 = 11$

निलो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता $= P(B) = 5/11$

रातो गुच्चा पर्ने सम्भाव्यता $= P(R) = 6/11$

पहिलो गुच्चा निलो र दोस्रो गुच्चा रातो पर्ने सम्भाव्यता $= P(B \cap R) = ?$

(क) पहिलो गुच्चा पुनः भोलामा राखी एकपछि अर्को क्रमशः निकाल्दा,

पहिलो गुच्चा रातो आउने सम्भाव्यता, $= P(R) = 6/11$

दोस्रो गुच्चा निलो आउने सम्भाव्यता, $= P(B) = 5/11$

पहिलो गुच्चा निलो र दोस्रो गुच्चा रातो पर्ने सम्भाव्यता $= P(B \cap R) = P(R) \times P(B) = 6/11 \times 5/11 = 30/121$

(ख) पहिलो गुच्चा पुनः भोलामा नराखी एकपछि अर्को क्रमशः निकाल्दा,

पहिलो गुच्चा रातो आउने सम्भाव्यता, $= P(R) = 6/11$

अब भोलामा जम्मा $11 - 1 = 10$ ओटा गुच्चा रहे ।

दोस्रो गुच्चा निलो आउने सम्भाव्यता, $= P(B) = 5/10 = 1/2$

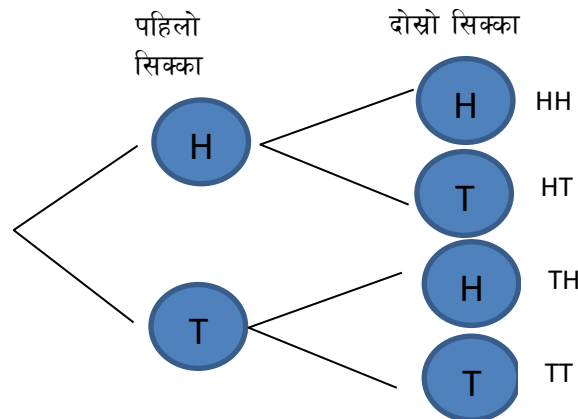
पहिलो गुच्चा निलो र दोस्रो गुच्चा रातो पर्ने सम्भाव्यता $= P(B \cap R) = P(R) \times P(B) = 6/11 \times 1/2 = 3/11$

अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- एउटा सिक्का र एउटा डाइस एकसाथ उफार्दा सिक्कामा पछिल्लो भाग (T) र डाइसमा 3 आउने सम्भाव्यता निकाल्नुहोस् ।
- एउटा बाकसमा 5 ओटा हरिया, 6 ओटा राता र 7 ओटा कालो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । त्यसबाट नहेरिकन एउटा बल निकाली पुनः त्यसमा राखी अर्को बल नहेरी निकाल्दा निम्नअनुसारका बलहरू आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
(i) दुवै एउटै रङका (ii) दुई ओटा भिन्ना भिन्नै रङका (iii) कम्तीमा एउटा बल रातो अथवा कालो रङका
- एउटा बाकसमा 9 ओटा हरिया, 8 ओटा राता र 8 ओटा कालो उस्तै र उत्रै बलहरू राखिएका छन् । त्यसबाट नहेरिकन एउटा बल निकाली पुनः त्यसमा नराखी अर्को बल नहेरी निकाल्दा निम्नअनुसारका बलहरू आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् :
(i) दुवै एउटै रङका (ii) दुई ओटा भिन्ना भिन्नै रङका (iii) कम्तीमा एउटा बल रातो अथवा कालो रङका
- एउटा भोलामा राखिएका 9 ओटा राता र 11 ओटा पहेँला उस्तै उस्तै बलहरूमा दुई ओटा बलहरू पालैपालो निकाल्दा दुवै पटक रातो अथवा पहेँलो बल आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । (पहिले निकालिएको बल पुनः भोलामा नराख्ने ।)
- राम्ररी फिटिएको 52 पत्तीको 1 सेट तासबाट नहेरिकन एउटा तास भिकेर पुनः त्यसमा नराखी नहेरीकनै दोस्रो तास भिक्दा : (i) दुवै पटक एक्का पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ? (ii) एक एक ओटा एक्का वा बादशाह पर्ने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?

14.5 बृक्ष चित्र (Tree diagram)

दुईओटा सिक्का लिनुहोस् । पालैपालो दुईओटालाई एक पछि अर्को गरी उफार्नुहोस् । तिनीहरूमा आउने घटनाहरूको लेख्नुहोस् । जस्तै पहिलो सिक्कामा र दोस्रो सिक्कामा देखिने घटनाहरूलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।



कुनैपनि परीक्षणबाट आउने सक्ने घटनाहरूलाई चित्रको रूपमा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई सम्भाव्यताको वृक्ष चित्र भनिन्छ ।

जस्तै माथिको परिक्षमा नमूना क्षेत्र $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

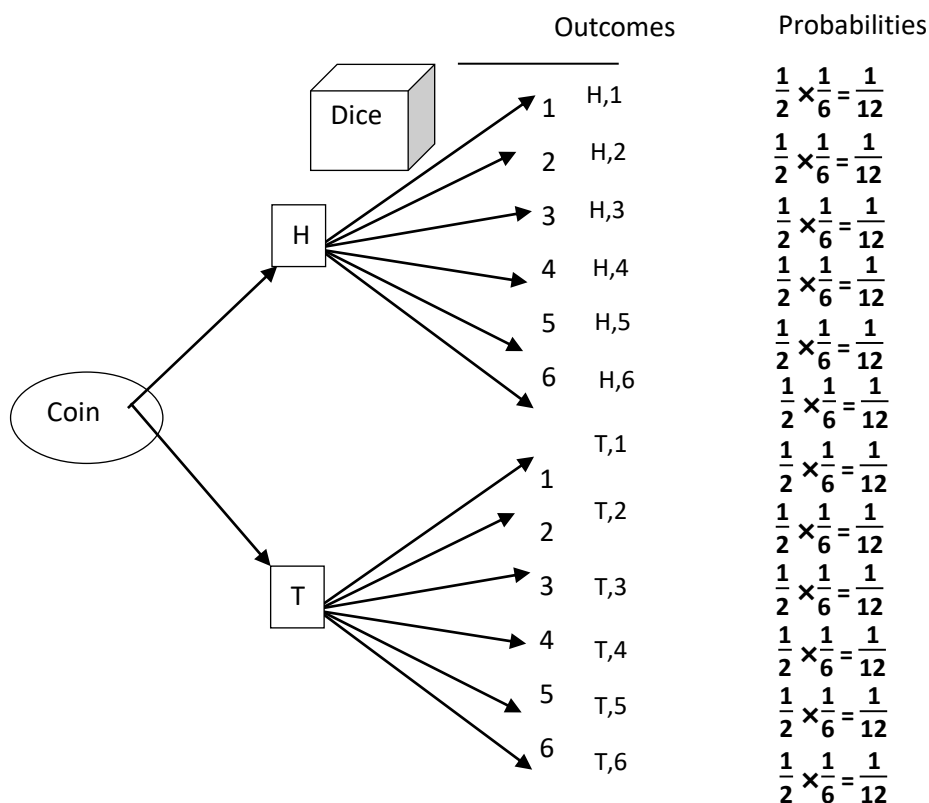
परीक्षणका प्रत्येक घटनाहरूलाई हाँगाहरूले जनाइन्छ,

उदाहरण 1

एउटा सिक्कालाई र एउटा लुडो गोटी एक पछि अर्को गर्दै उफार्दा आउने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस्।

समाधान

एउटा सिक्का र लुडो गोटीलाई एक पछि अर्को गर्दै उफार्दा आउने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र निम्नानुसार रहेको छ।

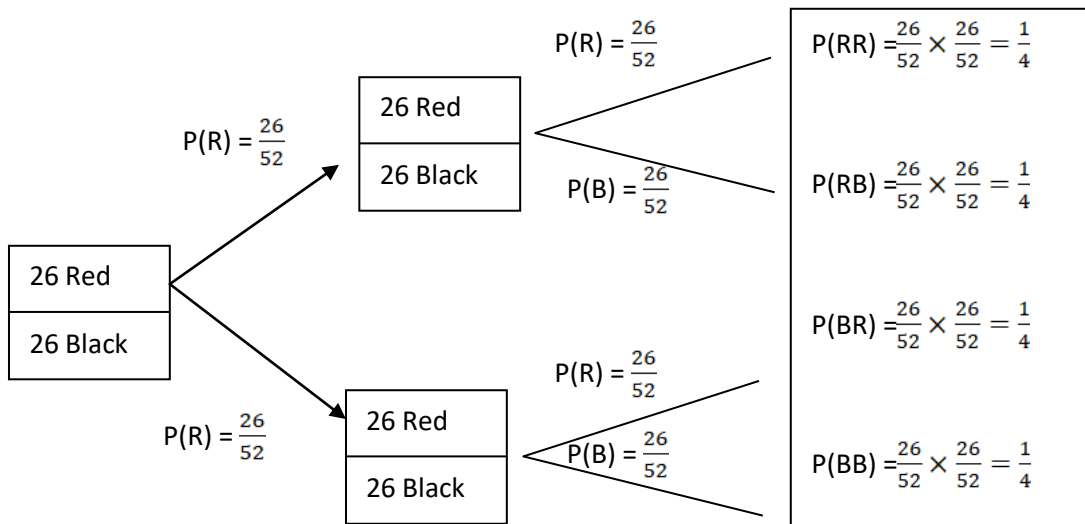


उदाहरण 2

राम्ररी फिटीएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट पहिलो तास निकालेर पुन उक्त गड्डीमा पुनः मिसाइ दोस्रो तास निकाल्दा आउन सक्ने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् ।

समाधान

तासको गड्डीबाट पहिलो तास निकालेर पुन उक्त गड्डीमा पुनः मिसाइ दोस्रो तास निकाल्दा आउन सक्ने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्षचित्रलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।

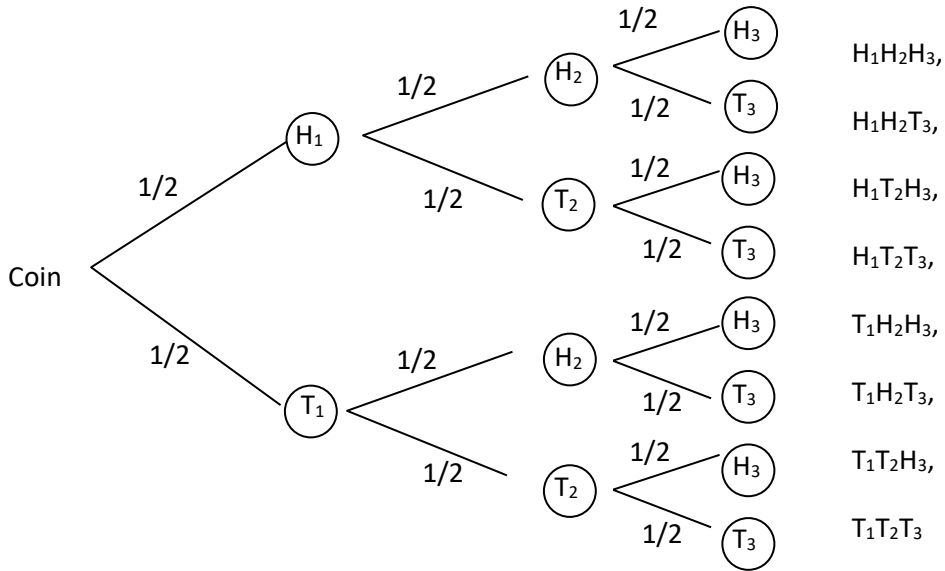


उदाहरण 3

तीनओटा सिक्काहरूलाई एक पछि अर्को गदै क्रमशः उफार्दा आउन सक्ने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् र कम्तिमा 2 ओटा अग्रभाग (H) आउने संभाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

तीनओटा सिक्काहरूलाई एक पछि अर्को गदै क्रमशः उफार्दा आउन सक्ने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई जनाउने वृक्षचित्रलाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।



नमुना क्षेत्र (S) = {H₁H₂H₃, H₁H₂T₃, H₁T₂H₃, H₁T₂T₃, T₁H₂H₃, T₁H₂T₃, T₁T₂H₃, T₁T₂T₃}

P (कमिमा 2 ओटा अग्रभाग आउने) = P(दुईओटा अग्रभाग आउने) + P(तीनओटै अग्रभाग आउने)

$$P(\text{तीनओटै अग्रभाग आउने}) = P(H_1H_2H_3) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(\text{दुईओटा अग्रभाग आउने}) = P(H_1 \cap H_2 \cap T_3) + P(H_1 \cap T_2 \cap H_3) + P(T_1 \cap H_2 \cap H_3)$$

$$= P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(T_1) + P(H_1) \cdot P(T_2) \cdot P(H_1) + P(T_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

अब, P (कमिमा 2 ओटा अग्रभाग आउने) = P (तीनओटै अग्रभाग आउने) + P (दुईओटा अग्रभाग आउने)

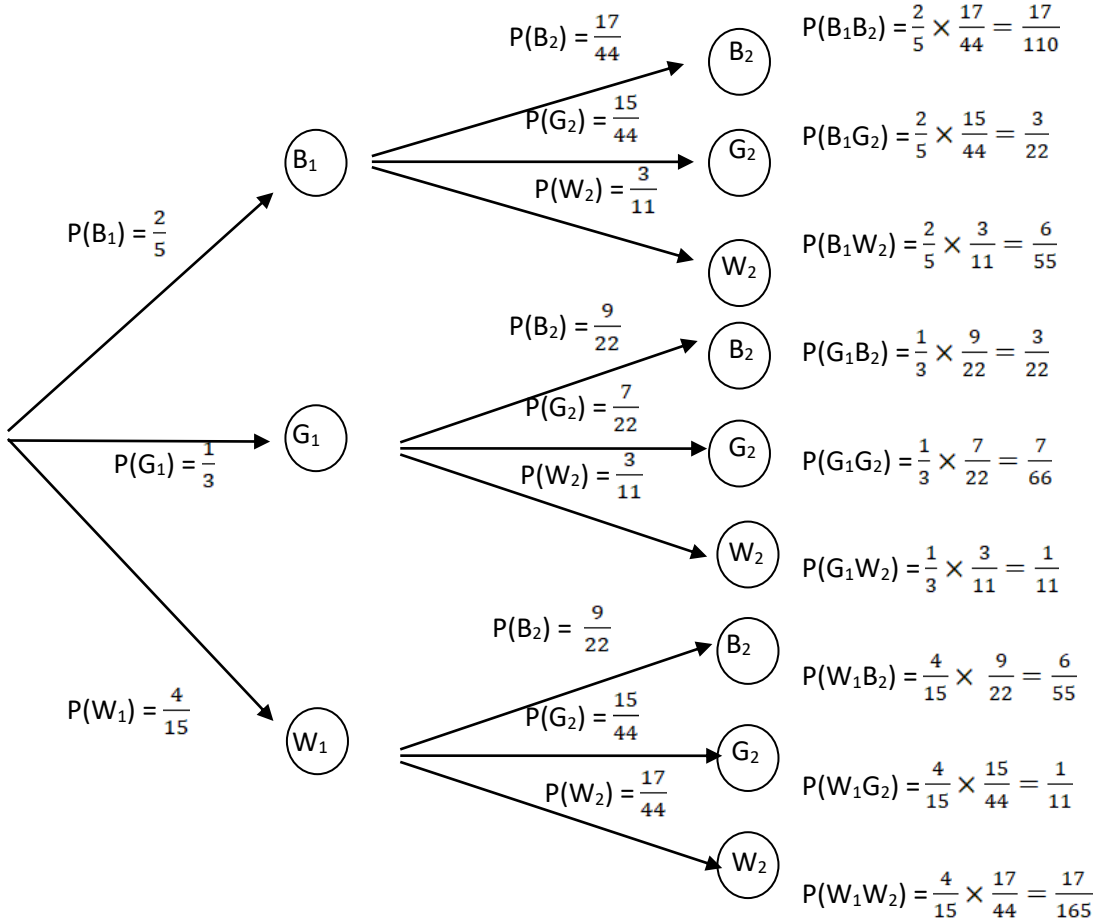
$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 4

एउटा भोलामा 18 ओटा निलो, 15 ओटा हरियो र 12 ओटा सेता बराबर आकारका बलहरू रहेका छन् । दुईओटा बलहरू एक पछि अर्को गर्दै पहिलो नराखिकन दोस्रो नहेरीकन निकालियो भने वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी सबै घटनाहरूको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

भोलामा भएका 18 ओटा निलो, 15 ओटा हरियो र 12 ओटा सेता बराबर आकारका बलहरूबाट 2 ओटा बल एक पछि अर्को नहेरी निकाल्दा आउने घटनाहरू र तिनीहरूको सम्भाव्यतालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ ।



अभ्यासका लागि प्रश्नहरू

- एउटा सिक्कालाई तिनपटक उफार्दा आउने संभावित घटनाहरूलाई वृक्ष चित्रमा देखाइ आउन सक्ने घटनाहरूको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा सिक्का उफारेर र त्यसपछि र चार फरक रङ्ग भएको एउटा स्पीनर घुमाउदा आउन सक्ने सबै घटनाहरूलाई देखाउने वृक्षचित्र तयार पार्नुहोस् । वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी सबै घटनाहरूको सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
- एउटा सिक्कालाई र एउटा डाइसलाई एक पछि अर्को गरी उफारियो । यसरी उफार्दा आउनसक्ने सबै घटनाहरूलाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् । वृक्ष चित्रको प्रयोग गरी तलका सम्भाव्यताहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - सिक्कामा T र डाइसमा बिजोर सङ्ख्या आउने

- i) सिक्कामा H र डाइसमा बर्ग सङ्ख्या आउने
 - ii) सिक्कामा H or T र डाइसमा रूठ सङ्ख्या पर्ने
4. सिक्कालाई उफार्दा अग्रभाग र पश्चभाग आउने र त्यसपछि राम्ररी फिटिएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट एउटा तास तान्दा (हुकुम, चीडी, इटा र पान) मध्ये एउटा आउने संभाव्य घटनाहरू जनाउने वृक्ष चित्र तयार गर्नुहोस् । उक्त वृक्ष चित्र प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
- i) T र कालो तास आउने
 - ii) H र हुकुम आउने
 - iii) T र हुकुम अथवा T र पान आउने सम्भाव्यता
5. रातो 9 ओटा र निलो 8 ओटा गुच्चाहरू भएको भोलाबाट नहेरिकन 2 ओटा बल एक पछि अर्को पालैपालो निकाल्दा i) पुनः राखेर ii) पुनः नराखिकन आउनको घटनाहरूलाई जनाउने वृक्षचित्र तयार पार्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

एक गड्डी राम्ररी फिटिएका तास लिनुहोस् । र त्यसबाट पालै पालो दुईओटा तासहरू थुत्नुहोस् । प्राप्त तासको सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् । फेरी उक्त तास आउने सैद्धान्तिक सम्भाव्यता पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. दुईओटा सिक्काहरूलाई एकैपटक उफार्दा
 - (क) आउने संभावित नमुना क्षेत्र लेख्नुहोस् ।
 - (ख) एउटा मात्र अग्रभाग आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ग) कम्तिमा एउटा पश्चभाग (T) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (घ) कम्तिमा अग्रभाग (H) आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ङ) 2 ओटा H आउने सम्भाव्यता शून्य हुन्छ कि हुँदैन ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
2. राम्ररी फिटिएको 52 पत्ती तासको गड्डीबाट एउटा तास तान्दा
 - (क) रातो तास आउने आउने सम्भाव्यता कति हुन्छ ?
 - (ख) हुकुम वा चिडी पर्ने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ग) पान वा बादशाह आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (घ) एक्का वा मुहार भएको पत्ती आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
 - (ङ) दुईओटा तास एकपछि अर्को पहिलो नराखिकन थुत्दा पहिलो तास रातो र दोस्रो तास कालो आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. एउटा सिक्का उफारेर र चारओटा रङ् (रातो, निलो, पहेँलो, कालो) भएको स्पीनरलाई एकसाथ घुमाइयो ।
- (क) उक्त परीक्षाको छुट्टाछुट्टै र सँगसँगैको सम्भावी नमुना क्षेत्र पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) सिक्काको **T** र स्पीनरको सुई कालो वा निलोमा अडीने संभाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) सिक्कामा **H** र स्पीनरको सुई पहेँलोमा अडिने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. राम्ररी फिटिएको **52** पत्ती तासको गड्डीबाट दुईओटा तास एक पछि अर्को गर्दै तान्दा
- (क) यदि पहिलो तास पुनः नराखी दोस्रो तास तान्दा दुबै तास पान आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ख) यदि पहिलो तास पुनः नराखेर दोस्रो तास तान्दा पहिलो तास ईटा र दोस्रो तास चिडी आउने सम्भाव्यता पत्ता लगाउनुहोस् ।
- (ग) माथि क) र ख) के सम्भाव्यतालाई वृक्ष चित्रमा देखाउनुहोस् ।

त्रिकोणमिति (Trigonometry)

15.0 परिचय (Introduction)

तल दिइएको समकोण त्रिभुज ABC मा $AB = 6\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, $AC = x\text{cm}$ र $\angle ACB = \theta$ छ । त्रिभुज ABC मा $\angle ACB = 90^\circ$ भएकोले यसलाई समकोण त्रिभुज भनिएको हो ।

समकोण त्रिभुज ABC मा $\angle ACB = \theta$ लाई प्रसङ्ग कोण (reference angle) लिँदा भुजा AC लाई कर्ण (hypotenuse), भुजा AB लाई लम्ब (perpendicular) र भुजा BC लाई आधार (base) भनिन्छ । x को मान कति हुन्छ होला र कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ? पाइथागोरस साध्य अनुसार,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

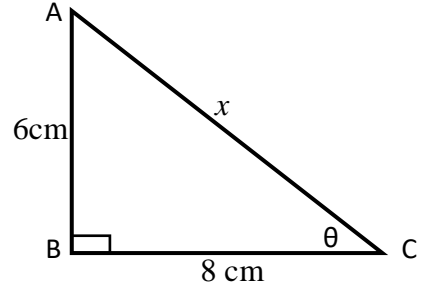
$$\text{अथवा, } x^2 = (6\text{cm})^2 + (8\text{cm})^2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 36\text{cm}^2 + 64\text{cm}^2$$

$$\text{अथवा, } x^2 = 100\text{cm}^2$$

$$\text{अथवा, } x = 10\text{cm}$$

अतः कर्ण (AC) = $x = 10\text{cm}$ हुन्छ ।



त्रिकोणमितीय अनुपातहरू $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ को अनुपात कति कति हुन्छ होला ? कसरी पत्ता लगाउने होला ?

$$\text{(क) } \sin\theta = \frac{P}{h} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\text{(ख) } \cos\theta = \frac{b}{h} = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{(ग) } \tan\theta = \frac{P}{b} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

समकोण त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल पत्ता लगाउने सूत्र के हुन्छ ?

$$\text{समकोण त्रिभुज ABC को क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times P \times b = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24\text{ cm}^2 \text{ हुन्छ ।}$$

त्रिकोणमितीमा $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ एउटा पाइथागोरियन सम्बन्ध हो भने अरु पाइथागोरियन सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

त्रिकोणमितीमा अरु पाइथागोरियन सम्बन्धहरू यस प्रकार छन् ।

$$(क) \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$(ख) \operatorname{Cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

त्रिकोणमितीमा विशिष्ट न्यूनकोणहरू कुन कुन हुन् ?

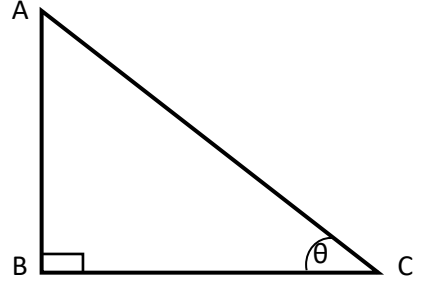
0° , 30° , 45° , 60° , 90° , लाई विशिष्ट न्यून कोणहरू भनिन्छ ।

$\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ यि तिन त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका व्युत्क्रम अनुपातहरू क्रमशः $\operatorname{Cosec}\theta$, $\sec\theta$ र $\cot\theta$ हुन् ।

$$\operatorname{Cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{p}{h}} = \frac{h}{p} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{b}{h}} = \frac{h}{b} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{p}{b}} = \frac{b}{p} = \frac{BC}{AB}$$



नोट : त्रिकोणमितीय अनुपात न्यूनकोण तथा अधिककोण दुवैका लागि मान्य हुन्छ ।

त्रिकोणमितीय अनुपात भिन्न वा दशमलवमा व्यक्त गरिएको हुन्छ । 0° देखि 90° सम्मका विशिष्ट कोणहरूको त्रिकोणमितीय अनुपात तालिका निम्नअनुसार छ ।

कोण \Rightarrow त्रि. अनुपात \Downarrow	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

नोट: कोणको cosec, sec र cot को मान क्रमशः sin, cos र tan को व्युत्क्रम मान (Reciprocal value) हुन्छ । जस्तै: $\sin 45^\circ$ को मान $\frac{1}{\sqrt{2}}$ हुन्छ भने $\operatorname{cosec} 45^\circ$ को मान

$\sqrt{2}$ हुन्छ, त्यस्तै $\cos 30^\circ$ को मान $\frac{\sqrt{3}}{2}$ हुन्छ भने $\sec 30^\circ$ को मान $\frac{2}{\sqrt{3}}$ हुन्छ ।

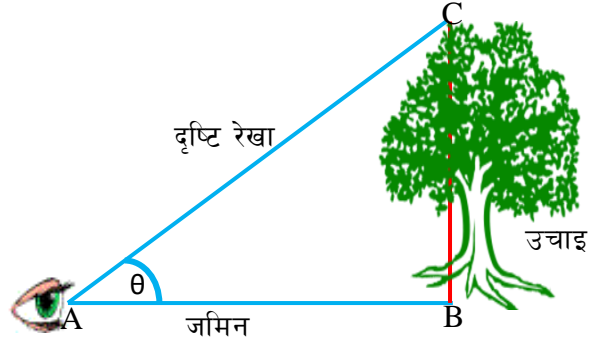
त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको प्रयोगबाट उचाइ तथा दूरीसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गरिन्छ। कतिपय उचाइ तथा दूरीसम्बन्धी समस्याहरू वास्तविक नापबाट मात्र पत्ता लगाउन कठिनाइ पर्ने हुन्छ। तर त्यही समस्यालाई समकोण त्रिभुज बनाई त्यसको एउटा भुजा र कोण मात्र नापेर बाँकी भुजाहरूको नाप सजिलै पत्ता लगाउन सकिन्छ। यस्तै तरिकाबाट उचाइ र दूरीसम्बन्धी समस्याहरू समाधान गर्ने तरिकाको बारेमा अध्ययन गर्नुहोस्।

15.1 उचाइ र दूरी (Height and Distance)

क्रियाकलाप 1

तल दिइएका वस्तु स्थितिलाई अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस्।

चित्रमा एउटा अवलोकन कर्ताले जमिनको सतहबाट रुखको टुप्पामा हेरिरहेको छ। त्यसरी हेर्दा जमिन र दृष्टि रेखाको बिचमा एउटा कोण (θ) बनेको छ।



- जमिन, रुख र दृष्टि रेखा मिली कस्तो त्रिभुज बनेको छ ?
- के यसरी बनेको त्रिभुजमा त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको प्रयोग गर्न सकिन्छ ?
- जमिन र दृष्टि रेखाको बिचमा बनेको कोणलाई के कोण भनिन्छ होला ? के त्यसको कुनै त्यस्तो विशेष नाम हुन्छ त ?
- यदि जमिन र दृष्टि रेखाले बनाएको कोण 45° , अवलोकनकर्ता र रुखको फेदसम्मको दूरी 10 m छ भने

उक्त रुखको उचाइ कसरी पत्ता लगाउने होला ? कुन गणितीय ज्ञानको प्रयोग गर्न सकिन्छ ?

जमिन, रुख र दृष्टि रेखा मिली एउटा समकोण त्रिभुज बनेको छ। समकोण त्रिभुजमा चाहेको अवस्थामा त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको प्रयोग गर्न सकिन्छ। चित्रमा जमिन र दृष्टि रेखाको बिचमा बनेको कोण (θ) लाई उन्नतांश कोण (angle of elevation) भनिन्छ। यदि कोण (θ) = 45° र अवलोकनकर्ता र रुखको फेद सम्मको दूरी 10 m दिएको अवस्थामा त्रिकोणमितीय अनुपात tan को प्रयोग गर्‍यो भने रुखको उचाइ पत्ता लगाउन सकिन्छ। अरु त्रिकोणमितीय अनुपातहरू जस्तै sin, cos किन प्रयोग गर्न सकिदैन ? sin, cos प्रयोग गर्न कर्ण रेखाको लम्बाइ र लम्ब रेखाको लम्बाइ दिनुपर्छ जुन दुवै दिएको अवस्था छैन।

अब, त्रिभुज ABC मा प्रसङ्ग कोण (θ) = 45° भए

$$\tan\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{अथवा, } \tan 45^\circ = \frac{BC}{10 \text{ m}}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{BC}{10 \text{ m}} \quad [\because \tan 45^\circ = 1 \text{ हुने भएकोले]$$

$$BC = 10 \text{ m}$$

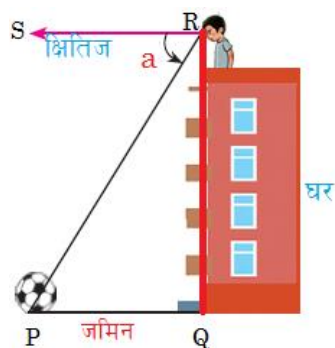
अतः रुखको उचाइ (BC) = 10 m

कुनै पनि माथितिर रहेको वस्तुलाई तलबाट हेर्दा दृष्टिरेखाले जमिन अथवा जमिनसँग समानान्तर हुने रेखासँग बनाएको कोणलाई उन्नतांश कोण (angle of elevation) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

तल दिइएको वस्तु स्थितिलाई अध्ययन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नहरूको उत्तर दिनुहोस् ।

चित्रमा एउटा अवलोकनकर्ताले घरको छतबाट उभिएर तल आगनमा रहेको फुटबल हेरिरहेका छन् । यसरी हेर्दा क्षितिज रेखा र दृष्टि रेखाको बिचमा एउटा कोण (a) बनेको छ ।



(क) जमिनमा बनेको सिधा रेखा र क्षितिज रेखाको कस्तो सम्बन्ध हुन्छ ?

- i) बराबर हुन्छन् ii) समानान्तर हुन्छन्
iii) लम्ब हुन्छन् iv) परिभाषित गर्न सकिँदैन ।

(ख) के त्रिभुज PQR समकोण त्रिभुज हो त ?

(ग) क्षितिज रेखा र दृष्टि रेखाको बिचमा बनेको कोण $\angle SRP = a$ लाई के कोण भनिन्छ, होला ? के यसको कुनै त्यस्तो फरक नाम छ, त ?

(घ) यी दुई कोणहरू $\angle SRP$ र $\angle RPQ$ बिच कस्तो सम्बन्ध छ ? लेख्नुहोस्

(ङ) यदि क्षितिज रेखा र दृष्टि रेखाले बनाएको कोण $\angle SRP = a = 45^\circ$ र घरको उचाइ 20 m भए घरको फेददेखि फुटबल सम्मको दूरी कति हुन्छ, होला ? कसरी पत्ता लगाउन सकिन्छ ?

जमिनमा बनेको सिधा रेखा र क्षितिज रेखा एक आपसमा समानान्तर हुन्छन् । हो पक्कै पनि त्रिभुज PQR समकोण त्रिभुज नै हो । क्षितिज रेखा र दृष्टि रेखाको बिचमा बनेको कोण $\angle SRP = a$ लाई अवनति कोण (angle of depression) भनिन्छ । चित्रमा SR र PQ समानान्तर भएकोले $\angle SRP = \angle RPQ$ (एकान्तर कोणहरू) हुन्छ ।

त्यसैले $\angle SRP = a = 45^\circ$ छ, भने $\angle RPQ = 45^\circ$ अब, समकोण त्रिभुज PQR मा

$$\text{अथवा, } \tan \angle RPQ = \frac{QR}{PQ}$$

$$\text{अथवा, } \tan 45^\circ = \frac{20 \text{ m}}{PQ}$$

$$\text{अथवा, } 1 = \frac{20 \text{ m}}{PQ} \quad [\because \tan 45^\circ = 1 \text{ हुने भएकोले}]$$

$$\therefore PQ = 20 \text{ m}$$

अतः घरको फेददेखि फुटबल सम्मको दूरी 20 m छ ।

कुनै अग्लो स्थानबाट होचो भागमा रहेको कुनै वस्तुलाई हेर्दा दृष्टि रेखाले क्षितिज रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (angle of depression) भनिन्छ ।

नोट : उन्नतांश कोण र अवनति कोण नाप्ने उपकरण/सामग्रीलाई *clinometer* भनिन्छ ।

उदाहरण 1 (उन्नतांश कोण भएको सामान्य प्रश्न)

नदीको एक किनारामा 20m अग्लो टावर छ र नदीको अर्को किनाराबाट टावरको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 30° रहेछ भने सो नदीको चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, $AC = 20 \text{ m}$ टावरको उचाइ हो ।

$BC = x$ मिटर नदीको चौडाइ हो ।

समकोण त्रिभुज ABC मा, $\tan 30^\circ = \frac{AC}{BC} \quad [\because \tan \theta = \frac{P}{b}]$

अथवा, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20 \text{ m}}{x} \quad [\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

अथवा, $x = 20\sqrt{3} \text{ m}$

$\therefore BC = x = 20\sqrt{3} \text{ m}$

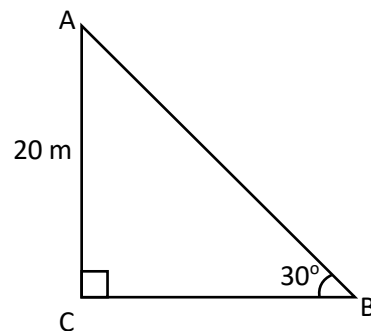
अतः नदीको चौडाइ (BC) $= x = 20\sqrt{3} \text{ m}$ रहेछ ।

उदाहरण 2 (दुईओटा उचाइ र उन्नतांश कोण भएको प्रश्न)

2m अग्लो मानिसले आफ्नो ठीक अगाडि रहेको 62 m अग्लो खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण पाएछ भने खम्बा र मानिस बीचको दूरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ

मानौं, $AB = 62 \text{ m}$ खम्बाको उचाइ हो ।



DE = BC = 2m मानिसको उचाइ हो ।
 CD = BE खम्बा र मानिस बिचको दूरी हो ।

अब, समकोण त्रिभुज ACD मा

$$\tan 45^\circ = \frac{AC}{CD}$$

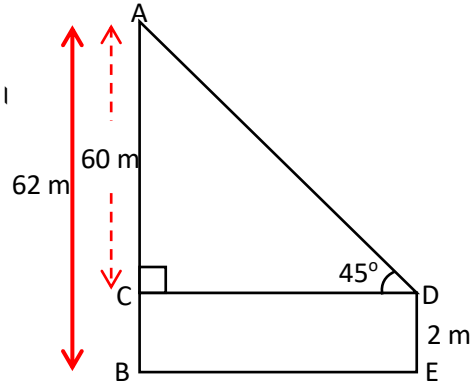
$$\text{अथवा, } 1 = \frac{AB - BC}{CD}$$

$$\text{अथवा, } 1 \times CD = 62 - 2$$

$$\text{अथवा, } 1 \times CD = 60$$

$$\text{अथवा, } CD = 60 \text{ m}$$

अतः खम्बा र मानिस बीचको दूरी 60 m रहेछ ।



उदाहरण 3 (चङ्गा र धागो सम्बन्धी प्रश्न)

उचाइ 1.4m भएको एउटा मानिसले 33m अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाइ $90\sqrt{2}$ m छ र यसले क्षितिजसँग 45° को कोण बनाउँछ भने जमीनदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, घरको उचाइ (EF) = (GA) = 33 m

मानिसको उचाइ (CE) = (DG) = 1.4m

चङ्गाको धागोको लम्बाइ (BC) = $90\sqrt{2}$ m

चङ्गाले क्षितिजसँग बनाएको कोण $\angle BCD = 45^\circ$?

जमीनदेखि चङ्गा सम्मको उचाइ (BA) = ?

अब, समकोणी त्रिभुज BCD मा $\angle BCD = 45^\circ$

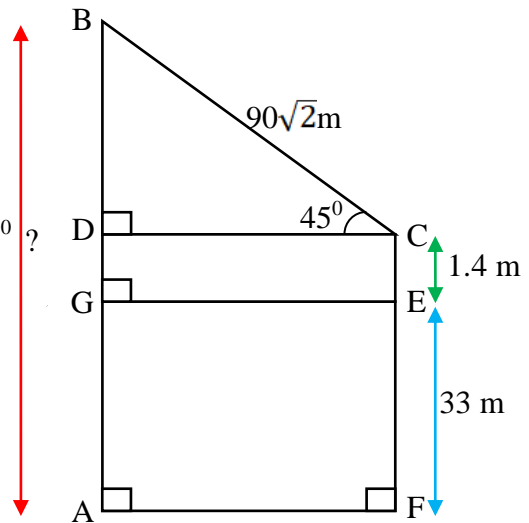
लाई प्रसङ्ग कोण लिँदा

$$\sin C = \frac{BD}{BC} \quad [\because \sin \theta = \frac{P}{h} \text{ हुने भएकोले}]$$

$$\text{अथवा, } \sin 45^\circ = \frac{BD}{90\sqrt{2} \text{ m}}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{BD}{90\sqrt{2} \text{ m}}$$

$$\therefore BD = 90 \text{ m}$$



∴ जमीनदेखि चङ्गासम्मको उचाइ (AB) = BD + DG + GA

$$= 90\text{m} + 1.4\text{m} + 33\text{m}$$

$$= 124.4\text{m}$$

उदाहरण 4 (दुईओटा उचाइ र अवनति कोण भएको प्रश्न)

एउटा 150m अग्लो स्तम्भ छ। उक्त स्तम्भको टुप्पोबाट, स्तम्भदेखि 60m को दुरीमा रहेको घरको छतमा हेर्दा बन्ने अवनति कोण 30° भएमा घरको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान : यहाँ,

मानौं, AB = 60m स्तम्भको उचाइ हो।

DE = BC घरको उचाइ हो।

CD = BE = 60 m स्तम्भ र घर बिचको दूरी हो।

अब, समकोण त्रिभुज ACD मा

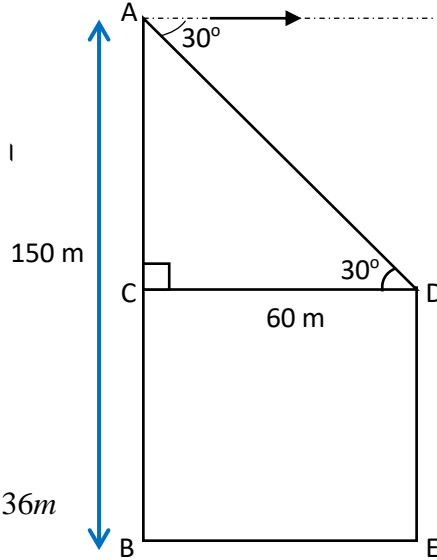
$$\tan 30^\circ = \frac{AC}{CD}$$

$$\text{अथवा, } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{60}$$

$$\text{अथवा, } AC = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$$

$$\text{फेरि, } DE = AB - AC = 150 - 20\sqrt{3} = 115.36\text{m}$$

अतः उक्त घरको उचाइ 115.36m रहेछ।



उदाहरण 5 (भाँचिएको रुख सम्बन्धी प्रश्न)

15m अग्लो रुख हावाले भाँचिएर रुखको टुप्पाले जमिनको सतहसँग 60° को कोण बनाउँछ।

क) भाँचिएको भागको लम्बाइ कति हुन्छ ?

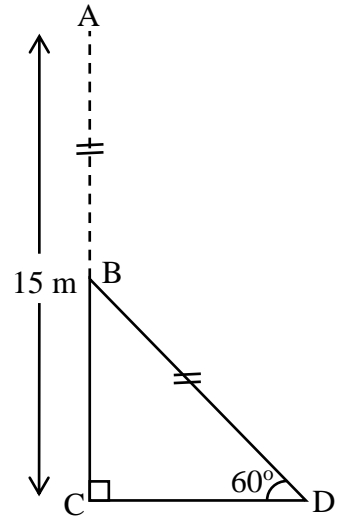
ख) उक्त रुख कति उचाइबाट भाँचिएको रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान : यहाँ,

मानौं, AC = 15m भाँचिनु भन्दा अगाडिको रुखको उचाइ हो। भाँचिए पछि बाँकि रहेको रुखको उचाइ (BC) = ?

रुखको टुप्पोले जमिनसँग बनाएको कोण BDC = 60°

अब, समकोणी त्रिभुज BCD मा ∠Dलाई प्रसङ्ग कोण लिँदा



$$\sin D = \frac{BC}{BD}$$

$$[\therefore \sin \theta = \frac{P}{h} \text{ हुने भएकोले }]$$

$$\text{अथवा, } \sin 60^\circ = \frac{AC-AB}{AB}$$

$$[\therefore AB = BD \text{ हुने भएकोले }]$$

$$\text{अथवा, } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15-AB}{AB} \quad [$$

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ हुने भएकोले }]$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{3} AB = 30 - 2AB$$

$$\text{अथवा, } \sqrt{3} AB + 2AB = 30$$

$$\text{अथवा, } AB(\sqrt{3} + 2) = 30$$

$$\text{अथवा, } AB = \frac{30}{(\sqrt{3} + 2)}$$

$$\text{अथवा, } AB = 8.038$$

अतः भाँचिएको भागको लम्बाइ = 8.038 m

ख) फेरी, (BC) = 15 m - 8.038 = 6.96 m

अतः भाँचिएपछि बाँकी रहेको रुखको लम्बाई (BC) = 6.96 m

उदाहरण 6 (वृत्ताकार पोखरी सम्बन्धि प्रश्न)

एउटा 2.5 m गहिरो वृत्ताकार पोखरीको व्यास 100 m छ ।
उक्त पोखरीको ठीक बीचमा 52.5 m खम्बा गाडिएको छ ।
एकजना मानिसले पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा
कति डिग्रीको उन्नतांश कोण बन्ला पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

मानौं, BD = 100 m वृत्ताकार पोखरीको व्यास हो ।

त्यसैले वृत्ताकार पोखरीको अर्धव्यास (OB) = 50 m हुन्छ ।

AM = 52.5 m खम्बाको वास्तविक उचाई हो ।

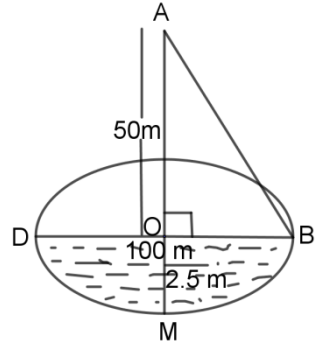
त्यसैले, खम्बाको पानी बाहिरको भागको उचाइ(AO) = 52.5 - 2.5 = 50 m हुन्छ ।

यहाँ, पोखरीको किनारा B बाट खम्बाको टुप्पो A मा हेर्दा उन्नतांश कोण $\angle OBA = \theta$ बनेको छ ।

अब, समकोण त्रिभुज AOB मा

$$\tan \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{50}{50} = 1$$

अथवा, $\tan \theta = \tan 45^\circ$



अथवा, $\theta = 45^\circ$

$\therefore \angle OBA = 45^\circ$

तसर्थ, पोखरीको किनारा B बाट खम्बाको टुप्पो A मा हेर्दा 45° को उन्नतांश कोण बनेको छ ।

अभ्यास: 15.1

1. उन्नतांश कोण (angle of elevation) र अवनति कोण (angle of depression) को परिभाषा लेख्नुहोस् ।

उदाहरण 1 अनुसार (उन्नतांश कोण भएको सामान्य प्रश्नहरू)

2. नदीको एक किनारामा $25\sqrt{3}m$ अग्लो टावर छ र नदीको अर्को किनाराबाट टावरको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° रहेछ भने सो नदीको चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
3. नदीको एक किनाराबाट अर्को किनारमा रहेको $60m$ अग्लो धरहराको टुप्पोको उन्नतांश कोण 30° छ र नदीको चौडाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. $30m$ टाढाबाट एउटा खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा त्यसको उन्नतांश कोण 30° पाइयो भने त्यो खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
5. अवलोकन विन्दुबाट $19\sqrt{3}m$ दुरीमा रहेको एउटा खम्बाको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 30° पाइयो भने खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. $120m$ अग्लो धरहराको टुप्पोमा फेददेखि $100m$ परबाट उभिएर हेर्दा उन्नतांश कोण 45° पाउँछ भने मानिसको उचाइ कति होला ?

उदाहरण 2 अनुसार (दुईओटा उचाइ र उन्नतांश कोण भएको प्रश्नहरू)

7. $1.54m$ अग्लो एउटी केटी $53.5m$ उचाइको एउटा धरहराबाट $30m$ पर उभिएकी छिन् भने उनको आँखाबाट धरहराको टुप्पोको उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।
8. $1.6m$ अग्लो मानिसले एउटा स्तम्भको टुप्पोमा हेर्दा 45° को कोण पाउँछ । यदि स्तम्भको उचाइ $21m$ छ भने मानिस र स्तम्भ बिचको दूरी निकाल्नुहोस् ।

उदाहरण 3 अनुसार (चङ्गा र धागो सम्बन्धी प्रश्नहरू)

9. उचाइ $1.3m$ भएको एउटा केटाले $27m$ अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाई $76\sqrt{3}m$ छ र यसले क्षितिजसँग 60° को कोण बनाउँछ भने जमीनको सतहदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनु होस् ।
10. उचाइ $2m$ भएको एउटा मानिसले $32m$ अग्लो घरको छतबाट चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाइ $120\sqrt{2}m$ छ र यसले क्षितिजसँग 45° को कोण बनाउँछ भने जमीनको सतहदेखि चङ्गासम्मको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

11. 1.5m उचाइ भएको एउटा केटाले चङ्गा उडाइरहेको छ । धागोको लम्बाइ 200m भएको बेला चङ्गाको धागोले क्षितिजसँग 30° को कोण बनाउँछ भने जमिनबाट चङ्गाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
12. एउटा केटाले चङ्गा उडाइरहेको छ । यदि चङ्गाको धागोको लम्बाइ 30m त्यसले क्षितिज रेखासँग 30° को कोण बनाउँछ भने त्यो चङ्गा कति उचाइमा उडिरहेको छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 4 अनुसार (दुईओटा उचाइ र अवनति कोण भएको प्रश्नहरू)

13. $75\sqrt{3}$ m अग्लो धरहराबाट कुनै रुखको फेद हेर्दा अवनति कोण 60° छ भने त्यो रुख धरहराको फेदबाट कतिपर होला ?
14. 160m अग्लो कुनै टाकुराको टुप्पोबाट जमिनको सतहमा रहेको एउटा ढुङ्गा हेर्दा अवलोकन कर्ताले अवनति कोण 60° पाएछ भने उक्त टाकुराको फेदबाट त्यो ढुङ्गाको दूरी पत्ता लगाउनुहोस् ।
15. एउटा स्तम्भको टुप्पोबाट स्तम्भदेखि 60 m टाढा रहेको 20 m अग्लो घरको छतमा हेर्दा 60° को अवनति कोण पाइयो भने स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
16. एउटा घर र मन्दिरको उचाइ क्रमशः 10 m र 22 m छन् । यदि मन्दिरको छानाबाट एक व्यक्तिले घरको छानामा हेर्दा अवनति कोण 30° पाउँछ भने घर र मन्दिर बिचको दूरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 5 अनुसार (भाँचिएको रुख सम्बन्धी प्रश्नहरू)

17. 20m अग्लो रुख हावाले भाँचिएर (फेदबाट नछुट्टिएको) यसको टुप्पोले जमिनमा छुँदा जमिनसँग 60° को कोण बनेको छ । रुखको भाँचिएको भागको लम्बाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
18. एउटा रुख हावाले भाँचेको छ तर छुट्टिएको छैन । भाँचिएको माथिल्लो भागले जमिनसँग 30° को कोण बनाउँछ र रुखको जरादेखि $4\sqrt{3}$ m पर जमिनलाई टुप्पोले हुन्छ भने भाँचिनु भन्दा पहिलो रुखको उचाइ कति थियो ?
19. एउटा 15 m अग्लो रुख हावाले भाँचिदा त्यसको टुप्पोले जमिनमा छुन्छ । यदि रुखको भाँचिएको भागले जमिनसँग 30° को कोण बनाउँछ ।
 - क) भाँचिए पछिको रुखको उचाइ कति हुन्छ ?
 - ख) रुखको फेददेखि टुप्पोले जमिनलाई छोएको विन्दुसम्मको दूरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

उदाहरण 6 अनुसार वृत्ताकार पोखरी सम्बन्धी प्रश्नहरू)

20. 60m व्यास भएको एउटा वृत्ताकार खेतको बिचमा एउटा स्तम्भ गाडिएको छ । उक्त खेतको परिधिमा एउटा विन्दुबाट सो स्तम्भको टुप्पोमा हेर्दा 60° को कोण बन्दछ भने उक्त स्तम्भको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।

21. एउटा वृत्ताकार पोखरीको व्यास $16\sqrt{3}m$ छ । यसको बिचमा (केन्द्रमा) खम्बा उभ्याइएको छ । एउटा $1.5m$ अग्लो मानिसले पोखरीको किनाराबाट उक्त खम्बाको उन्नतांश कोण 60° पाउँछ भने पानीको सतहमाथि खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् ।
22. एउटा वृत्ताकार पोखरीको बिचमा एउटा खम्बा उभ्याइएको छ । पानीको सतहबाट खम्बाको उचाइ $30m$ र पोखरीको किनाराबाट खम्बाको टुप्पाको उन्नतांश 60° भए पोखरीको अर्धव्यास निकाल्नुहोस् ।

उत्तर :

- | | | |
|-------------------|-------------|-------------------|
| 2. 25 m | 3. 103.92 m | 4. $10\sqrt{3}m$ |
| 5. 19m | 6. 2m | 7. 60° |
| 8. 30. 37m | 9. 142.3m | 10. 154m |
| 11. 101.5m | 12. 15m | 13. 75m |
| 14. 92.37m | 15. 123.92m | 16. $12\sqrt{3}m$ |
| 17. 10.71m | 18. 12m | 19. 5 m, 8.66 m |
| 20. $30\sqrt{3}m$ | 21. 25.5m | 22. $10\sqrt{3}m$ |

परियोजना कार्य

उचाइ, दुरी, उन्नतांश कोण (angle of elevation) र अवनति कोण (angle of depression) को परिभाषा लेख्नुहोस् । आफ्नो वरिपरि पाइने स्थानीय सामग्रीको प्रयोग गरी उन्नतांश कोण र अवनति कोण नाप्ने उपकरण/सामग्री क्लाइनोमिटर (clinometer) बनाउनुहोस् । अनि सो clinometer को प्रयोग गरी आफ्नो घर, गोठ, वा घर नजिकै रहेको रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस् । आफ्नो घरको उचाइ नाप्दा घरदेखि जति दुरी परबाट घरको छत (छाना) मा हेरिएको थियो त्यति नै दुरीबाट छिमेकमा भएका साथीहरूमध्ये कुनै एक साथीको घरको उचाइ नाप्नुहोस् । कसको घर कतिले अग्लो वा बराबर छन् तुलना गर्नुहोस् ।