खुला विद्यालयका लागि लक्षित स्वाध्ययन सामग्री

गणित

कक्षा १०

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

खुला विद्यालयका लागि लक्षित स्वाध्ययन सामग्री

गणित

कक्षा १०

लेखकहरू

रमेशप्रसाद अवस्थी

कृष्ण गोसाईं

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

२०७७

प्रकाशक : नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

पहिलो संस्करण : वि.सं. २०७७

भूमिका

विद्यार्थीहरूको शिक्षाको पहुँच विस्तारका लागि खुला विद्यालय शिक्षा पद्धतिको भूमिका महत्त्वपूर्ण हुन्छ । खुला शिक्षा पद्धतिले आर्थिक, सामाजिक, भौगोलिक तथा यस्तै अन्य कारणबाट विद्यालय शिक्षा पूरा गर्न नसकेका बालबालिका तथा विद्यालय उमेर कटिसकेका व्यक्तिहरूलाई शिक्षाको अवसर प्रदान गरी शिक्षाको मूल धारमा ल्याउने उद्देश्य राख्दछ ।

विद्यालय शिक्षाको पाठ्यक्रममा आधारित रहेर विगत वर्षहरूमा साविकको शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्रबाट कक्षा दशको अनिवार्य विषयका स्वाध्ययन सामग्रीहरू विकास हुदै आएकोमा यस केन्द्रबाट गत आ. व. मा थप चारओटा ऐच्छिक विषयका स्वाध्ययन सामग्री विकास भई सार्वजनिकीकरण भइसकेका छन् । यस वर्ष चारओटा ऐच्छिक विषयका स्वाध्ययन सामग्री विकास गर्ने कार्यक्रम रहेको सन्दर्भमा यो एउटा सामग्री विकास भएको छ ।

औपचारिक शिक्षा कक्षा दशको **"गणित"** विषयको पाठ्यक्रमको आधारमा खुला विद्यालयको कक्षा दशको यो स्वाध्ययन सामग्री निमार्ण गरिएको छ । कक्षा आठ पास गरेका व्यक्तिहरूले पनि कक्षा दशको परीक्षामा सहभागी हुन सक्ने प्रावधान भएकाले यस सामग्रीमा कक्षा नौको विषयवस्तुहरूलाई समेत समेटी सिकारु मैत्री विषयवस्तु प्रस्तुतिमा निरन्तरता कायम गर्ने प्रयास गरिएको छ । विद्यार्थीहरूले आफैँले पढेर सिक्न सकुन् भन्ने उद्देश्यले विषयवस्तुहरूलाई सरल र व्यवहारिक बनाउने कोशिस गरिएको छ । यस प्रकार यो सामग्री पाठ्यपुस्तकको सट्टामा नभई परिपुरकको रुपमा विकास गरिएको हो ।

यस **"गणित"** विषयको लेखनकार्य गर्नुहुने लेखकद्वय श्री रमेशप्रसाद अवस्थी र श्री कृष्ण गोसाइँलाई धन्यवाद दिन चाहन्छु । पुस्तक लेखनका क्रममा समय समयमा सल्लाह र सुझाव प्रदान गर्नुहुने यस केन्द्रका उपमहानिर्देशक श्री विष्णुप्रसाद अधिकारी र लेखन कार्यको संयोजन गर्नुहुने पाठ्यक्रम तथा सामग्री शाखाका निर्देशक श्री राजकुमार थापा, शाखा अधिकृत श्री भीमादेवी कोइरालालाई धन्यवाद दिन चाहन्छु ।

यस पुस्तकको भाषा सम्पादन गर्नुहुने निर्देशक श्री गणेशप्रसाद भट्टराई, विषयवस्तु सम्पादन गर्नुहुने श्री जगन्नाथ अधिकारी, चित्र तथा लेआउट डिजाइन र कभरपेज डिजाइन गर्नुहुने श्री जयराम कुइँकेल प्रति आभार प्रकट गर्दछु । अन्त्यमा यस पुस्तकलाई थप परिमार्जित, परिष्कृत बनाउन सम्बन्धित पाठक तथा सरोकारवालाहरूवाट सदैव रचनात्मक सुझाव तथा प्रतिक्रियाको अपेक्षा समेत गर्दछु ।

डा. तुलसीप्रसाद थपलिया

महानिर्देशक

शिक्षा तथा मानव स्रोत विकास केन्द्र

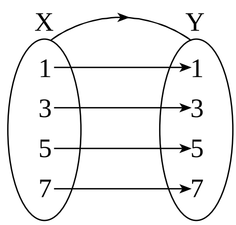
विषयसूची

एकाइ 1

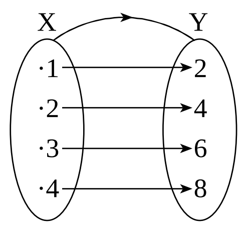
बीजगणित (Algebra)

1.0 पुनरावलोकन (Review)

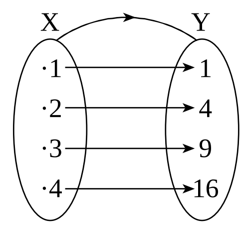
तल दिइएका मिलान चित्रहरूमा 'x' र 'y' को सम्बन्ध खोजि गरी लेख्नुहोस् :



चित्र नं. 1.0(a)



चित्र नं. 1.0(b)



चित्र नं. 1.0(c)

x र y को सम्बन्धको क्रम जोडा समुहमा लेख्दा {(1, 1), (3, 3), (5, 5) र (7, 7) } हुन्छ। x = y सम्बन्ध अथवा 'बराबर' सम्बन्ध परिभाषित छ।	x र y को सम्बन्धलाई क्रम जोडामा लेख्दा { (1, 2), (2, 4), (3, 6) र (4, 8) } हुन्छ। y = 2x अथवा 'दुईगुणा' सम्बन्ध परिभाषित छ।	x र y को सम्बन्धलाइ क्रम जोडामा लेख्दा { (1, 1), (2, 4), (3, 9) र (4, 16) } हुन्छ। $y = x^2$ अथवा 'वर्ग' सम्बन्ध परिभाषित छ।

सम्बन्ध जस्तै फलनलाई पनि समीकरण, लेखाचित्र, तालिका, मिलान चित्र अथवा फलन यन्त्रबाट देखाउन सकिन्छ। माथिका चित्रहरूलाई मिलान चित्र (Arrow-diagram) भनिन्छ।

1.1 (a) मा दिइएको फलनलाई 'f' ले जनाउँदा $f : x \rightarrow y$ अथवा $f = \{(x, y) : y = x\}$ लेख्न सकिन्छ। 1.1(b) मा दिइएको फलनलाई 'g' ले जनाउँदा $g : x \rightarrow y$ अथवा $g = \{(x, y): y = 2x\}$ लेख्न सकिन्छ। 1.1(c) मा दिइएको फलनलाई 'h' ले जनाउँदा $h : X \rightarrow Y$ अथवा $h = \{(x, y): y = x^2\}$ लेख्न सकिन्छ।

अभ्यास 1.0

तल दिइएका तालिकाका आधारमा फलनलाई क्रम जोडाहरूको समूह र समीकरणद्वारा लेख्नुहोस् :

1.

x	1	2	3	4	5
y	1	8	27	64	125

2.

x	1	2	3	4	5
y	3	4	5	6	7

3.

x	0	1	2	3	4
y	– 1	0	1	2	3

4.

x	1	2	3	4
y	0.5	1	1.5	2

5.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

उत्तरहरू

क्रम जोडाको समुहद्वारा समीकरणद्वारा

1. $\{(1, 1), (2, 8), (3, 27), (4, 64), (5, 125)\}$ र $\{(x, y) : y = x^3\}$
2. $\{(1,3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$ र $\{(x, y) : y = x + 2\}$
3. $\{(1, 0.5), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ र $\{(x, y) : y = x – 1\}$
4. $\{(1, 0.5), (2, 1), (3, 1.5), (4, 2)\}$ र $\left\{(x, y) : y = \frac{1}{2}x\right\}$
5. $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$ र $\{(x, y) : y = 2x + 1\}$

1.1 विभिन्न प्रकारका फलनहरू (Different Types of Function)

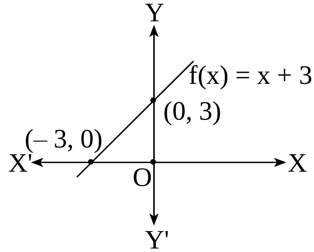
1. बिजीय फलन (Algebraic Function)

सिधा रेखाको समीकरण $y = 3x + 2$ मा 3 र 2 लेखाचित्रमा केलाई जनाउँदछन् ? लेखाचित्र खिचि देखाउनुहोस्।

बीजगणितीय क्रियाहरू सन्तुष्ट हुने स्वरूपको बीजगणितीय समीकरणलाई नै बीजीय फलन (Algebraic function) भनिन्छ। जसको क्षेत्र (Domain) र प्रभाव क्षेत्र (Range) परिभाषित हुन्छ।

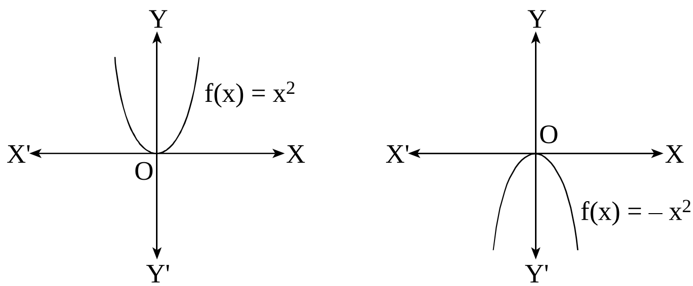
बीजीय फलनका केही स्वरूपहरू निम्नअनुसार परिभाषित हुन्छन्।

(a) रेखीय फलन (Linear function): कुनै फलन $f : A \to B$ लाई $f(x) = mx + c$, द्वारा जनाइन्छ जहाँ , त्यसलाई नै रेखीय फलन भन्दछन्। यो फलनलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा सिधा रेखा देख्न सकिन्छ। उदाहरणका लागि $f(x) = x + 3$ मा $m = 1$ र $c = 3$ छ। यसलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नअनुसार देख्न सकिन्छ :



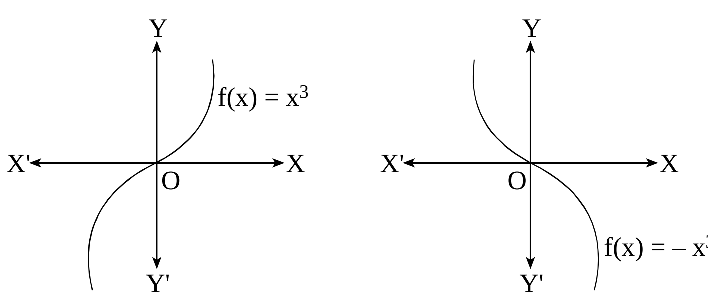
$f(x) = mx$ (जहाँ $m = 1$) लाई एकात्मक फलन (Identity function) र $f(x) = c$ लाई अचर फलन (Constant function) भन्दछन्। यी दुवैले लेखाचित्रमा सिधा रेखालाई जनाउँछन्।

(b) **वर्गघातीय फलन (Quadratic function):** फलन, $f : A \rightarrow B$ लाई $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ स्वरूपमा व्यक्त गर्दा परिभाषित हुने फलन नै वर्गघातीय फलन हो। $f(x) = \pm x^2$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा प्राप्त हुने फलनको स्वरूप पारावोलिक हुन्छ।



$f(x) = x^2$ अथवा, $f(x) = -x^2$ ले वर्गघातीय फलनलाई जनाउँछन्। वर्गघातीय फलनलाई $f(x) = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$ स्वरूपमा समेत लेख्न सकिन्छ।

(c) **घनघातीय फलन (Cubic function):** फलन $f : A \rightarrow B$ लाई $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ स्वरूपमा व्यक्त गर्दा परिभाषित हुने फलन नै घनघातीय फलन हो। $f(x) = x^3$ र $f(x) = -x^3$ दुवैले घनघातीय फलनलाई जनाउँछन्। यिनीहरूको लेखाचित्र निम्नअनुसार हुन्छ :



बीजगणितीय फलनहरू बहुपदीय फलन हुन्। जहाँ x^n को घाताङ्कको आधारमा नामाकरण गर्ने गरिन्छ।

अभ्यास 1.1

1. **तल दिइएका फलनहरूको उदाहरणसहित परिभाषा लेख्नुहोस् :**

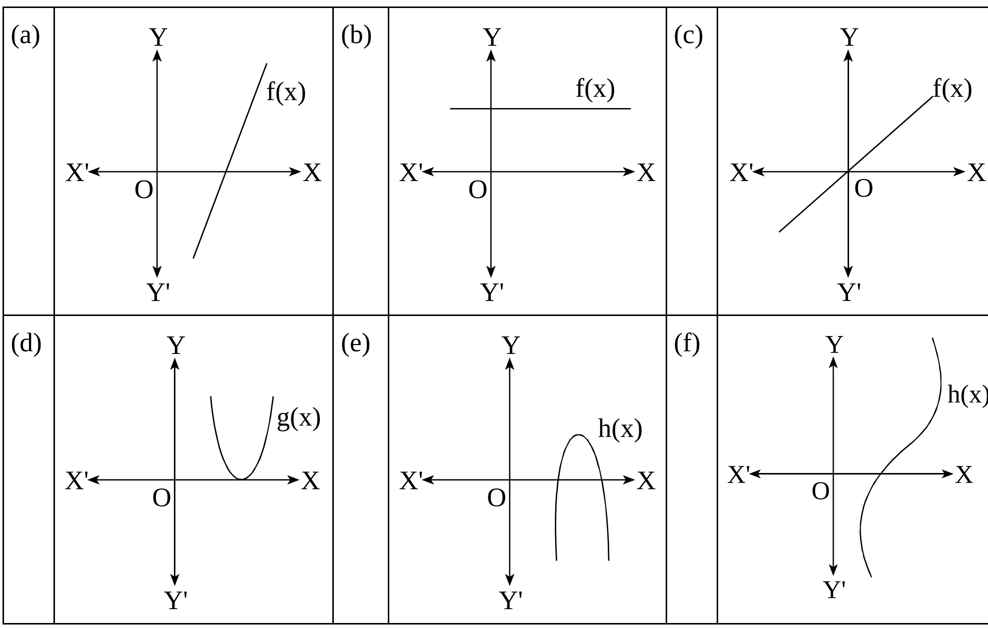
   (a) रेखीय फलन (Linear Function)

   (b) एकात्मक फलन (Identity Function)

   (c) वर्गघातीय फलन (Quadratic Function)

   (d) घनघातीय फलन (Cubic Function)

2. **तल दिइएका लेखाचित्रमा फलनको प्रकार के हो ? लेख्नुहोस् :**



3. **तल दिइएका फलनहरूलाई समीकरणका रूपमा लेखी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :**

   (a)

उमेर वर्षमा (x)	1	2	3	4	5
तौल कि.ग्रा.मा (y)	9	11	13	15	17

   (b)

दैनिक बचत रू. मा (x)	10	20	30	40	50	60	70
दैनिक खर्च (रू.मा) (y)	50	100	150	200	250	300	350

4. $g(x) = x^2 + 1$ मा $-4 \le x \le 4$ सम्म लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

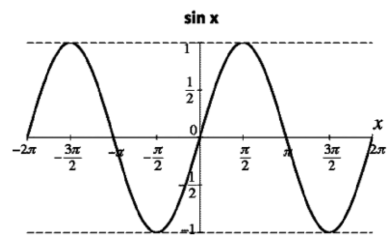
5. आफ्नो शरीरको एक हप्ताको तापक्रम नापी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । प्राप्त विवरणबारे साथीहरूको बिचमा छलफल गर्नुहोस्।

1.1.2 त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function)

त्रिकोणमितीय अनुपातहरू sin x, cos x, tan x, cosec x, sec x र cot x का बारेमा हामीले कक्षा ९ मा अध्ययन गरिसकेका छौँ। यहाँ हामी त्रिकोणमितीय फलनहरू $f(x) = \sin x\ (-\infty < x < \infty)$, $f(x) = \cos x(-\infty < x < \infty)$ र $f(x) = \tan x\ (-\infty < x < \infty)$ सम्बन्धी अध्ययन गर्नेछौँ। बीजगणितीय फलन $f(x) = x + 2$ र $g(x) = x$ भए $f(x) + g(x) = x + 2 + x = 2x + 2$ भए भैँ त्रिकोणमितीय फलनहरू $f(x) = \sin x$ र $g(x) = \sin 2x$ का लागि $f(x) + g(x) = \sin x + \sin 2x = \sin (x + 2x) = \sin 3x$ परिभाषित हुँदैन। त्यसैले त्रिकोणमितीय फलनहरूलाई अबीजीय फलन (Transcendental function) भनिन्छ। त्रिकोणमितीय फलनहरू पिरियडको आधारमा परिभाषित हुन्छन्। $\sin (x + 2\pi) = \sin x$, $\cos (x + 2\pi) = \cos x$ र $\tan (x + \pi) = \tan x$ हुने भएकाले sin x, cos x र tan x को पेरियड क्रमशः 2π, 2π र π हुन्छ। $f(x + k) = f(x)$ हुँदा सबभन्दा सानो धनात्मक मान k नै f(x) का लागि पेरियड हुन्छ।

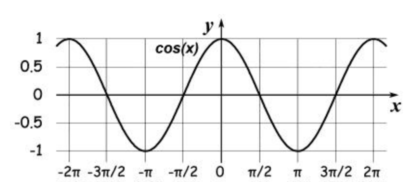
1.1.2(a): $f(x) = \sin x(-2\pi \le x \le 2\pi)$ को लेखाचित्र

$f(x) = \sin x$ का लागि $x = \pm 2\pi, \pm \pi, \pm \frac{p}{2}$ र $\pm \frac{3p}{2}$ मा मानहरू क्रमशः 0, 0, ± 1, ± 1 परिभाषित हुन्छन्। यी मानहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नलिखित प्रकारको लेखाचित्र प्राप्त हुन्छ।



1.1.2(b): $f(x) = \cos x(-2\pi \le x \le 2\pi)$ को लेखाचित्र

$f(x) = \sin x$ जस्तै $f(x) = \cos x$ का लगि पनि $x = \pm 2\pi, \pm \pi, \pm \frac{p}{2}$ र $\pm \frac{3p}{2}$ मा f(x) मानहरू क्रमशः 0, – 1, 0, 0 प्राप्त हुन्छन्। उक्त मानहरूलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नानुसारको लेखाचित्र प्राप्त हुन्छ :



1.1.2(c): $f(x) = \tan x(-2\pi \le x \le 2\pi)$ को लेखाचित्र

$x = \pm 2\pi, \frac{3p}{2}, \pm \pi$ र $\pm \frac{p}{2}$ मा f(x) का मानहरू पत्ता लगाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नानुसारको लेखाचित्र प्राप्त हुन्छ।

$f(x) = \tan x$ को लेखाचित्र

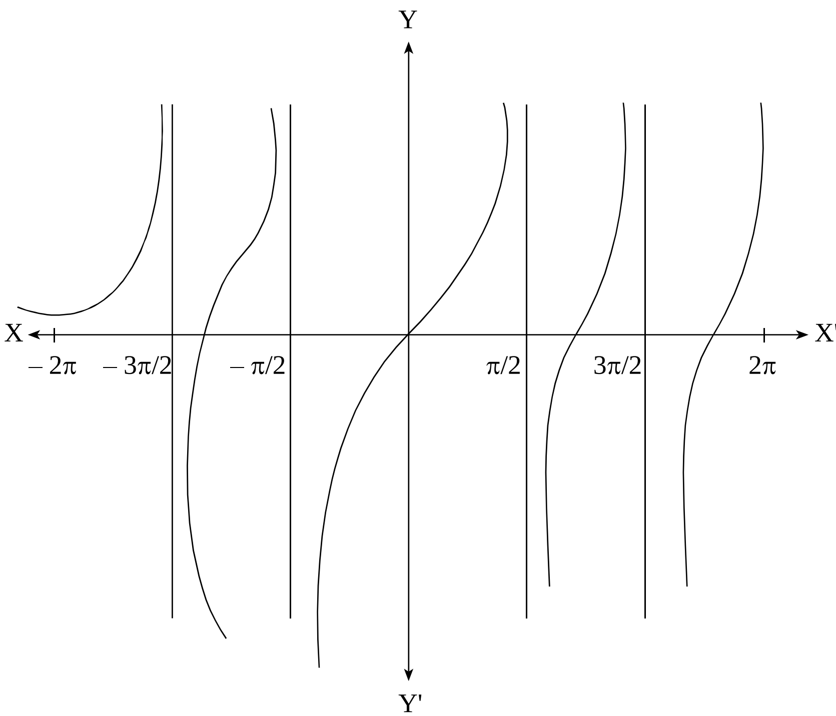


Fig.: $y = \tan x$ ($-2\pi \le x \le 2\pi$)

अभ्यास 1.1.2

1. तल दिइएका फलनहरूको विस्तार क्षेत्र लेख्नुहोस् :

   (a) $f(x) = \sin x$ [Ans: – 1 to 1]

   (b) $f(x) = \cos x$ [Ans: – 1 to 1]

   (c) $f(x) = \tan x$ [Ans: – ∞ to ∞]

2. तल दिइएका फलनहरूको पिरियड (Period) लेख्नुहोस् :

   (a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$ (c) $f(x) = \tan x$

   [Ans: (a) 2π (b) 2π (c) π]

3. लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् :

   (a) $y = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $y = \cos x \left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

(c) $f(x) = \cos x\ (-\pi \le x \le \pi)$ (d) $f(x) = \tan x\ (-\pi \le x \le \pi)$

(e) $f(x) = \cos x\ (-2\pi \le x \le 2\pi)$ (f) $f(x) = \sin x\ (-2\pi \le x \le 2\pi)$

(f) $f(x) = \sin x(-2\pi \le x \le 2\pi)$

4. $f(x) = \sin x$ र $f(x) = \cos x$ का लेखाचित्रहरूको प्रयोग दैनिक जीवनमा कहाँ कहाँ कसरी भएको पाइन्छ। खोजी गरि लेख्नुहोस्।

1.1.3 संयुक्त फलन (Composite Function)

The composition of functions:

यदि $f = \{(1, 3), (0, 0), (-1, -3)\}$ र $g = \{(0, 2), (-3, -1), (3, 5)\}$ भए $g(f(1))$, $g(f(0))$ र $g(f(-1))$ कति होला ?

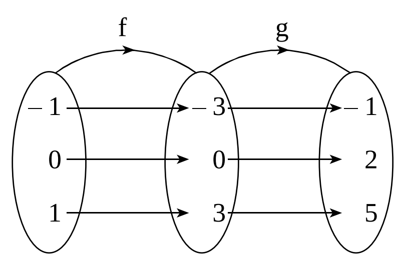
यहाँ, $f(1) = 3$, $f(0) = 0$ र $f(-1) = -3$ छ।

त्यसैले,

$$g(f(1)) = g(3) = 5$$
$$g(f(0)) = g(0) = 2$$
$$g(f(-1)) = g(-3) = -1$$

त्यसैले $g(f(...))$ बाट प्राप्त क्रमजोडा क्रमहरू (1, 5), (0, 2) र (– 1, – 1) छन्।

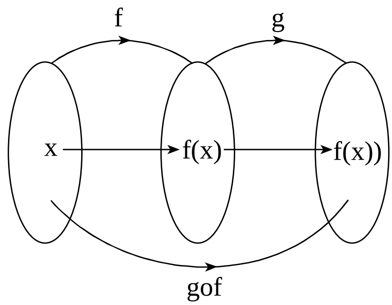
यसलाई मिलान चित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ।



यसरी परिभाषित फलनलाई gof' g संयुक्त फलन f (g composite f) भनी पढिन्छ।

मानौं प्रत्येक $x \in A$ का लागि $f : A \to B$ र प्रत्येक $f(x) \in B$ का लागि $g : B \to C$ छ। अब प्रत्येक $x \in A$ का लागि एउटा मात्र $g(f(x)) \in C$ परिभाषित हुने फलनलाई $gof : A \to C$ भनिन्छ।

$(gof)(x) = g(f(x))$ लेख्ने गरिन्छ।

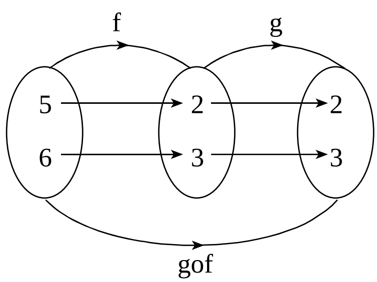


उदाहरण 1

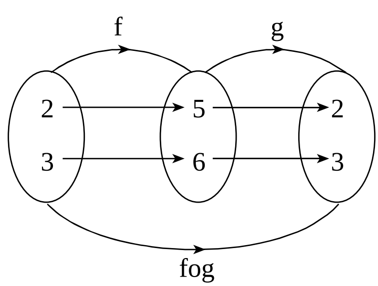
यदि f = {(5, 2), (6, 3)} र g = {(2, 5), (3, 6)} भए (fog) र (gof) लाई मिलान चित्रमा देखाई क्रमजोडाको समूह बनाउनुहोस्।

समाधान

चित्रमा, gof = {(5, 5), (6, 6)}



fog = {(2, 2), (3, 3)}



उदाहरण 2

यदि f : R → R: f(x) = 2x + 3 र g : R → R g(x) = x^2 भए (fog) (1) र (gof) (4) को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

fog $= f(g(x))$ र $g(f(4))$

$= f(x^2)\ g(f(4))$

$= 2(x^2) + 3$ $g(2 \times 4 + 3)$

$= 2x^2 + 3$ $g(8 + 3)$

$g(11) = 11^2 = 121$

उदाहरण 3

यदि $g : R \rightarrow R: g(x) = 4 - x$ र $f : R \rightarrow R\ f(x) = x + 2$ भए $(gof)\ (x)$ र $(fog)\ (x)$ पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

(a) यहाँ, $g(x) = x^2$ र $f(x) = 2x + 3$ छ।

$fog(1) = f(g(1))$	$(gof)\ (4) = g(f(4))$
$= (1^2)$	$= g(2 \times 4 + 3)$
$= 2 \times 1 + 3$	$= g(11)$
$= 2 + 3$	$= 11^2$
$= 5$	$= 121$

$\therefore$ $(fog)\ (1) = 5$ र $(gof)\ (4) = 121$

(b) यहाँ $f(x) = x + 2$ र $g(x) = 4 - x$ छ।

$(gof)\ (x) = g(f(x))$	$(fog)\ (x) = f(g(x))$
$= g(x + 2)$	$= f(4 - x)$
$= 4 - (x + 2)$	$= 4 - x + 2$
$= 4 - x - 2$	$= 6 - x$
$= 2 - x$	

$\therefore$ $(gof)\ (x) = 2 - x$ र $(fog)\ (x) = 6 - x$

उदाहरण 4

यदि $h(x) = (2x - 3)^5$, $h(x) = (gof)\ (x)$ भए $f(x)$ र $g(x)$ का सम्भावित कतिओटा मानहरू हुन्छन् ? कुनै एउटा लेख्नुहोस्।

समाधान

दिइएको फलनका लागि $f(x)$ र $g(x)$ का फरक–फरक धेरै मानहरू लिन सकिन्छन् जसले $h(x) = (gof)\ (x) = (2x - 3)^5$ लाई सन्तुष्ट गर्दछ।

मानौँ, एउटा मान $f(x) = (2x - 3)$ र $g(x) = x^5$ लिँदा,

$(gof)(x) = g(2x - 3) = (2x - 3)^5 = h(x)$ हुन्छ ।

अभ्यास 1.1.3

1. यदि $f = \{(1, 5), (2, 1), (3, 3), (5, 2)\}$ र $g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2), (5, 5)\}$ भए fog र gof लाई मिलान चित्रमा देखाई पत्ता लगाउनुहोस् :

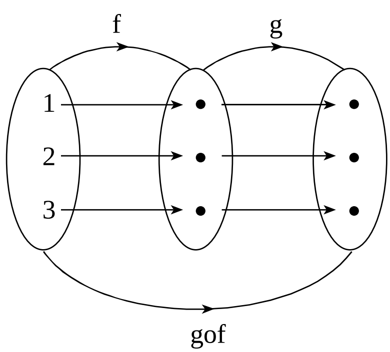
   जहाँ, $f : A \to A$ र $g : A \to A$ छन् । $A = \{1, 2, 3, 5\}$ छ ।

   [Ans: fog = {(1, 3), (2, 5), (3, 1), (5, 2)}; gof = {(1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)}]

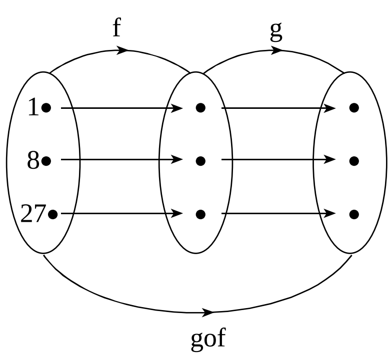
2. संयुक्त फलन fog र gof को परिभाषा मिलान चित्रसहित दिनुहोस् :

3. यदि $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ र $g = \{(3, 6), (4, 9), (5, 10)\}$ भए (gof) (3) र (gof) (2) पत्ता लगाउनुहोस् : [Ans: (3, 10), (2, 9)]

4. (a) $f(x) = x^2$ र $g(x) = 2x$ भए gof पत्ता लगाउनुहोस् :



   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ र $g(x) = x + 2$ भए gof पत्ता लगाउनुहोस् ।



   [Ans: (a) {(1, 2), (2, 8), (3, 18); (b) {(1, 3), (8, 4), (27, 5)}

5. f र g दुई वास्तविक मान भएका फलन हुन् । $f : R \to R$ र $g : R \to R$ छ ।

(a) $f(x) = 4x - 2$ र $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$. (fog) (1) र (gof) (2) कति हुन्छ ?

[Ans: 2, $\frac{1}{6}$]

(b) $f(x) = 2x$ र $g(x) = 3x + 4$ छ। (fog) (4) र (gof) (3) कति हुन्छ ? [Ans: 32, 22]

(c) $f(x) = x + 1$ र $g(x) = x - 2$ भए (fog) (2) र (gof) (3) को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: 1, 2]

6. यदि $f : R \rightarrow R$ र $g : R \rightarrow R$ का लागि

(a) $f(x) = 2x + 1$ र $g(x) = x^2 - 2$ भए (fog) (x) र (gof) (x) पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $2x^2 - 3$, $4x^2 + 4x - 1$]

(b) $f(x) = 2x + 1$ र $g(x) = x^2 - x + 1$ भए (fog) (x) र (gof) (x) पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $2x^2 - 2x + 3$, $4x^2 + 2x + 1$]

7. $h(x) = (2x + 3)^4$ र $h(x) = (fog)(x)$ भए f(x) र g(x) का सम्भावित मानहरूले लेख्नुहोस्।

8. यदि $f(x) = 4x + 5$, $((fof)og(x)) = 4x + 17$ र $(gof)(x) = 12$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: 12]

9. यदि $g(x) = 2x$, $(fog)(x) = 6x - 2$ र $(gof)(x) = 10$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $-\frac{7}{3}$]

10. एउटा रेफ्रिजेरेटरमा राखिएको खानामा ब्याक्टेरियाहरूको सङ्ख्या $N(x) = 20x^2 - 80x + 500$ $(2 \leq x \leq 14)$ को रूपमा व्यक्त गरिएको छ। जहाँ, x ले खानाको तापक्रमलाई जनाउँछ र $x(t) = 4t + 2$ $(0 \leq t \leq 3)$, जहाँ t ले घण्टामा समयलाई जनाउँछ।

(a) (Nox) (t) पत्ता लगाउनुहोस्।

(b) फ्रिजमा राखेको 2 घण्टामा उक्त खानामा कति ब्याक्टेरिया हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस्।

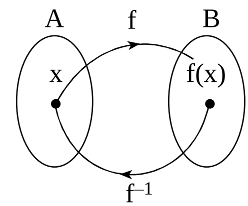
(c) खानामा कति घण्टामा 3300 ओटा ब्याक्टेरिया हुन्छन् ? पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: (a) $320t^2 + 420$; (b) 1700; (c) 3 hrs.]

1.1.4 विपरीत फलन (Inverse of a Function)

हामीलाई थाहा छ कि एउटा सम्बन्धको प्रत्येक क्रमजोडामा पहिलो सदस्य र दोस्रो सदस्यको क्रमलाई अदलबदल (Interchange) गरी बनेको सम्बन्धलाई विपरीत सम्बन्ध भनिन्छ। तर एउटा फलनको क्रमजोडालाई अदलबदल गर्दा आउने सम्बन्ध फलन हुन्छ कि हुँदैन ? छलफल गर्नुहोस्।

यदि $f : R \Rightarrow N$ मा $f = \{(1, 1), (2, 8), (3, 27)\}$ भए $g : N \Rightarrow N$ ले $g = \{(1, 1), (8, 2), (27, 3)\}$ दिन्छ भने f र g एकआपसमा विपरीत फलन हुन्छन्।



मानौँ, $f : A \rightarrow B$ एउटा एकएक (One to one) सम्पूर्ण (Onto) फलन हुनुपर्छ। जहाँ प्रत्येक $x \in A$ का लागि $y = f(x)$ परिभाषित छ। $g : B \rightarrow A$ मा $g(y) = x$ छ।

यस्तो अवस्थामा 'g' लाई 'f' को विपरीत फलन भन्दछन्।

जहाँ, $(fog)(x)$मा $x \in$ domain g

$(gof)(x)$मा $x \in$ domain f हुन्छ।

g लाई f^{-1} ले जनाउँदा

$(fof^{-1})(x) = (f^{-1}of)(x) = x$ हुन्छ।

मानौँ, $x \in A$ का लागि एक समान सदस्य (unique element) $y \in B$ छ। यदि $y = f(x)$ भए $x = f^{-1}(y)$ हुन फलन f एकएक सम्पूर्ण (One-one onto) फलन हुन्छ। f को विपरीतफलन f^{-1} अथवा f^{-1} को विपरीत फलन f हुन्छ।

उदाहरण 1

यदि $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$ एउटा एकएक सम्पूर्ण फलन भए f^{-1} पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

क्रम जोडाहरूको क्रम परिवर्तन गर्दा

$f^{-1} = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5)\}$ हुन्छ।

उदाहरण 2

तल दिइएका फलनहरू एकएक सम्पुर्ण (One-one onto) फलनहरू हुन्। तिनीहरूका विपरीत फलनहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(a) $f(x) = 2x + 1$ (b) $g(x) = \dfrac{x+2}{3}$ (c) $h = \{(x, 3x - 5)\}$

समाधान

(a) यहाँ, $f(x) = 2x + 1$

मानौँ, $y = f(x)$

अथवा, $f^{-1}(y) = x$ [$f(x) = y$]

यहाँ, $f(x) = 2x + 1$

$y = 2x + 1$

$\frac{y-1}{2} = x$

$\frac{y-1}{2} = f^{-1}(y)$

$\therefore \quad \frac{x-1}{2} = f^{-1}(x)$

(b) $g(x) = \frac{x+2}{3}$ [मानौँ, $y = g(x)$; $g^{-1}(y) = x$]

अथवा, $y = \frac{x+2}{3}$

अथवा, $3y = x + 2$

अथवा, $3y - 2 = g^{-1}(y)$

$\therefore \quad g^{-1}(x) = 3x - 2$

यहाँ, $h = \{(x, 3x - 5)\}$

अथवा, $h(x) = 3x - 5$ [मानौँ, $h(x) = y$; $x = h^{-1}(y)$]

अथवा, $y = 3x - 5$

अथवा, $\frac{y+5}{3} = h^{-1}(y)$

$\therefore \quad h^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

उदाहरण 3

यदि $f : R \rightarrow R : f(x) = 4x - 3$, $g : R \rightarrow R : g(x) = \frac{x+2}{5}$ भए $(f^{-1} \circ g^{-1})$, (2) को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 4x - 3$

मानौँ, $y_1 = 4x - 3$

अथवा, $y_1 + 3 = 4x$

अथवा, $\frac{y_1 + 3}{4} = x$

अथवा, $\frac{y_1 + 3}{4} = f^{-1}(y_1)$

अथवा, $\frac{x + 3}{4} = f^{-1}(x)$

फेरि, $g(x) = \frac{x + 2}{5}$

अथवा, $y_2 = \frac{x + 2}{5}$

अथवा, $5y_2 = x + 2$

अथवा, $5y_2 - 2 = x$

अथवा, $5x - 2 = g^{-1}(y_2)$

अथवा, $5x - 2 = g^{-1}(x)$

यहाँ, $(f^{-1} \text{ o } g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{1}(2))$

$= f^{-1}(5 \times 2 - 2)$

$= f^{-1}(8)$

$= \frac{8 + 3}{4} = \frac{11}{4}$

उदाहरण 4

यदि $f(x) = 2x - 7$, $g(x) = \frac{x + 2}{3}$ र $(fog)(x) = g^{-1}(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x - 7$

$g(x) = \frac{x + 2}{3}$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f\left(\frac{x + 2}{3}\right)$

$= 2\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 7$

$= \frac{2x + 4}{3} - 7$

$$= \frac{2x + 4 - 21}{3}$$

$$= \frac{2x - 17}{3}$$

$g(x) = \frac{x + 2}{3}$ [मानौँ, $g(x) = y$]

अथवा, $y = \frac{x + 2}{3}$

अथवा, $3y = x + 2$

अथवा, $3y - 2 = x$

अथवा, $3y - 2 = g^{-1} (y)$

अथवा, $3x - 2 = g^{-1}$ 9x)

अब, $(fog) (x) = g^{-1} (x)$

$\frac{2x - 17}{3} = 3x - 2$

अथवा, $2x - 17 = 9x - 6$

अथवा, $- 17 + 6 = 9x - 2x$

अथवा, $- 11 = 7x$

अथवा, $\frac{-11}{7} = x$

$\therefore \quad x = \frac{-11}{7}$

अभ्यास 1.1.4

1. परिभाषा लेख्नुहोस् :

(a) विपरीत फलन (Inverse function)

(b) $(fog) (x) = (gof) (x) = x$, f र g को सम्बन्ध

(c) एकएक सम्पूर्ण फलन (One-one onto function)

2. तल दिइएका फलनहरू एकएक सम्पुर्ण फलनहरू हुन् । ती फलनहरूका विपरीतफलन पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $f = \{(3, 2), (1, 5), (5, 1), (7, 4), (9, 5)\}$ [Ans: $\{(2, 3), (5, 1), (1, 5), (4, 7), (5, 9)\}$]

(b) $f = \{(7, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ [Ans: $\{(1, 7), (2, 2), (3, 3)\}$]

(c) $g = \{(-1, -2), (-3, -2), (-3, -4)\}$ [Ans: $\{(-2, -1), (-2, -3), (-4, -3)\}$]

तल दिइएका फलनहरूको विपरीत फलन पत्ता लगाउनुहोस् । प्रत्येक फलन एकएक सम्पुर्ण फलन हुन् ।

3. (a) $f(x) = x - 1$ [Ans: $x + 1 = f^{-1}(x)$]

   (b) $g(x) = 2x + 1$ [Ans: $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$]

   (c) $g(x) = 2x + 3$ [Ans: $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$]

4. (a) $f : x \rightarrow 5x$ [Ans: $f^{-1}\ x \rightarrow x/5$]

   (b) $g : x \rightarrow 3x + 4$ [Ans: $g^{-1} : x \rightarrow \frac{x-4}{3}$]

   (c) $f(x) = \frac{4x-3}{5}$ [Ans: $f^{-1}(x) = \frac{5x+3}{4}$]

   (d) $f(x) = 25 - x^2, x \geq 0$ [Ans: $f^{-1}(x) = \sqrt{25 - x}$]

5. $f : R \rightarrow R$ र $g : R \rightarrow R - \{0\}$ दुई एकएक सम्पूर्ण फलनहरू हुन् । यदि $f(x) = x + 1$ र $g(x) = \frac{3-x}{x}$ $(x \neq 0)$ दिइएको छ भने $(f^{-1} \text{ o } g^{-1})$ (2) को मान पत्ता लगाउनुहोस् । *[Ans: 0]*

6. यदि $g(x) = \frac{1}{3x}$ $(x \neq 0)$ भए (gog^{-1}) (4) र $(g^{-1}og)$ (4) को मान पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ g एउटा एक एक सम्पूर्ण फलन छ । *[Ans: 4 each]*

7. यदि $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ र $g(x) = x^3$ भए पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $(f^{-1} \text{ o } g^{-1})$ (1) (b) $(g^{-1} \text{ o } f^{-1})$ (-2) (c) $(f^{-1} \text{ o } f^{-1})$ (6)

   (d) $(gof)^{-1}$ (-8) [Ans: (a) 32 (b) 2 (c) 600 (d) $-2\sqrt[3]{5}$]

8. यदि f र g दुई एकएक सम्पुर्ण फलन हुन र $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = \frac{2x-7}{3}$ र $(fof)(x) = g^{-1}(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् । *[Ans: 5]*

9. f र g दुई एकएक सम्पुर्ण फलन हुन् । यदि $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{2x+4}{3}$ र $(gof^{-1})(x) = (fog^{-1})(x)$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् । *[Ans: 2]*

10. यदि एउटा एकएक सम्पुर्ण फलन f का लागि $f(x) = 3x + a$ र $(fof)(6) = 10$ भए a र $f^{-1}(4)$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् । *[Ans: – 11, 5]*

11. f र g दूई एकएक सम्पुर्ण फलन हुन् । $f(x) = \frac{x+3}{2}$ र $g(x) = 2x - 3$ भए $(f^{-1}orf)(x) = (fog)(x)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

12. f र g दुई एकएक सम्पूर्ण फलन हुन् । यदि $f(x) = 2x + 5$ र $g(x) = 3 - 2x$ भए $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1} o f^{-1})(x)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

13. संयुक्त फलन र विपरीत फलनको सम्बन्धबाट विपरीत फलन हुन्छ भनी उदाहरणसहित पुस्टी गर्नुहोस् ।

1.2 बहुपदीयहरू (Polynomials)

पुनरावलोकन (Review)

बहुपदीय भनेको के हो ? परिभाषा दिनुहोस् ।

यदि $f(x) = x^2 + 2x + 1$ र $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 7$ भए f(x) र g(x) का बिचमा हुने सम्भावित गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ र गुणन गर्नुहोस् ।

1.2.1 बहुपदीयहरूको भाग (Division of Polynomials)

मानौँ, f(x), d(x), q(x) र r(x) बहुपदीयहरू हुन्, जहाँ $d(x) \neq 0$ र d(x) को डिग्री f(x) को भन्दा कम छ । यिनीहरू बिचको सम्बन्ध $f(x) = d(x) \times q(x) + r(x)$ ले परिभाषित छ । यसलाई $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$ पनि लेख्न सकिन्छ । यसलाई बहुपदीयहरूको भागको नियम (division algorithm) भनिन्छ । $r(x) = 0$ भएमा $\frac{f(x)}{d(x)} = q(x)$ हुन्छ । जहाँ f(x) लाई भाज्य (dividend), d(x) लाई भाजक (divisor), q(x) लाई भागफल र r(x) लाई शेष (remainder) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

भाग गर्नुहोस् : f(x), d(x), q(x) र r(x) को सम्बन्धमा लेख्नुहोस् ।

$$\mathbf{x^4 + x^2 + 1 \div x^2 - x + 1}$$

समाधान

$$
\begin{array}{l|l|l}
x^2 - x + 1) & x^4 + x^2 + 1 & (x^2 + x + 1 \\
 & x^4 - x^3 + x^2 & \\
 & (-)\ (+)\ (-) & \\
\hline
 & x^3 + 1 & \\
 & x^3 - x^2 + x & \\
 & (-)\ (+)\ (-) & \\
\hline
 & x^2 - x + 1 & \\
 & x^2 - x + 1 & \\
 & (-)\ (+)\ (-) & \\
\hline
 & 0 & \\
\end{array}
$$

यहाँ, $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

$d(x) = x^2 - x + 1$

$q(x) = x^2 + x + 1$

$r(x) = 0$

$f(x) = d(x) . q(x) + r(x)$

$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) + 0$

उदाहरण 2

भागफल $q(x)$, शेषः $r(x)$ र भाजक $d(x)$ क्रमशः $4x + 5$, 7 र $(x - 1)$ छन्। बहुपदीय $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $q(x) = 4x + 5$, $r(x) = 7$ र $d(x) = x - 1$, $f(x) = ¿$

हामीलाई थाहा छ,

$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x)$

अथवा, $f(x) = (x - 1) \times (4x + 5) + 7$

$= 4x^2 + 5x - 4x - 5 + 7$

$= 4x^2 + x + 2$

अभ्यास 1.2.1

1. बहुपदीय $P(x)$ लाई $d(x)$ ले भाग गर्दा भागफल $q(x)$ र शेष $r(x)$ भए $f(x)$ लाई $d(x)$, $q(x)$ र $r(x)$ को पदमा व्यक्त गर्नुहोस्।

2. भाग गर्नुहोस् (Divide):

   (a) $x^2 - 1 \div x - 1$ [Ans: $x + 1$]

   (b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \div (x + 1)$ [Ans: $x^2 - x + 1$]

   (c) $x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 5 \div x^2$ [Ans: $(x^2 + x + 1) + \frac{2x + 5}{x^2}$]

   (d) $24x^3 + 61x^2 - 14x - 16 \div 3x + 8$ [Ans: $8x^2 - x - 2$]

   (e) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ by $x - 1$ [Ans: $x^2 + 5x + 6$]

3. $f(x)$ ले बहुपदीय $q(x)$ ले भागफल, $d(x)$ ले भाजक र $r(x)$ ले शेषलाई जनाउँछ भने $f(x) = d(x) \times q(x) + r(x)$ सम्बन्धबाट $f(x)$ पत्ता लगाउनुहोस्।

   (a) $q(x) = 2x + 3$, $r(x) = 4 - x$, $d(x) = x^2 + 1$ [Ans: $2x^3 + 3x^2 + x + 7$]

   (b) $q(x) = 4x^2 + x + 6$, $d(x) = 2x^2 - 3$ र $q(x) = 0$ [Ans: $8x^4 + 2x^3 - 3x - 18$]

(c) $q(x) = x^2 - 2$, $q(x) = 3x^2 - 2$, $r(x) = -24$ [Ans: $3x^4 - 8x^2 - 20$]

4. एउटा बहुदीय f(x) लेख्नुहोस् । उक्त f(x) लाई d(x) ले भाग गर्दा शेष आउने र नआउने अवस्थाहरू देखाउने उदाहरण दिनुहोस् ।

1.2.2 सङ्क्षिप्त भाग विधि (Synthetic Division)

मानौँ, बहुपदीय $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ छ । उक्त बहुपदीयलाई पहिलो डिग्रीको बहुपदीय $(x - c)$ ले भाग गर्छ भने भागको संरचनालाई गुणाङ्कका आधारमा गरिने भाग नै सङ्क्षिप्त भाग हो । उदाहरणका लागि

$x^3 - 1 \div x - 1$

$x^3 - 1 = 1.x^3 + 0.x^2 + 0.x - 1$ ...(1)

$x - 1$ एक पहिलो डिग्रीको बहुपदीय हो ।

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\boxed{\begin{array}{c} 1 \times 1 = 1 \\ 2 \times 0 = 0 \\ 1 \times 1 = 1 \end{array}}
$$

चरणहरू

1. भाजकमा भएको अचर चिह्न (c) (x – c) मा भएकोलाई सुरुमा राख्ने

2. भाज्यका पदका गुनाङ्कहरूलाई चल राशीको घाताङ्कको घट्दोक्रममा राख्ने । जुन पद छैन, त्यसको गुणाङ्क '0' राख्ने

3. Leading coefficient लाई सिधै तल राख्ने (जस्तै x^3 को)

   Leading coeffient लाई 'c' ले गुणन गर्दा आएको मान दोस्रो लहरमा गुणाङ्कको तल लेख्ने र त्यसलाई दोस्रो गुणाङ्कसँग जोडेर तेस्रो लाइनमा (लहर) मा राख्ने । यही प्रक्रिया दोहोऱ्याउने

   तेस्रो लाइन (लहरको) अन्तिम जोडफल नै शेष हुन्छ ।

नोटः यदि भाजक (divisor) $(ax \pm b)$ भए यसलाई $a\left(x \pm \frac{b}{a}\right)$ लेख्न सकिन्छ । त्यस्तो अवस्थामा $c = \pm\frac{b}{a}$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

सङ्क्षिप्त विधिबाट भाग गर्नुहोस् :

$\mathbf{x^3 - 3x + 10 \div x + 1}$

समाधान

यहाँ, $f(x) = 1 \,.\, x^3 + (-3)\, x + 0x^2 + 10$

$d(x) = x + 1 = x - (-1)$

सङ्क्षिप्त भाग विधिमा राख्दा

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 0 & 10 \\ & \downarrow & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 6 \end{array}$$

यहाँ, $q(x) = x^2 - 4x + 4$

$r(x) = 6$

जाँच गर्दाः $(x^2 - 4x + 4)\,(x + 1) + 6$

$= x^3 - 4x^2 + 4x + x^2 - 4x + 4 + 6$

$= x^3 - 3x^2 + 10$

$= f(x)$

उदाहरण 2

सङ्क्षिप्त विधिबाट भाग गर्नुहोस् :

$4x^4 - 3x^2 + 7x + 8 \div 2x + 3$

समाधान

यहाँ, $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 7x + 8$

$= 4x^4 + 0.x^3 + (-3)x^2 + 7x + 8$ [घट्दो क्रममा लेख्दा]

$d(x) = 2x + 3 = 2x - 2 \times \left(\frac{-3}{2}\right) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$

[$d(x)$ लाई $x - c$ को स्वरूपमा लेख्दा]

सङ्क्षिप्त भाग विधिको स्वरूपमा लेख्दा

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{3}{2} & 4 & 0 & -3 & 7 & 8 \\ & \downarrow & -6 & 9 & -9 & 3 \\ \hline & 4 & -6 & 6 & -2 & 11 \end{array}$$

यहाँ, $q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x - 2$

$r(x) = 11$

- $4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$
- $(-6) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 9$
- $6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$
- $(-2) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$

अभ्यास 1.2.2

सङ्क्षिप्त भाग विधिबाट भागफल र शेष पत्ता लगाउनुहोस्।

1. (a) $x^3 + 8 \div 8\ x + 2$ [$x^2 - 2x + 4, 0$]

   (b) $2x^4 + 7x^3 + x - 12 \div (x + 3)$ [$2x^2 + x - 2, - 6$]

   (c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \div (x - 2)$ [Ans: $x^2 - 4 + 3, 0$]

2. (a) $8x^3 + 4x^2 + 6x - 7 \div (2x - 1)$ [Ans: $8x^2 + 8x + 10, - 2$]

   (b) $8x^3 - 27 \div (2x - 3)$ [Ans: $4x^2 + 6x + 9, 0$]

   (c) $(4x^4 - 3x^2 + 7x + 8) \div (2x + 3)$ [Ans: $4x^3 - 6x^2 + 6x - 2, 11$]

1.2.3 शेष साध्य (Remainder Theorem)

यदि $P(x)$, $D(x)$, $Q(x)$ र $R(x)$ ले क्रमशः भाज्य, भाजक, भागफल र शेषलाई जनाउँछन् भने भागफल विधिबाट $P(x) = D(x) . Q(x) + R(x)$ हुन्छ ?

यदि n डिग्रि भएको बहुपदीय $P(x)$ $(n > 0)$ लाई $(x - c)$ ले भाग गर्दा शेष $p(c)$ र भागफल, $Q(x)$ को डिग्रि $(n - 1)$ हुन्छ।

यस साध्यलाई शेषसाध्य (Remainder Theorem) भन्दछन्।

भाजक (Divisor)	**शेष (Remainder)**
$x - a$	$p(a)$
$x + a$	$p(- a)$
$ax + b$	$p(- b/a)$
$ax - b$	$P(b/a)$

उदाहरण 1

तल दिइएको प्रत्येक अवस्थामा शेष साध्य प्रयोग गरी शेष पत्ता लगाउनुहोस्।

(a) $x^3 - x^2 + 1 \div x - 1$

(b) $x^3 + 9 \div x + 2$

(c) $4x^2 + 6x + 8 \div 2x - 1$

(d) $6x^3 - 4x^2 + 3x + 4 \div 3x + 4$

समाधान

(a) यहाँ $p(x) = x^3 - x^2 + 1$

$d(x) = x - 1$

शेष साध्यअनुसार,

शेष $= p(1) = 1^3 - 1^2 + 1 = 1 - 1 + 1 = 0$

(b) यहाँ, $p(x) = x^3 + 9$

$d(x) = x + 2 = x - (-2)$

शेष साध्यअनुसार,

शेष $= p(-2) = (-2)^3 + 9 = -8 + 9 = 1$

(c) यहाँ, $p(x) = 4x^2 + 6x + 8$

$d(x) = 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$

शेष $= p\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 8$

$= 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 8$

$= 1 - 3 + 8$

$= 6$

(d) यहाँ, $p(x) = 6x^3 - 4x^2 + 3x + 4$

$d(x) = 3x + 4 = 3\left(x - \left(-\frac{4}{3}\right)\right)$

शेषः $= p\left(-\frac{4}{3}\right) = 6\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 4$

$= 6 \times \left(-\frac{64}{27}\right) + 4 \times \left(\frac{16}{9}\right) - 4 + 4$

$= -\frac{128}{9} + \frac{64}{9} = \frac{-64}{9}$

उदाहरण 2

यदि बहुपदीय $x^4 + 5x^3 - kx^2 + 7x + 10$ लाई $(x + 1)$ ले भाग गर्दा शेष 12 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधानः

यहाँ, $f(x) = x^4 + 5x^3 - kx^2 + 7x + 10$

$d(x) = x + 1 = (x - (-1))$

शेष साध्यअनुसार, शेष $= f(-1)$

$f(-1) = (-1)^4 + 5(-1)^3 - k(-1)^2 + 7(-1) + 10$

अथवा, $12 = 1 - 5 - k - 7 + 10$

अथवा, $12 = -k - 1$

अथवा, $k = -1-12$

अथवा, $k = -13$

उदाहरण 3

यदि $2x^2 - 5x + a$ र $x^3 - x^2 + ax + 5$ दुवैलाई $(x + 2)$ ले भाग गर्दा बराबर शेष आउँछ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $f_1(x) = 2x^2 - 5x + a$

$d(x) = x + 2 = x - (-2)$

शेष $f_1(-2) = 2 \times (-2)^2 - 5(-2) + a$

$= 2 \times 4 + 10 + a$

$= a + 18$

$f_2(x) = x^3 - x^2 + ax + 5$

$d(x) = x + 2 = x - (-2)$

शेष $= f_2(-2)$

$= (-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + 5$

$= -8 - 4 - 2a + 5$

$= -7 - 2a$

प्रश्नअनुसार

$a + 18 = -7 - 2a$

अथवा, $a + 2a = -7 - 18$

अथवा, $3a = -25$

अथवा, $a = \frac{-25}{3}$

अभ्यास 1.2.3

1. शेषसाध्यको कथन लेख्नुहोस्।

तल दिइएको अवस्थामा शेष साध्य प्रयोग गरी शेष पत्ता लगाउनुहोस्।

2. (a) $4x^3 + 7x^2 - 3x + 2 \div x + 2$ [Ans: 4]

   (b) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 3 \div x - 2$ [Ans: 5]

   (c) $2x^3 - 7x^2 + 5x + 4 \div x - 3$ [Ans: 10]

   (d) $(x^4 + 15x + 1) \div (x + 1)$ [Ans: – 13]

3. (a) $4x^4 + x^3 + 20 \div (2x - 1)$ [Ans: 81/4]

   (b) $(9x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4) \div (3x + 2)$ [Ans: 4]

   (c) $(4y^3 - 3y^2 + 2y - 4) \div \left(y + \frac{1}{2}\right)$ [Ans: $-\frac{25}{4}$]

4. यदि $x^3 + 3x^2 + ax + 4$ लाई $(x - 2)$ ले भाग गर्दा शेष 4 रहन्छ भने a को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 10]

5. यदि $kx^3 - 9x^2 + 4x - 8$ लाई $(x + 3)$ ले भाग गर्दा शेष – 20 रहन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: – 3]

6. $px^4 + 3x^2 + 6$ लाई $(x - 2)$ ले भाग गर्दा आउने शेष $2x^2 + 17x + p$ लाई $(x - 2)$ ले भाग गर्दा आउने शेषको दुई गुणा भए p को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: $\frac{27}{7}$]

1.2.4 गुणनखण्ड साध्य (Factor Theorem)

$x^3 - 27$ लाई $x - 3$, $x + 3$ र $x^2 - 9$ मध्ये कसले निशेष भाग जान्छ ? छलफल गर्नुहोस्।

कुनै n डिग्रीको बहुपदीय f(x) का लागि यदि f(a) = 0 हुन्छ भने (x – c) उक्त बहुपदीयको गुणनखण्ड हुन्छ। यसलाई गुणनखण्ड साध्य भन्दछन्।

$$f(x) = q(x) \times d(x)$$
$$= q(x) \times (x - c)$$

x = c राख्दा

$$f(c) = q(c) \times 0$$
$$f(c) = 0$$

उदाहरण 1

गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग गरी $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ को गुणनखण्ड $(x - 2)$ हो/होइन यकिन गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

$x - c = x - 2$

अथवा, $c = 2$

प्रश्नअनुसार, गुणन साध्यको प्रयोग गर्दा

$f(c) = 0$

अथवा, $2c^3 + 3c^2 - 11c - 6$

$= 2 \times (2)^3 + 3(2)^2 - 11 \times 2 - 6$

$= 2 \times 8 + 3 \times 4 - 22 - 6$

$= 16 + 12 - 28$

$= 28 - 28$

$= 0$

$\therefore$ $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ को गुणनखण्ड $(x - 2)$ हो।

उदाहरण 2

यदि बहुपदीय $4x^2 + mx + 8$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 2)$ भए m को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $f(x) = 4x^2 + mx + 8$

$(x - c) = (x + 2)$

अथवा, $c = -2$

गुणनखण्ड साध्यअनुसार,

$f(c) = 0$

अथवा, $4(-2)^2 + m(-2) + 8 = 0$

अथवा, $4 \times 4 - 2m + 8 = 0$

अथवा, $16 - 2m + 8 = 0$

अथवा, $24 = 2m$

अथवा, $\frac{24}{2} = m$

अथवा, $12 = m$

$\therefore \quad m = 12$

अभ्यास 1.2.4

1. (a) गुणनखण्ड साध्यको कथन लेख्नुहोस्।

   (b) $f(x) = (x - a)(qx) + r(x)$ मा $(x - a)$, $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड भए $r(x)$ कति हुन्छ ?

2. तल दिइएका फलनहरू $f(x)$ र $d(x)$ मध्ये $f(x)$ को गुणनखण्ड $d(x)$ हो/होइन, गुणनखण्ड साध्य प्रयोग गरी यकिन गर्नुहोस्।

   (a) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 10x - 24$, $d(x) = x - 2$ [Ans: Yes]

   (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 18$, $d(x) = x + 3$ [Ans: Yes]

   (c) $g(x) = 4x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 11x + 5$, $d(x) = 4x + 5$ [Ans: Yes]

   (d) $g(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 7)(x + 8) - 16$, $d(x) = x + 6$ [Ans: Yes]

   (e) $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$, $d(x) = x - 1$ [Ans: No]

   (f) $g(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3) - 120$, $d(x) = x - 4$ [Ans: No]

3. यदि $x^3 - kx^2 + 3x + 6$ को एउटा गुणनखण्ड $(x + 1)$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 4]

4. यदि $x^3 + kx^2 + 2x - 6$ को एउटा गुणनखण्ड $x + k$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: – 3]

5. यदि $2x^3 - 7kx + (k - 12)$ को एउटा गुणनखण्ड $x - 5$ भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 7]

6. बहुपदीय $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ मा कति जोड्दा उक्त बहुपदीयको गुणनखण्ड $(x - 3)$ हुन्छ। [Ans: – 2]

7. $8x^3 - 2x^2 - 5x$ बाट कति घटाउँदा उक्त बहुपदीयको एउटा गुणनखण्ड $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ हुन्छ ? [Ans: 3]

1.2.5 शेष साध्य र गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग (Use fo the remainder theorem and factor theorem)

शेष साध्य र गुणनखण्ड साध्यको प्रयोग खण्डीकरण गर्न र समीकरण हल गर्न प्रयोग गरिन्छ।

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् : $3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$

उत्तरः मानौँ, $f(x) = 3x^3 - 19x^2 + 32x - 16$

-16 का सम्भावित गुणनखण्डहरू $= \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$

$x = 1$ राख्दा, $f(1) = 3 \times 1^3 - 19 \times 1^2 + 32 \times 1 - 16$

$= 3 - 19 + 32 - 16$

$= 0$

त्यसैले $(x - 1)$, $f(x)$ को एउटा गुणनखण्ड हो।

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -19 & 32 & -16 \\ & & 3 & -16 & 16 \\ \hline & 3 & -16 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore \quad f(x) = (x - 1)(3x^2 - 16x + 16)$

$= (x - 1)(3x^2 - 12x - 4x + 16)$

$= (x - 1)\{3x(x - 4) - 4(x - 4)\}$

$= (x - 1)(x - 4)(3x - 4)$

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् : $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

समाधान

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

12 का सम्भावित खण्डहरू $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$x = 1$ राख्दा, $f(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 12$

$= 1 - 3 - 4 + 12$

$\neq 0$

$x = 2$ राख्दा, $f(2) = (2)^3 - 3 \times (2)^2 - 4 \times 2 + 12$

$= 8 - 3 \times 4 - 8 + 12$

$= 0$

$\therefore$ (x – 2), f(x) को गुणनखण्ड हो।

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & -4 & 12 \\ & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore$ $f(x) = (x-2)(x^2 - x - 6)$

$f(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2x - 6)$

$= (x-2)\{x(x-3) + 2(x-3)\}$

$= (x-2)(x-3)(x+2)$

अब, $f(x) = 0$

अथवा, $(x-2)(x-3)(x+2) = 0$

अथवा, $(x-2) = 0, (x-3) = 0, (x+2) = 0$

अथवा, $x = 2, 3, -2$

अभ्यास 1.2.5

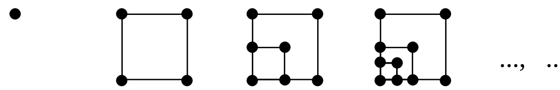
खण्डीकरण गर्नुहोस् :

1. $x^3 - 6x + 11x - 6$ [Ans: (x – 1) (x – 2) (x – 3)]
2. $x^3 - 4x^2 - x + 4$ [Ans: (x – 1) (x + 1) (x – 4)]
3. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ [Ans: (x – 1) (x – 1) (x – 2)]
4. $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ [Ans: (x – 1) (x – 1) (x – 2)]
5. $(x-1)(2x^2 + 15x + 15) - 21$ [Ans: (x + 2) (x + 6) (2x – 3)]
6. **हल गर्नुहोस्।**
   (a) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ [Ans: {– 2, 1, 5}]
   (b) $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$ [Ans: $\{2, -2, -\frac{1}{2}\}$]
   (c) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 = 0$ [Ans: $\{1, 2, -\frac{3}{2}\}$]
   (d) $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ [Ans: {2, – 2, 4}]
   (e) $x^3 - 19x - 30 = 0$ [Ans: {(5, – 3, – 2}]
   (f) $(x+1)(x^2 - 5x + 10) - 12 = 0$ [Ans: {1, 1, 2}]
   (g) $(y-3)(y^2 - 5y + 8) - 4y(y-3) = 0$ [Ans: {1, 3, 4}]
7. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ का मुलहरू – 3, 2, 1, 2 हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

1.3 अनुक्रम र श्रेणी (Sequence and Series)

2, 4, 3,5, 4, ... अनुक्रममा पहिलो पदभन्दा दोस्रो पद 2 ले र दोस्रो पद भन्दा तेस्रो पद 1 ले कम छ । त्यस्तै, तेस्रो पदभन्दा चौथो पद 2 ले बढी र चौथोभन्दा पाँचौँ 1 ले कम छ । यस्तैगरी उक्त अनुक्रम अघि बढ्छ ।

तर, 2, 4, 6, 8, 10, ... मा प्रत्येकको पछिल्लो पद अघिल्लो पद भन्दा 2 ले बढ्दै गएको पाइन्छ । यो अनुक्रमलाई समानान्तरीय अनुक्रम भन्दछन् ।



1, 4, 7, 10, ...,

यो चित्रमा थोप्लाहरू 3 का दरले बढ्दै छन् । अन्य दुईओटा थप संरचनाहरू के के होलान् ? चित्रद्वारा प्रस्ट पार्नुहोस् ।

कुनै निश्चित नियममा आधारित सङ्ख्याहरूको समूहलाई अनुक्रम भनिन्छ । अनुक्रमका पदहरूलाई योगफालका रूपमा व्यक्त गरिएमा त्यसलाई उक्त अनुक्रमसँग सम्बन्धित श्रेणी भनिन्छ ।

$t_1, t_2, t_3, t_4, ..., ..., t_n$ एउटा n पदहरू भएको अनुक्रम हो भने $t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ उक्त अनुक्रमको श्रेणी हो ।

1.3.1 समानान्तरीय अनुक्रम (Arithmetic Sequence/Progression)

यदि कुनै अनुक्रमको प्रत्येक पद अघिल्लो पद भन्दा कुनै निश्चित सङ्ख्याले बढीरहेको वा घटिरहेको छ भने त्यस्तो अनुक्रमलाई समानान्तरीय अनुक्रम भनिन्छ । उक्त निश्चित फरकलाई समान अन्तर भनिन्छ ।

साधारण पद (General Term)

$t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n$ एउटा समानान्तरीय अनुक्रम भए समान अन्तर (d) $= t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = ... = t_n - t_{n-1}$ हुन्छ । उक्त अनुक्रमको पहिलो पद 'a' र समानान्तर अन्तर 'd' भए थप पदहरू क्रमशः a + d, a + 2d, a + 3d, ... हुन्छन् ।

पहिलो	दोस्रो	तेस्रो		n औँ
a	a + d	a + 2d	....	a + (n – 1)d
+ d	+ d	+ d		

n औँ पद = a + (n – 1) d हुन्छ ।

समानान्तरीय मध्यमा (Arithmetic Mean)

समानान्तरीय अनुक्रमको n औँ पद $(t_n) = a + (n - 1) d$

दुईओटा सङ्ख्याहरू 'a' र 'b' का बिचमा पर्ने अङ्कगणितीय मध्यक 'AM' भए a, AM, b समानान्तरीय अनुक्रममा हुन्छन् ।

$AM - a = b - AM$

अथवा, $AM + AM = a + b$

अथवा, $2AM = a + b$

अथवा, $AM = \frac{a + b}{2}$ हुन्छ ।

यदि 'a' र 'b' का बिचमा 'n' ओटा समानान्तरीय मध्यमाहरू भए $a, m_1, m_2, m_3, m_4, ..., m_n, b$ ले समानान्तरीय अनुक्रम बनाउँछ र उक्त अनुक्रममा जम्मा $(n + 2)$ ओटा पदहरू हुन्छन् ।

यस्तो अवस्थामा,

$$\begin{aligned} b &= a + (n - 1) d \\ &= a + (n + 2 - 1)d \\ &= a + (n + 1) d \end{aligned}$$

अथवा, $\frac{b - a}{n + 1} = d$ हुन्छ भने मध्यमाहरू क्रमशः $a + d, a + 2d, a + 3d, ..., a + nd$ हुन्छन् ।

समानान्तरीय श्रेणीको योगफल (Sum of Arithmetic Series)

n ओटा पदहरूको योगफल

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + ... + (l - d) + l$ ...(i)

समीकरण (i) लाई विपरीत क्रममा राख्दा,

$.S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + ... + (a + 2d) \ (a + d) + a$ ...(ii)

समीकरण (i) र (ii) जोड्डा,

$2S_n = (a+l) + (a +l) + (a+l) + ...+ (a +l)$

अथवा, $2S_n = n$ पटक $(a + l)$

अथवा, $2S_n = n (a + l)$

$S_n = \frac{n}{2} (a + l)$ .... (iii)

हामीलाई थाहा छ,

अन्तिम पद, $(t_n) = l = a + (n - 1)d$ (iv)

समीकरण (iii) र (iv) बाट,

अथवा, $S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d]$

अथवा, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - d)]$

n ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल

$1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$

$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n - 1) \times 1]$

$= \frac{n}{2}[2 + n - 1] = n(n + 1)$ हुन्छ ।

n ओटा बिजोर सङ्ख्याहरूको योगफल

$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + (2n - 1)$

$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n - 1) \times 2]$

$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$ हुन्छ ।

n ओटा जोर सङ्ख्याहरूको योगफल

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + ... + 2n$

$= \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n - 1) \times 2]$

$= \frac{n}{2}[4 + 2n - 2] = \frac{n}{2}[2n + 2] = n(n + 1)$

समानान्तरीय अनुक्रममा पर्ने तीनओटा सङ्ख्याहरू क्रमशः $a - d, a, a + d$ र चारओटा $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$ हुन्छन् ।

उदाहरणहरू

1. एउटा अनुक्रमको n औँ पद 54 औँ पद भन्दा 132 ले बढी छ । उक्त अनुक्रमको पहिलो पद 3 र समान अन्तर 12 छ । n को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद (a) = 3

समान अन्तर (d) = 12

$t_n = t_{54} + 132$

n = ¿

हामीलाई थाहा छ,

$t_n = a + (n - 1)d$

$= 3 + (n - 1) \times 12$

$= 12n - 9$

$t_{54} = 12 \times 54 - 9$

$= 648 - 9$

$= 639$

फेरि, $t_n = t_{54} + 132$

अथवा, $12n - 9 = 639 + 132$

अथवा, $12n - 9 = 771$

अथवा, $12n = 771 + 9$

अथवा, $12n = 780$

अथवा, $n = \frac{780}{12} = 65$

त्यसैले, 65 औँ पद 54 औँ पद भन्दा 132 ले बढी छ।

2. 4 र 12 को बिचमा एउटा समानान्तरीय मध्यमा छ। उक्त समानान्तरीय मध्यकको मान कति हुन्छ ?

समाधान

मानौँ 4 र 12 को बिचमा समानान्तरीय मध्यमा 'k' छ। 4, k र 12 समानान्तरीय अनुक्रममा छन्।

हामीलाई थाहा छ,

$k - 4 = 12 - k$ [समान अन्तर भएकाले]

अथवा, $k + k = 12 + 4$

अथवा, $2k = 16$

अथवा, $k = 16 \div 2 = 8$

3. दिइएको अनुक्रम $a + 2b, a, a - b, a - 2b, ..., ..., ...,$ को पहिलो पद र समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद $= a + 2b$

समान अन्तर = दोस्रो पद − पहिलो पद

$= a + b - (a + 2b)$

$= a + b - a - 2b$

$= - b$

4. अनुक्रम 7, 11, 15, 19, 23, ..., ..., ... को n औँ पद र अठारौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, अनुक्रमको पहिलो पद (a) = 7

समान अन्तर (d) = पछिल्लो पद – ठिक अघिल्लो पद = 11 – 7 (15 – 11) = 4

हामीलाई थाहा ठिक छ,

n औँ पद (t_n) $= a + (n - 1)\, d$

$= 7 + (n - 1) . 4$

$= 7 + 4n - 4$

$= 4n + 3$

'n' को मान 18 राख्दा,

$t_{18} = 4 \times 18 + 3$

$= 72 + 3$

$= 75$

5. 2 र 53 को बिचमा 16 ओटा अङ्कगणितीय (समानान्तरीय) मध्यकहरू छन्। चौथो। पन्ध्रौँ मध्यक पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौँ, 16 ओटा मध्यकहरू $m_1, m_2, ..., m_{16}$ छन्।

उक्त अनुक्रम $2, m_1, m_2, ..., m_{16}, 53$ हुन्छ।

53 उक्त अनुक्रमको अठारौँ (t_{18}) पद हुन्छ।

अथवा, $t_{18} = 2 + (17)d$

अथवा, $53 = 2 + 17d$

अथवा, $53 - 2 = 17d$

अथवा, $\frac{51}{17} = d$

अथवा, $3 = d$

∴ चौथो मध्यक = पाँचौ पद,

$= a + (5 - 1)d$

$= a + 4d$

$= 2 + 4 \times 3$

$= 14$

पन्ध्रौँ मध्यक = सोह्रौँ पद

$= a + (16 - 1)d$

$= 2 + 15 \times 3$

$= 2 + 45$

$= 47$

6. **श्रेणी 1, + 3, + 5, + 7, +, ..., ... का 100 ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, पहिलो पद (a) = 1

समान अन्तर (d) = 3 – 1 = 2

पदहरूको सङ्ख्या (n) = 100

पदहरूको योगफल ($S_n = S_{100}$) = ¿

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d]$$

त्यसैले, $S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 1 + (100 - 1) \times 2]$

$= 50 [2 + 99 \times 2]$

$= 50 \times 200 = 10000$

7. **9 जना साथीहरूसँग भएको खाजा खाने खर्च समानान्तरीय श्रेणीमा छ । पहिलो साथीसँग रू. 120 छ र त्यसपछि प्रत्येकसँग रू. 5 को समान अन्तरमा रकम छ । 9 जनासँग भएको जम्मा रकम कति रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान

यहाँ, नौ जनासँग भएको खाजा खर्चको रकमले समानान्तरीय अनुक्रम बनाउँछ जुन निम्नअनुसार हुन्छ ।

$120 + t_2 + ... + t_9$

$t_2 - 120 = 5,$

अथवा, समान अन्तर (d) = रू. 5

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1) d]$$

$$S_9 = \frac{9}{2}[2 \times 120 + (9 - 1) \times 5]$$

$$= \frac{9}{2} \times (240 + 8 \times 5)$$

$$= \frac{9}{2} \times (240 + 40)$$

$$= \frac{9}{2} \times 280$$

$= 9 \times 140$

$= 1260$

त्यसैले, 9 जनासँग भएको जम्मा रकम रू. 1260 हुन्छ।

8. समानान्तरीय अनुक्रम 1, 4, 7, ..., ... का कतिओटा पदहरूको योगफल 715 हुन्छ। उक्त समस्या समाधान गर्दा 'n' का कतिओटा मानहरू आउँछन् र कुन मान्य छैन ? कारणसहित व्याख्या गर्नुहोस्।

समाधान

यहाँ, 1, 4, 7, ..., ... एउटा समानान्तरीय अनुक्रम हो। जसको पहिलो पद (a) = 1 र समान अन्तर (d) = 4 – 1 = 3 छ।

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

अथवा, $715 = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 3]$

अथवा, $715 = \frac{n}{2}[2 + 3n - 3]$

अथवा, $3n^2 - n = 1430$

अथवा, $3n^2 - n - 1430 = 0$

अथवा, $n = \frac{1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \times 3 \times (-1430)}}{2 \times 3}$

अथवा, $n = \frac{1 \pm \sqrt{1761}}{6}$

अथवा, $n = \frac{1 \pm 131}{6}$

अथवा, $n = \frac{1 + 131}{6}, \frac{-1 - 131}{6}$

अथवा, $n = 22, \frac{-65}{3}$

n को मान जहिले पनि पूर्ण सङ्ख्या हुन्छ। तसर्थ n को मान २२।

अभ्यास 1.3.1

1. (a) समानान्तरीय अनुक्रमको परिभाषा दिनुहोस्।

   (b) समानान्तरीय अनुक्रमको साधारण पद (t_n) र प्रथम N ओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउने सूत्र (S_n) लेख्नुहोस्।

   (c) a र b बिचमा पर्ने समानान्तरीय मध्यमा लेख्नुहोस्।

   (d) a र b बिचमा 'N' ओटा समानान्तरीय मध्यमाहरू छन्। a, b र N का पदमा समान अन्तर (d) लेख्नुहोस्।

2. (a) समानान्तरीय अनुक्रम 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31 को समान अन्तर र दसौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 4, 43]

   (b) 2, 4, 6, 8, 10 को समान अन्तर र एघारौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 2, 22]

   (c) 11 औँ पद 23 र 15औँ पद 3 भएको समानान्तरीय अनुक्रमको 21 औँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। के 40 उक्त अनुक्रमको कुनै पद होला ? कारण दिनुहोस्। [Ans: – 27, No]

   (d) समानान्तरीय अनुक्रम 2, 5, 8, ... को कुन पद 50 हुन्छ ? पत्ता लागाउनुहोस्। [Ans: 17]

   (e) एउटा समानान्तरीय अनुक्रमको चौथो पद प्रथम पदको तीन गुणा र सातौँ पद तेस्रो पदको दुई गुणा भन्दा 1 ले बढी छ। उक्त अनुक्रमको पहिलो पद र समान अन्तर पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 3, 12]

3. निम्नअनुसारका समानान्तरीय मध्यमाहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

   (a) 4 र 8 को बिचमा एउटा [Ans: 6]

   (b) a – b र a + b को बिचमा एउटा [Ans: a]

   (c) 5 र – 9 को बिचमा 6 ओटा [Ans: 3, 1, – 1, – 3, – 5, – 7]

   (d) 3 र 18 को बिचमा 4 ओटा [Ans: 6, 9, 12, 15]

   (e) 140 र – 60 को बिचमा 4 ओटा [Ans: 100, 60, 20, – 20]

   (f) 3 र 17 को बिचमा k ओटा समानान्तरीय मध्यमाहरू छन्। अन्तिम र पहिलो मध्यमाको अनुपात 3 : 1 छ। k को मान पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 6]

4. योगफल पत्ता लगाउनुहोस्।

   (a) $\sum_{n=4}^{7} (3n - 2)$ (b) $\sum_{n=2}^{6} (4n - 2)$

   (c) 1 + 2 + 3 + 4 + ..., 25 ओटा पदहरूसम्म [Ans: 325]

(d) $\frac{3}{5} + 1 + \frac{7}{5} + ...$, 20 ओटा पदहरूसम्म [Ans: 88]

(e) $72 + 70 + 68 + ... + 38$ [Ans: 990]

(f) $-8 + (-6) + (-4) + ... + 30$ [Ans: 220]

5. (a) पहिलो 60 ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 1830]

(b) पहिलो पद 16 र समान अन्तर 4 भएको समानान्तर श्रेणीको योगफल 120 छ भने उक्त श्रेणीमा पद सङ्ख्या निकाल्नुहोस् । [Ans: 5]

(c) एउटा समानान्तरीय श्रेणीमा भएको चौथो र आठौँ पदहरूको योगफल 24 तथा छैटौँ र दसौँ पदहरूको योगफल 34 भए उक्त श्रेणीको प्रथम चार पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

[Ans: $-\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 7$]

(d) समानान्तरीय अनुक्रमको प्रथम पद 2 र प्रथम पाँचओटा पदहरूको योगफल उक्त पाँचओटा पदहरूको योगफलको एक चौथाइ हुन्छ भने प्रथम तीनओटा पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: – 2550]

6. (a) एउटा कम्पनीले पहिलो वर्ष १०० ओटा रेडियो उत्पादन गर्दछ । उक्त कम्पनीले १० वर्षमा जम्मा १४५०० रेडियोहरू उत्पादन गर्दछ । यदि उत्पादनको वृद्धि प्रत्येक वर्ष बराबर भए पत्ता लगाउनुहोस् ।

(i) प्रत्येक उत्पादनमा हुने वृद्धि

(ii) पन्ध्रौँ वर्षमा उत्पादित रेडियोहरू [Ans: (i) 300 (ii) 4300]

(b) एउटा कक्षामा भएका विद्यार्थीहरूको उमेर समानान्तर अनुक्रममा छ । उनीहरूको उमेरको समान अन्तर 4 महिना छ । यदि सबै भन्दा कम उमेरको विद्यार्थी 8 वर्षको र उनीहरूको उमेरको योगफल 168 वर्ष भए सबैभन्दा बढी उमेरको विद्यार्थीको उमेर र सबै विद्यार्थीहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 13 years, 16]

1.3.2 गुणोत्तर अनुक्रम र श्रेणी (Geometric Sequence and Series)

2, 4, 8, 16, ..., ... मा $t_2 \div t_1 = 2$ र $t_3 \div t_2 = 2$ छ ।

27, 9, 3, 1, ... मा पदहरूको सम्बन्ध के छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

क्रमिक पदहरूको अनुपात एउटै हुने अनुक्रमलाई गुणोत्तरीय अनुक्रम भन्दछन् । $t_1, t_2, t_3, .., t_n$ एउटा गुणोत्तरीय अनुक्रम भए $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_2}{t_1} = ... \frac{t_n}{t_{n-1}}$ हुन्छ । उक्त अनुपातलाई समान अनुपात (Common difference) 'r' ले जनाइन्छ ।

गुणोत्तरीय अनुक्रमको साधारण पद (General Term of Geometric Series)

मानौँ, गुणोत्तरीय अनुक्रमको पहिलो पद (a) र समान अन्तर 'r' छ । उक्त अनुक्रम $a, ar^{2-1}, ar^{3-1}, ar^{4-1}, ..., ar^{n-1}$ द्वारा जनाइन्छ । त्यसैले उक्त अनुक्रमको n औँ पद $(t_n) = ar^{n-1}$ हुन्छ ।

उदाहरणका लागि, 1, 2, 4, ..., को पाँचौँ पद $= 1 \times 2^{5-1} = 1 \times 2^4 = 16$ हुन्छ । जहाँ, $a = 1$ र $r = \frac{2}{1} = 2$ छ ।

गुणोत्तर मध्यमा (Geometric Mean)

a र b को बिचमा एउटा गुणोत्तर मध्यमा GM भए a, GM, b गुणोत्तरीय अनुक्रममा हुन्छन् । जहाँ $\frac{GM}{a} = \frac{b}{GM}$

अथवा, $(GM)^2 = ab$

अथवा, $GM = \sqrt{ab}$ हुन्छ ।

a र b दुवै धनात्मक भए GM पनि धनात्मक र a र b दुवै ऋणात्मक भए GM पनि ऋणात्मक हुन्छ ।

उदाहरणका लागि

2 र 8 को $GM = \sqrt{2 \times 8} = 4$ र -2 र -8 को $GM = \sqrt{(-2) \times (-8)} = -4$ तर -2 र $+8$ को GM परिभाषित हुँदैन तर -2 र $+8$ सहित अन्य पदहरूको 'GP' हुन्छ ।

a र b को बिचमा 'N' ओटा गुणोत्तरीय मध्यमाहरू भए

$a, m_1, m_2, m_3, ..., m_n, b$ ले गुणोत्तरीय अनुक्रम बनाउँछ ।

जहाँ, (n + 2) ओटा पदहरू हुन्छन् ।

$b = a \times r^{(n+2-1)}$

अथवा, $\frac{b}{a} = r^{n+1}$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = r^{n+1 \times \frac{1}{n+1}}$$

अथवा, $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ हुन्छ ।

त्यसैले मध्यमाहरू क्रमशः $ar, ar^2, ar^3, ..., ar^n$ हुन्छन् ।

उदाहरणका लागि

81 र 3 को बिचमा 5 ओटा गुणोत्तरीय मध्यमाहरू भए

$$r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \left(\frac{3}{81}\right)^{\frac{1}{5+1}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \times \frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$m_1 = ar = 81 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 27\sqrt{3}$$

$$m_2 = ar^2 = 81 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 27$$

$$m_5 = ar^5 = 81 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 = 81 \times \frac{1}{9\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$ हुन्छ ।

समानान्तरीय र गुणोत्तरीय मध्यमाहरूको सम्बन्धः $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

अथवा, $AM \geq GM$ हुन्छ ।

$$AM - GM = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{\sqrt{2}} \geq 0$$

$\therefore \quad AM - GM \geq 0$

$AM \geq GM$ हुन्छ ।

गुणोत्तर श्रेणीको योगफल (Sum of Geometric Series)

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \quad ...(1)$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n \quad ...(2)$$

$$(-) \quad (-) \quad (-) \quad (-) \quad (-)$$

समी (1) बाट (2) घटाउँदा

$$rS_n - S_n = \frac{ar^n - n^a}{ar^n}$$

अथवा, $S_n(r - 1) = a(r^n - 1)$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

यदि $r < 1$ भएमा,

$$S_n = \frac{-a(1 - r^n)}{-(1 - r)} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$ हुन्छ ।

फेरि, $S_n = \dfrac{ar^n - a}{r - 1} = \dfrac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1} = \dfrac{lr - a}{r - 1}$

जहाँ, ℓ अनुक्रमको अन्तिम पद हो ।

उदाहरणका लागी

2, 4, 8, 16, ... को प्रथम पाँचओटा पदहरूको योगफल

$$= \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} \left[a = 2, r = \frac{4}{2} = 2, n = 5\right]$$

$$= 2(32 - 1) = 2 \times 31 = 62$$

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...$ का पाँचओटा पदहरूको योगफल

$$= \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} \left[a = 2, r = \frac{1}{2}, n = 5\right]$$

$$= \frac{2\left(1 - \frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{31}{32}\right) \times \frac{2}{1} = \frac{31}{8}$$

3 + 6 + 12 + 24 + ... + 96 को योगफल

$$= \frac{lr - a}{r - 1} \left[\ell = 96, r = \frac{6}{3} = 2\right]$$

$= \frac{96 \times 2 - 3}{2 - 1}$

$= 192 - 3 = 189$

गुणोत्तरीय अनुक्रममा कुनै तीनओटा पदहरू $\frac{a}{r}$, a, ar र चारओटा पदहरू $\frac{a}{r^3}$, $\frac{a}{r}$, ar, ar^3 लिँदा प्रभावकारी हुन्छ।

उदाहरण

अनुक्रम 7, 14, 28, .., को पाँचौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, पहिलो पद (a) = 7

समान अन्तर (r) = $\frac{14}{7} = 2$

पाँचौँ पद (t_5) = ¿

हामीलाई थाहा छ,

$t_n = ar^{n-1}$

$t_5 = 7 \times 2^{5-1} = 7 \times 2^4 = 7 \times 16 = 112$

अभ्यास 1.3.2

1. (a) गुणोत्त्तर अनुक्रमको परिभाषा लेख्नुहोस्।

   (b) यदि $t_n = ar^{n-1}$ ले गुणोत्तरीय अनुक्रमको साधारण पदलाई जनाउँछ भने a, r र n को अर्थ लेख्नुहोस्।

2. (a) गुणोत्तर अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 को सातौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 128]

   (b) 1, 4, 16, 64, ..., ... को छैटौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 1024]

   (c) 3, 6, 12, 24 को छैटौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 96]

   (d) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ..., 128 मा भएका जम्मा पदहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस्।

   [Hint: $128 = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$, n = 9]

   (e) समान अनुपात 3 भएको एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको तेस्रो पद 36 भए पाँचौँ पद पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: 324]

   (f) एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको तेस्रो र छैटौँ पद क्रमशः 12 र 96 छन् भने उक्त अनुक्रम पत्ता लगाउनुहोस्।

[Hint: $ar^2 = 12$, $ar^5 = 96$, $ar^5 \div ar^2 = 96 \div 12$, $r = 2$, $a = 3$; a, ar, ar, ar+2, ... = 3, 6, 12, 24, ...]

(g) एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको प्रथम पाँचओटा पदहरूको गुणनफल 32 भए उक्त अनुक्रमको तेस्रो पद पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 2]

[Hint: $a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times ar^4 = 32$]

(h) एउटा गुणोत्तर श्रेणीको सातौँ पद तेस्रो पदको एकासी गुणा छ र पाँचौँ पद 243 छ भने नवौँ पद कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 19683]

[Hint: $ar^6 = 81 \times ar^2$ ...(i), $ar^4 = 243$ ...(ii), a = 3]

(i) यदि एउटा गुणोत्तर अनुक्रमको तेस्रो पद 27 र पाँचौँ पद 3 भए कतिऔँ पद $\frac{1}{9}$ हुन्छ ?[Ans: 8]

[Hint: $ar^2 = 27$, $ar^{n-1} = \frac{1}{9}$, n = ¿, $ar^4 = 3$]

(j) गुणोत्तर अनुक्रमको दोस्रो पद र नवौँ पदको अनुपात 1 : 128 भए अनुक्रम पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 2, 6, 12, ...]

[Hint: $\frac{ar}{ar^8} = \frac{1}{128}$]

उदाहरणहरू

1. 9 र 16 को गुणोत्तर मध्यमा पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ (a) = 9 र (b) = 16

हामीलाई थाहा, छ,

गुणोत्तर मध्यमा $= \sqrt{ab}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

$= 12$

2. 8 र $\frac{1}{8}$ का बिचमा 5 ओटा गुणोत्तर मध्यमाहरू भर्नुहोला ।

समाधान

मानौँ मध्यमाहरू G_1, G_2, G_3, G_4 र G_5 छन ।

जम्मा मध्यमाहरूको सङ्ख्या (N) = 5

हामीलाई थाहा छ,

समान अनुपात (r) $= \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{N+1}}$

$= \left(\frac{\frac{1}{8}}{8}\right)^{\frac{1}{5+1}}$

$= \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{6}}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{6 \times \frac{1}{6}}$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore \quad G_1 = ar = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

$G_2 = G_1r = 4 \times \frac{1}{2} = 2$

$G_3 = G_2r = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$G_4 = G_3r = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$G_5 = G_4r = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

3. कुनै दुई सङ्ख्याहरूको अनुपात 1 : 16 छ। तिनिहरूको गुणोत्तर मध्यमा $\frac{1}{4}$ छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

यहाँ, $a : b = 1 : 16$

अथवा, $\frac{a}{b} = \frac{1}{16}$

अथवा, $16a = b$ ....(i)

फेरि, $GM = \frac{1}{4}$

अथवा, $(GM)^2 = \frac{1}{4}$

अथवा, $ab = \frac{1}{4}$

अथवा, $16a \times a = \frac{1}{4}$

अथवा, $16a^2 = \frac{1}{4}$

अथवा, $a^2 = \frac{1}{64}$

अथवा, $a = \sqrt{\frac{1}{64}}$ [GM धनात्मक भएकाले a र b पनि धनात्मक हुन्छन् ।]

अथवा, $a = \frac{1}{8}$

4. समानान्तरीय मध्यमा 25 र गुणोत्तर मध्यमा 20 हुने दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

मानौँ, दुई सङ्ख्याहरू a र b छन् ।

$AM = 25$

अथवा, $\frac{a+b}{2} = 25$

अथवा, $a + b = 50$ ....(i)

अथवा, $a = 50 - b$

$GM = 20$

अथवा, $\sqrt{ab} = 20$

अथवा, $ab = 400$ ....(ii)

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$= (50)^2 - 4 \times 400$

$= 2500 - 1600$

$= 900$

$a - b = \sqrt{900}$

$= 30$

$a - b = 30$ ....(iii)

समीकरण (i) र (iii) समाधान गर्दा,

$a + b = 50$ ....(i)

$\underline{a - b = 30}$ ....(iii)

$2a = 80$ [समीकरण (i) र (iii) जोड्दा]

अथवा, $a = 40$

a को मान समी (i) मा राख्दा

$40 + b = 50$

अथवा, $b = 50 - 40$

$= 10$

$\therefore$ आवश्यक सङ्ख्याहरू 50 र 10 छन् ।

अभ्यास 1.3.3

1. तल दिइएका दुई पदहरू बिच पर्ने गुणोत्तर मध्यमा निकाल्नुहोस् ।

(a) 2 र $\frac{1}{2}$ (b) 4 र 25

(c) 6 र 54 (d) $\frac{1}{2}$ र 32 [Ans: (a) 1, (b) 10, (c) 18, (d) 4]

2. गुणोत्तर मध्यमाहरू भर्नुहोस् ।

(a) 81 र 3 को बिचमा 5 ओटा [Ans: $27\sqrt{3}, 27, 9\sqrt{3}, 9, 3\sqrt{3}$]

(b) $\frac{1}{2}$ र 128 को बिचमा 3 ओटा [Ans: 2, 8, 32]

(c) $\frac{2}{3}$ र $-5\frac{1}{16}$ को बिचमा 4 ओटा [Ans: $-1, \frac{3}{2}, \frac{-9}{4}, \frac{27}{8}$]

(d) $3\frac{5}{9}$ र $40\frac{1}{2}$ को बिचमा छ ओटा [Ans: $\frac{16}{3}$, 8,1 2, 18, 27]

3. (a) यदि $4, x, y, -\frac{1}{16}$ एउटा गुणोत्तर अनुक्रम हो भने x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

[Ans: $-1, \frac{1}{4}$]

(b) $(x + 2)$ र $9(x + 2)$ को गुणोत्तर मध्यमा $x + 10$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

[Ans: 2, – 4]

4. (a) 5 र 405 को बिचमा पर्ने केही गुणोत्तर मध्यमाहरूको सङ्ख्या निकाल्नुहोस् जसको पहिलो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात 1 : 9 छ । [Ans: 3]

(b) पदहरू 4 र 128 का बिचमा भएका मध्यमाहरूको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ पहिलो र अन्तिम मध्यमाको अनुपात 1 : 8 छ । [4]

5. (a) कुनै दुई सङ्ख्याहरूको समान्तरीय मध्यमा 10 र गुणेत्तर मध्यमा 8 भए ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 4, 16]

(b) दुई सङ्ख्याहरूको समानन्तरीय मध्यमा 5 र गुणोत्तर मध्यमा 4 भए ती दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: – 8, 2 अथवा 2, 8]

उदाहरणहरू

1. योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) 1 + 3 + 9 + ... 7 ओटा पदहरू

(b) 3 + 6 + 12 + ... + 768

समाधान

(a) 1 + 3 + 9 + ... 7 ओटा पदहरू

यहाँ, पहिलो पद (a) = 1

समान अनुपात (r) = 3

जम्मा पदहरू (n) = 7

योगफल (s_n) = ¿

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

अथवा, $S_7 = \frac{1(3^7 - 1)}{3 - 1}$

$$= \frac{2187 - 1}{2}$$

$$= 1093$$

(b) यहाँ, पहिलो पद (a) = 3

समानअनुपात (r) = $\frac{6}{3} = 2$

अन्तिम पद (l) = 768

योगफल (S_n) = ¿

हामीलाई थाहा छ,

$$S_n = \frac{lr - a}{r - 1}$$

$$= \frac{768 \times 2 - 3}{2 - 1}$$

$$= 1536 - 3 = 1533$$

2. दोस्रो पद 3 र पाँचौँ पद 81 भएको एउटा गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो 7 ओटा पदहरू योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, दोस्रो पद $(t_2) = 3$

पाँचौँ पद $(t_5) = 81$

सातओटा पदहरूको योगफल $(S_7) = ¿$

हामीलाई थाहा छ ,

$t_n = ar^{n-1}$

त्यसैले, $t_2 = ar$

अथवा, $3 = ar$ ....(i)

$t_5 = ar^4$

अथवा $81 = ar^4$ ....(ii)

समीकरण (ii) लाई (i) ले भाग गर्दा

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{81}{3}$$

अथवा, $r^3 = 27$

अथवा, $r = 3$

फेरि समीकरण (i) बाट

$3 = a \times 3$

अथवा, $a = 1$

$$S_7 = \frac{a(r^7 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{1\,(3^7 - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2187 - 1}{2} = 1093$$

3. एउटा धनात्मक समान अनुपात भएको गुणोत्तर श्रेणीको पहिला चार पदहरूको योगफल 40 र पहिला दुई पदहरूको योगफल 4 छ भने सो श्रेणीको पहिला आठ पदहरूको योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $S_4 = 40$

$S_2 = 4$

$S_8 = ¿$

हामीलाई थाहा छ,

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

त्यसैले, $S_4 = \frac{a\,(r^4 - 1)}{r - 1}$ ....(i)

अथवा, $40 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1}$

$S_2 = \frac{a(r^2 - 1)}{2 - 1}$

अथवा, $4 = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1}$ ....(ii)

समीकरण (i) लाई समीकरण (i) ले भाग गर्दा,

$\frac{(r^4 - 1)}{r^2 - 1} = \frac{40}{4}$

अथवा, $\frac{(r^2 - 1)\,(r^2 + 1)}{r^2 - 1} = 10$

अथवा, $r^2 + 1 = 10$

अथवा, $r^2 = 9$

अथवा, $r = 3$ [r, धनात्मक भएकाले]

समीकरण (ii) बाट, $4 = \frac{a(r^2 - 1)}{r - 1}$

अथवा, $4 = \frac{a(r - 1)\,(r + 1)}{(r - 1)}$

अथवा, $4 = a(r + 1)$

अथवा, $4 = a(3 + 1)$

अथवा, $4 = 4a$

अथवा, $1 = a$

फेरि, $S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1}$

अथवा, $S_8 = \frac{1(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{6561 - 1}{2} = 3280$

$\therefore$ पहिलो आठओटा पदहरूको योगफल 3280 छ।

अभ्यास 13.4

1. **योगफल पत्ता लगाउनुहोस् ।**

(a) $\sum_{k=1}^{5} 3^k$ (b) $\sum_{k=2}^{4} 4^k$ [Ans: (a) 363 (b) 336]

(c) 1 + 3 + 9 + 27 + ... 12 ओटा पदहरू [Ans: 3280]

(d) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ 8 ओटा पदहरू $\left[\text{Ans: } 1\frac{127}{128}\right]$

(e) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$ 9 ओटा पदहरू $\left[\text{Ans: } \frac{171}{256}\right]$

(f) 3 + 6 + 12 + ... + 1536 [Ans: 3069]

(g) $27 + 9 + 3 + ... + \frac{1}{81}$ $\left[\text{Ans: } 40\frac{40}{81}\right]$

(h) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{64}$ $\left[\text{Ans: } \frac{127}{64}\right]$

2. (a) यदि कुनै गुणोत्तर श्रेणिको तेस्रो र सातौँ पदहरू क्रमशः 8 र 128 छन भने पहिलो 10 पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् । [Ans: 2046]

(b) प्रथम पद 2, अन्तिम पद 128 र योगफल 170 भएको गुणोत्तर श्रेणिको समान अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 8]

3. (a) यदि एउटा गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो तीन पदहरूको योगफल 62 र तिनीहरूको गुणनफल 1000 भए ती पदहरू पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 2, 10, 50, अथवा 50, 10, 2]

(b) एउटा गुणोत्तर श्रेणीको छैटौँ पद यसको दोस्रो पदको 16 गुणा र पहिला सात पदहरूको योगफल $\frac{127}{4}$ छ भने उक्त श्रेणीको धनात्मक समान अनुपात र पहिलो पद पत्ता लगाउनुहोस् । $\left[\text{Ans: } 2, \frac{1}{4}\right]$

4. तेस्रो पद $\frac{1}{4}$ र चौथो पद $\frac{1}{8}$ भएको गुणोत्तर श्रेणीको पथ्रम 9 ओटा पदहरूको योगफल निकाल्नुहोस् । $\left[\text{Ans: } 1\frac{225}{256}\right]$

5. तीनओटा सङ्ख्याहरू गुणोत्तर अनुक्रममा छन् । जसको समान अनुपात 3 छ । यदि पहिलोमा 5 थप्दा, दोस्रोलाई दुई गुणा बनाउँदा र तेस्रोबाट 1 घटाउँदा बनेका सङ्ख्याहरू समानान्तरीय अनुक्रममा हुन्छन भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: 2, 6, 8]

6. यदि एउटा गुणोत्तर श्रेणीको पहिलो तीन पदहरूको योगफल 1 र यसको पहिलो 6 पदहरूको योगफल 28 भए सो श्रेणीको समान अनुपात र पहिलो पद पत्ता लगाउनुहोस्। $\left[\text{Ans: } 3, \frac{1}{13}\right]$

7. एउटा बललाई 16 मिटरको उचाईबाट खसाल्दा उक्त बल प्रत्येक पल्ट पहिलेको उचाइको $\frac{1}{2}$ भाग उफ्रिन्छ। उक्त बल 10 पल्ट सम्म उफ्रिदाँ जम्मा कति उचाइ उफ्रिन्छ होला ? [Ans: 31.96 m]

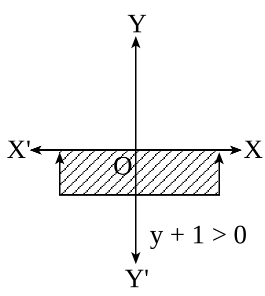
1.4 रेखीय योजना (Linear Programes)

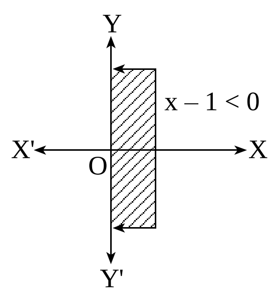
पुनरावलोकन (Review)

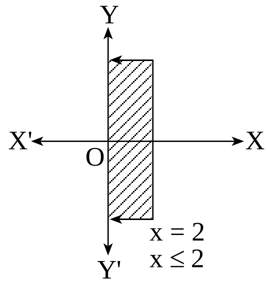
तल दिइएका वाक्यहरूलाई गणितीय वाक्यमा व्यक्त गरौं।

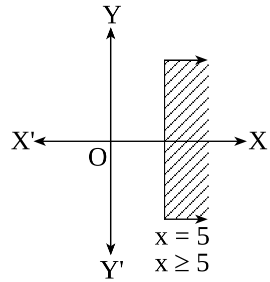
- बाबुको उमेर (x) छोराको उमेर (y) भन्दा बढी छ।
- आजको तापक्रम (t), 10° बराबर अथवा 10° भन्दा बढी छ।
- राम र मीनासँग भएको पैसालाई क्रमशः 'x' र 'y' ले जनाउँदा दुवैसँग भएको जम्मा पैसा बढीमा रू. 500 छ।
- पेम्बा र फूलमायासँग भएका कलमहरू लाई क्रमशः x र y ले जनाउँदा दुवैसँग भएका जम्मा कलमहरूको सङ्ख्या कम्तीमा 10 छ।

घटी वा बढीलाई गणितीय वाक्यमा लेख्दा '<' र '>' चिह्नले जनाइन्छ, भने बराबर अथवा कम्तिमा र बराबर अथवा बढीमा लाई क्रमशः '≥' र '≤' चिह्नद्वारा जनाइन्छ। $x \le 2$, $x \ge 5$, $x - 1 < 0$, $y + 1 > 0$ आदिलाई रेखीय असमानता भनिन्छ। यिनिहरूलाई लेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ।









स्वरूप $ax + by \geq 0$ अथवा

$ax + by + c \leq 0$ भएको दुई चलयुक्त अभिव्यन्जकलाई रेखीय असमानता भन्दछन्।

जहाँ $a \neq 0$ / $b \neq 0$ हुन्छ। क्रमजोडा (x_1, y_1) रेखीय असमानता $ax + by + c \geq 0$ अथवा $ax + by + c \leq 0$ को हल हुनका लागि (x_1, y_1) उक्त असमानताहरूका लागि मान्य हुनुपर्दछ। असमानताहरूले घेरिएको क्षेत्रलाई हल समूह अथवा हल क्षेत्र भन्दछन्।

रेखीययोजना भनेको एक गणितीय व्याख्या हो जहाँ रेखीय फलनको मान निश्चित सर्तहरू मान्य हुने गरी अधिकतम अथवा न्यूनतम हुन्छ। एउटा रेखीय योजना सँग सम्बन्धित समस्यामा दुईओटा कुराहरू समावेश हुन्छन।

(क) भिन्न चलहरू रेखीय फलन (उद्देश्य फलन)

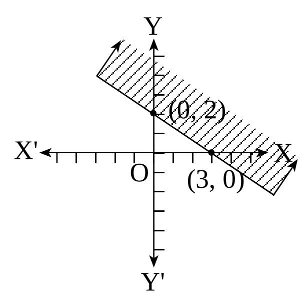
(ख) चल राशीहरू संलग्न असमानताहरूको पद्धति (सर्त)

उदाहरण 1

दिइएका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस्।

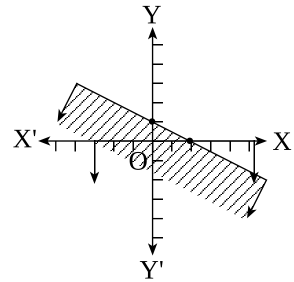
(a) $2x + 3y \geq 6$

समीकरण $2x + 3y = 6$ मा $x = 0$ र $y = 0$ राख्दा क्रमशः $y = 2$ र $x = 3$ हुन्छ। उक्त रेखाले X-अक्षलाई (3, 0) र Y-अक्षलाई (0, 2) मा भेट्छ। (0, 0) लाई $2x + 3y \geq 6$ मा राख्दा $0 \geq 6$ हुन्छ। जुन गणितीय रूपमा परिभाषित हुँदैन। त्यसैले उक्त असमानता (0, 0) भन्दा बाहिर जान्छ।



(b) $x + y \leq 1$

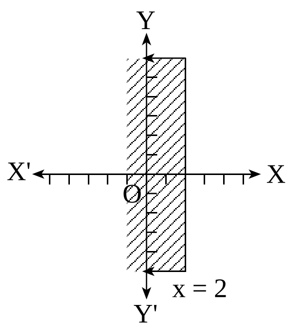
समीकरण $x + y = 1$ मा $x = 0$ र $y = 0$ राख्दा क्रमशः $y = 1$ र $x = 1$ हुन्छ । उक्त रेखाले X-अक्षलाई (1, 0) र Y-अक्षलाई (0, 1) मा भेट्छ । (0, 0) लाई $x + y \leq 1$ मा राख्दा $0 \leq 1$ हुन्छ । जुन गणितीय रूपमा परिभाषित हुन्छ । त्यसैले उक्त असमानता (0, 0) तिर आउँछ ।



उदाहरण 2

दिइएको लेखाचित्रमा दायाँ पारिएको भागले जनाउने असमानता लेख्नुहोस् ।

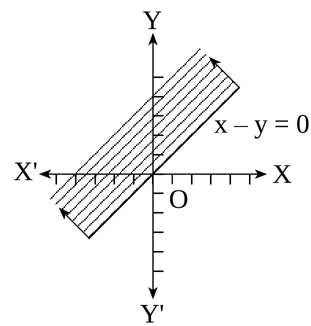
(a)



$x \leq 2$

उक्त रेखिय असमानताको समीकरण $x = 2$ हुन्छ । $(x, y) = (0, 0)$ राख्दा $0 < 2$ हुन्छ । त्यसैले आवश्यक असमानता $x \leq 2$ हुन्छ ।

(b)



$x - y \leq 0$

उक्त रेखिय असमानताको समीकरण $x - y = 0$ हुन्छ । $(x, y) = (0, 1)$ लिँदा $-1 < 0$ हुन्छ । त्यसैले आवश्यक असमानता $x - y \leq 0$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

निम्नलिखित सर्तहरू पूरा हुने गरी उद्देश्य फलनको अधिकतम र न्यूनतम मान निकाल्नुहोस् ।

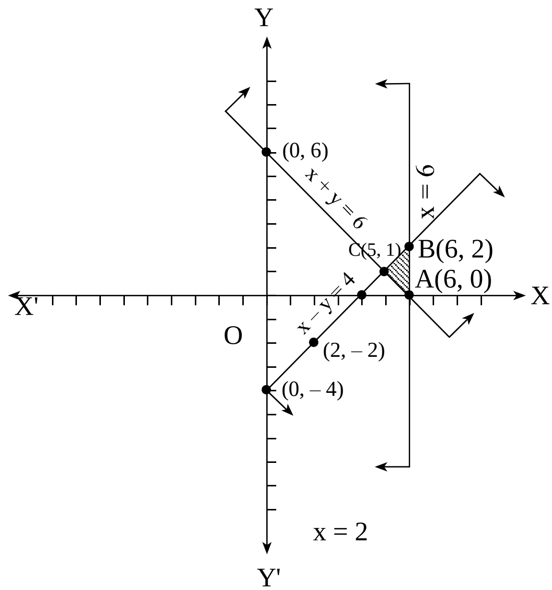
$P = 2x + y$ लाई सर्तहरू $x + y \geq 6$, $x - y \geq 4$, $x \leq 6$

यहाँ पहिलो असमानता $x + y \geq 6$ का लागि समीकरण $x + y = 6$

x	0	6	1
y	6	0	5

(0, 6), (6, 0) र (1, 5) लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा $x + y = 6$ को रेखा प्राप्त भयो । (0, 0) ले $x + y \geq 6$ लाई परीक्षण गर्दाः $0 + 0 \geq 6$

$$0 \geq 6 \text{ (गलत)}$$



$x \leq 2$

उक्त असमानताको क्षेत्र उद्गम विन्दु (0, 0) भएको विपरीत क्षेत्रमा पर्छ । त्यस्तैः $x - y \geq 4$ का लागि आवश्यक समीकरण $x - y = 4$

x	4	0	5
y	0	– 4	1

(4, 0), (0, – 4) र (5, 1) लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा $x - y = 4$ रेखा प्राप्त भयो । (0, 0) ले $x - y \geq 4$ लाई परीक्षण गर्दा $0 - 0 \geq 4$

$0 \geq 4$ (गलत)

$x - y \geq 4$ को क्षेत्र उद्गम विन्दु भएको विपरीत क्षेत्रमा पर्छ।

त्यस्तै $x = 6$ को रेखा खिची समूहलाई ग्राफमा देखाउँदा तीनओटै असमानताले घेरेको क्षेत्र ΔABC प्राप्त भयो जहाँ A(6, 0), B(6, 2) र C(5, 1) छ।

उद्देश्य फलन	शिर्ष विन्दु	मान
$P = 2x + y$	A(6, 0)	$2 \times 6 + 0 = 12$
	B (6, 2)	$2 \times 6 + 2 = 14$
	C (5, 1)	$2 \times 5 + 1 = 11$

त्यसैले फलन $P = 2x + y$ को अधिकतम मान B(6, 2) र न्यूनतम मान C(5, 1) मा दिइएका सर्तहरू अनुरूप प्राप्त भयो।

अभ्यास 1.4

तल दिइएका असमानताहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

1. $x + 2 \geq 0$
2. $y - 4 \leq 0$
3. $2x + 3y \geq 6$
4. $x - y \geq 1$
5. $x + 3y \leq 12$ र $x + 2y \geq 8$ (एउटै लेखाचित्रमा)
6. $y - 2x \leq 7$, $2x + y \leq 7$ र $y \geq 1$ (एउटै लेखाचित्रमा)
7. $2x + 5y \geq 10$ र $2x - 5y \leq 10$
8. $3x + 2y \geq 24$, $3x + y \leq 15$, $x \geq 4$

उत्तरहरू : *विषय शिक्षक अथवा अन्य सहजकर्ता र सहयोगीलाई देखाउनुहोस् ।*

9. उद्देश्यफलन 'p' को निम्नलिखित अवस्थामा अधिकतम मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $P = 5x + 3y$, $2x + y \leq 20$, $2x + 3y \leq 24$,
$x \geq 0$ र $y \geq 0$ [Ans: 51, (9, 2)]

(b) $P = 2x + 3y$, $x + y \leq 1$, $x - y \geq 1$, $y \geq -2$ [Ans: 2, (1, 0)]

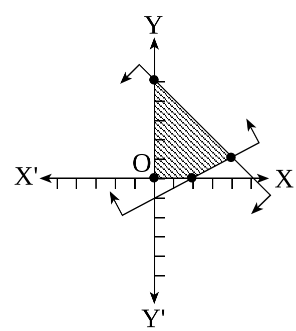
(c) $P = 5x + 3y$, $x + y \leq 6$, $x - y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ [Ans: 28, (5, 1)]

10. उद्देश्यफलन 'z' को निम्नलिखित अवस्थामा न्यूनतम मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(a) $Z = 3x + y$, $2y \geq x - 1$, $x + y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ [Ans: 0, (0, 0)]

(b) $5x + 4y \leq 0$, $0 \leq y$, $0 \leq x$ [Ans: 37, (0, 5)]

11. दिइएको लेखाचित्रमा A, B र C का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (2, 0), (4, 1) र (0, 5) छन । बहुभुज OABC भित्र छाया परेको भाग चारओटा असमानताहरूले जनाएको छ । ती असमानताहरू पत्ता लगाउनुहोस् । $P = 5x - 4y$ को न्यूनतम मान ती असमानताहरूले मान्य हुने गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।



[Ans: $x - 2y \leq 2$, $x + y \leq 5$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, -20, (0, 5)]

1.5 वर्ग र घन समीकरणको लेखाचित्र (Graph of Square and Cubic Function)

$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ र $y = ax^3 + bx^2 + (x + d$ $(a \neq 0)$ को डिग्री कतिकति होला ? एकआपसमा छलफल गर्नुहोस् । $y = 2x^2 - 5$ र $y = 3x^3$ कुन फलनका उदाहरणहरू हुन ?

$y = x^2 + 5x + 6$ स्वरूपका फलनलाई वर्गफलन भन्दछन । यो फलनको लेखाचित्र पाराबोला (Parabola) हुन्छ । पाराबोला घुमेको विन्दु (Turning point) शीर्षविन्दु हुन्छ ।

$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ लाई $y = a(x - b)^2 + k$ को स्वरूपमा लेख्दा

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[x^2 + 2 . \frac{b}{2a} . x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

जहाँ, $h = -\frac{b}{2a}$ र $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ हुन्छ ।

त्यसैले घुम्ने विन्दु $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ $a > 0$ हुदाँ पाराबोला तलतिर (downward) फर्किन्छ ।

चल राशीको घाताङ्क 3 भएको फलनलाई घन फलन (Cubic function) भनिन्छ । जस्तैः $y = 2x^3$, $y = -x^3$, $y = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ आदि । यसलाई $y = a(x + h)^3 + k$ स्वरूपमा व्यक्त गर्दा घुमाउने विन्दु $(-h, k)$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

$y = 4x^2 + 5$ लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस । $y = -(4x^2 + 5)$ को ग्राफ पनि देखाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $y = 4x^2 + 5$ का लागि $y = 4$, $b = 0$ र $c = 5$ छ । ($ax^2 + bx + c$ सँग तुलना गर्दा)

घुम्ने विन्दु (h, k)

$$= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$= \left(\frac{-0}{2 \times 4}, \frac{4 \times 4 \times 5 - 0}{4 \times 4}\right)$$

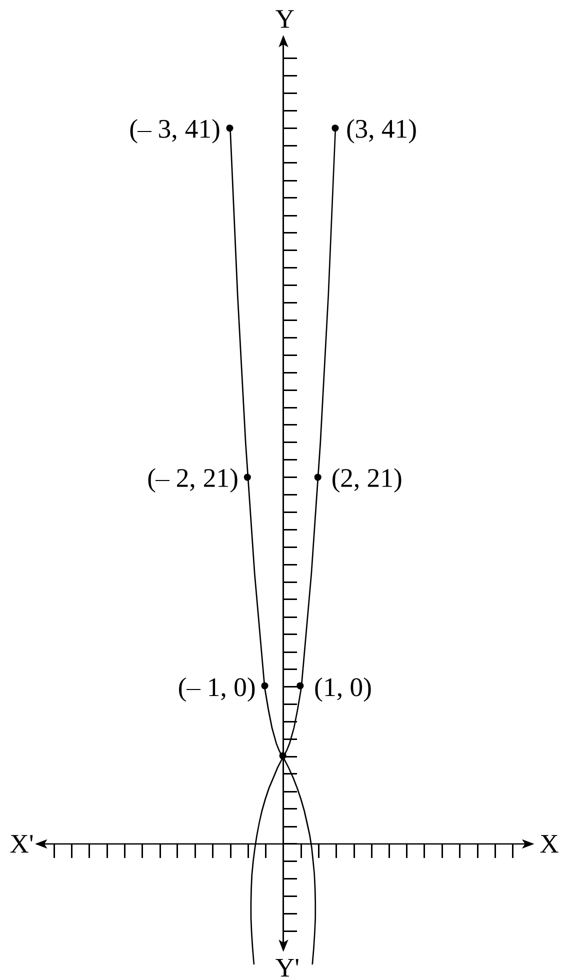
$$= (0, 5) \text{ छ ।}$$

$a > 0$ भएकाले लेखाचित्र (0, 5) भन्दा माथि फर्किन्छ ।

x	– 1	1	– 2	2
y	9	9	21	21

अन्य विन्दुहरू पनि भर्न सकिन्छ।

$y = -(4x^2 + 5)$ को ग्राफ (0, 5) बाट तलतिर फर्किन्छ।



उदाहरण 2

तल दिइएका फलनहरूलाई ग्राफमा देखाउनुहोस्।

(a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ **(b)** $y = x^3$

समाधान

(a) यहाँ

$x^2 + 2x - 3 = 0$ का लागि $a = 1, b = 2$ र $c = -3$ छ।

घुम्ने विन्दु $= \left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$

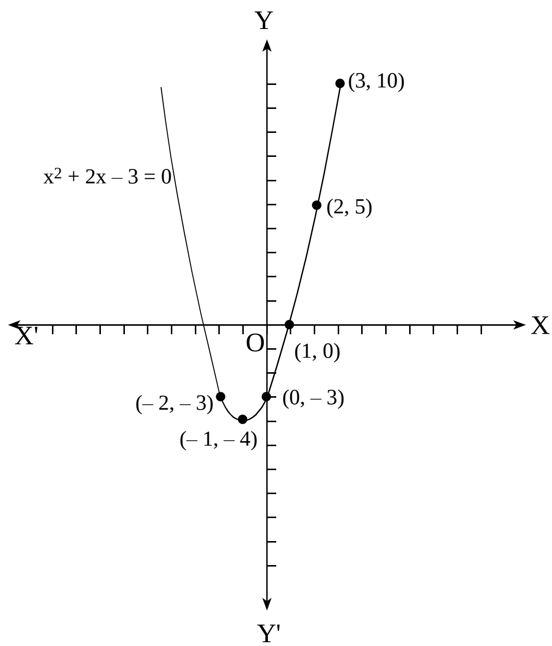
[मानौँ, $y = x^2 + 2x - 3$]

$$= \left(\frac{-2}{2\times 1}, \frac{4\times 1\times(-3)-(2)^2}{4\times 1}\right)$$

$$= (-1, -4)$$

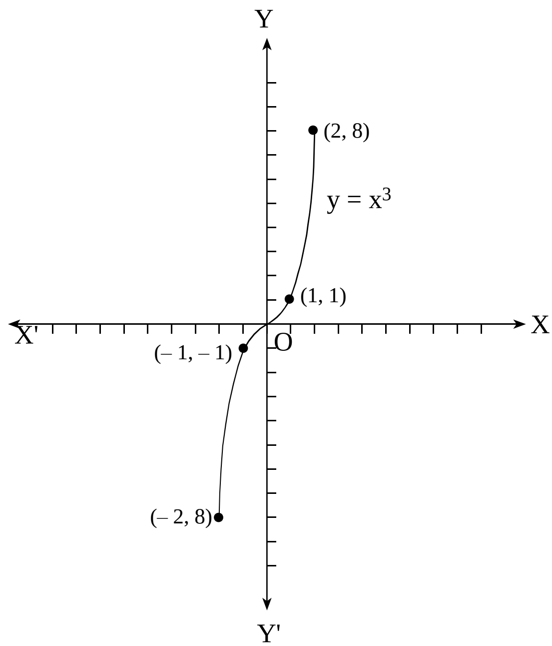
x	1	– 3	0
y	0	0	– 3

x र y का फरकफरक मानहरू लिँदा उक्त विन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा देखाई वक्र खिच्दा निम्नअनुसार को आकृति पाइन्छ।



(b) $y = x^3$ का लागि x र y का फरक–फरक मान लिई वक्र खिच्दा निम्नअनुसार को वक्र पाइन्छ।

x	0	1	– 1	2	– 2
y	0	1	1	8	– 8



उदाहरण 3

$x + y = 2$ र $y = x^2$ लाई लेखा चित्रमा देखाउनुहोस् र समाधान गर्नुहोस्।

नोटः समान्यतया सिधा रखाले वक्र रेखालाई दुईओटा विन्दुमा काट्छ।

$y = ax^2 + bx + c = 0$ भए $y = ax^2$ र $y = -(bx + c)$ लेख्न सकिन्छ।

समाधान

यहाँ $y = x^2$ को लेखाचित्र निम्नलिखित विन्दुहरू, लिएर खिच्न सकिन्छ, जसको घुम्ने विन्दु (0, 0) र वक्र (0, 0) बाट माथि तिर फर्किन्छ।

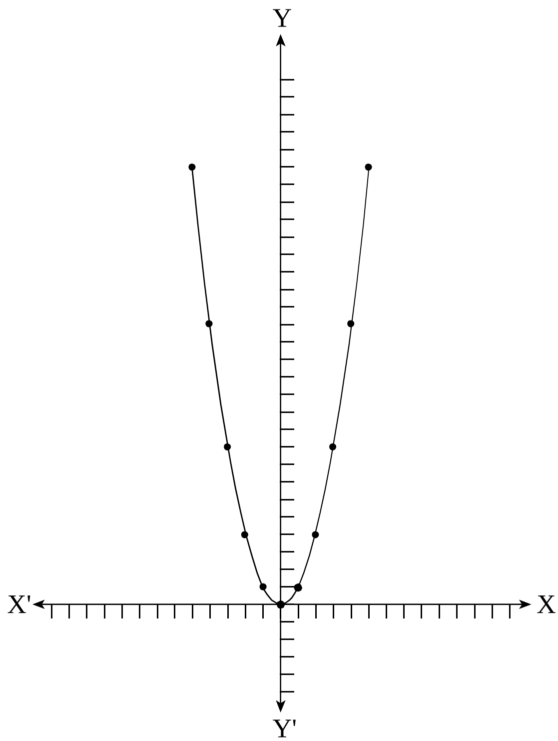
x	1	– 1	2	– 2
y	1	1	4	4

$x + y = 2$ का लागि

x	2	2
y	0	0

दुवैलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा

$x + y = 2$ ले $y = x^2$ लाई क्रमशः (1, 1) र (– 2, 4) मा भेट्छ।



अभ्यास 1.5

1. (a) वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ मा $a > 0$ हुदाँ र $a < 0$ हुदाँ वक्रको अवस्था बारे लेख्नुहोस् ।

   (b) $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ को घुम्ने विन्दु (turning point) कति हुन्छ ?

2. **निम्नलिखित समीकरणहरूको लेखाचित्र खिच्नुहोस् ।**

   (a) $y = x^2$ (b) $y = -x^2$

   (c) $y = 2x^2 + 5$ (d) $y = x^2 + 2$

   (e) $y = x^2 - 1$ (f) $y = 3x^2 - 1$

3. **तल दिइएका फलनहरू लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।**

   (a) $y = (4x^2 + 4x - 3)$ (b) $y = -(4x + 4x - 3)$

   (c) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

4. **तल दिइएका फलनहरू लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।**

   (a) $y = 2x^3$ (b) $y = -x^3$

   (c) $y = 4x^3 - 15$

5. आफ्नो वरिपरि पाइने वस्तुहरूमा $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ र $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ का वक्रहरू कहाँ कहाँ देख्नु भएको छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तरहरू : शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

हल गर्नुहोस् (लेखाचित्र विधिबाट)

6. $y = x^2 + 2$ र $4x - y = 1$ [Ans: (1, 3), (3, 11)]

7. $x^2 + x - 2 = 0$

अथवा, $y = x^2$ र $y = -x + 2$ [Ans: (1, 1) र (– 2, 4)]

एकाइ 2

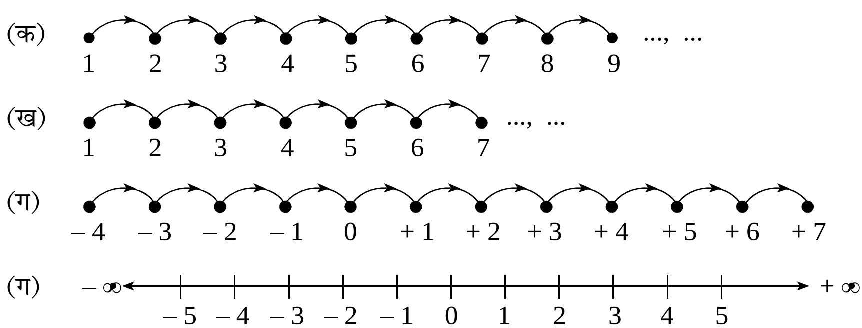
निरन्तरता (Continuity)

2.0 पुनरावलोकन (Review)

- सीमान्त मान भनेको के हो ?
- $\lim\limits_{x \to 2} 2x = 4$ ले के लाई जनाउँछ ?
- $f(1)$ र $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ बिच के भिन्नता छ ?
- सीमान्त मानको दैनिक जीवनमा कहाँ र कसरी प्रयोग भएको पाइन्छ ?

  x सङ्ख्या रेखामा दायाँ अथवा वायाँ तिरबाट बिन्दु 'a' को नजिक पुग्दा $f(x)$ कुनै निश्चित वास्तविक सङ्ख्याको नजिक पुग्दछ। यसलाई m द्वारा जनाईन्छ र $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = m$ लेखिन्छ।

2.1 सङ्ख्याहरूको क्रमको समूहमा निरन्तरता (Continuity in the order of set of numbers)

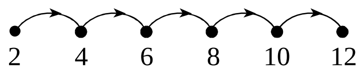


माथि दिइएका चित्रहरूमा (क), (ख), (ग) र (घ) ले क्रमशः प्राकृतिक सङ्ख्याहरू, पूर्णसङ्ख्याहरू, पूर्णाङ्कहरू र वास्तविक सङ्ख्याहरूको साङ्ख्यिक प्रस्तुतिलाई जनाउँछ। चित्र क, ख र ग को भन्दा (घ) को प्रस्तुति फरक छ। त्यसैले (घ) मा प्रत्येक दुई सङ्ख्याहरूको बिचमा अर्को त्यही प्रकृतिको सङ्ख्या परिभाषित हुन्छ भने क, ख र ग मा परिभाषित हुदैन। त्यसैले वास्तविक सङ्ख्याहरूको क्रममा निरन्तरता पाइन्छ।

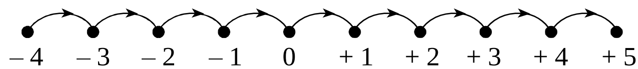
दैनिक जीवनमा हामी विभिन्न प्रकारका संरचना र सजिवहरूको गतिमा निरन्तरता देख्न सकिन्छ।

अभ्यास 2.1

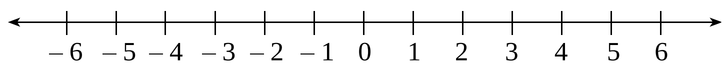
1. सङ्ख्या रेखाको परिभाषा उदाहरणसहित दिनुहोस् ।
2. तल दिइएको सङ्ख्याहरूलाई चित्रद्वारा देखाउनुहोस् । (सङ्ख्या रेखामा)
   (क) 1 देखि 20 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू
   (ख) – 4 देखि 6 सम्मका पूर्णाङ्कहरू
   (ग) – 10 देखि 10 सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू
3. (क)



(ख)

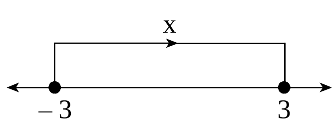
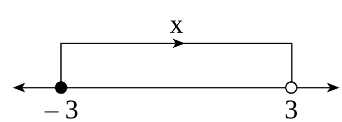
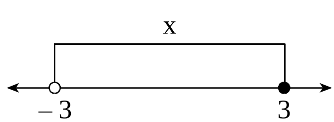
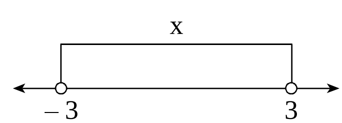
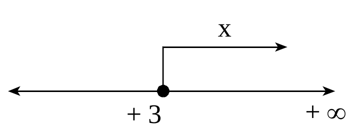
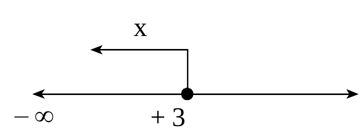
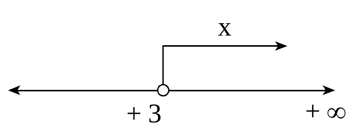
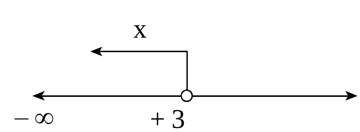


(ग)



माथि दिइएका चित्रहरूले जनाउने सङ्ख्याहरूको उपसमूह लेख्नुहोस् । ती सङ्ख्याहरूले केलाई जनाउँछन ? कुनकुन मा निरन्तरता पाइन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

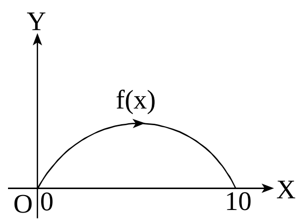
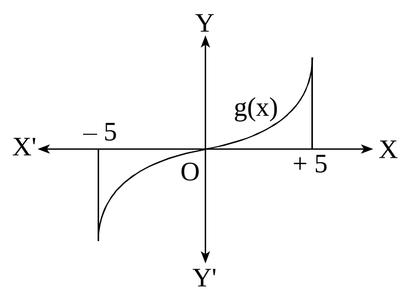
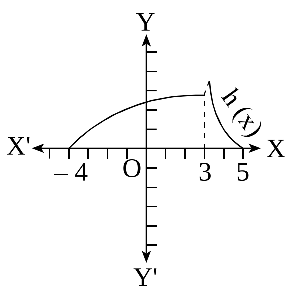
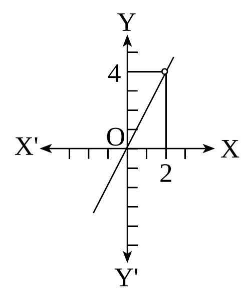
2.2 लेखाचित्रमा फलनको विछिन्नताको खोजी (Investigation of discontinuity in graph)

(क)		(ख)	
(ग)		(घ)	
(ङ)		(च)	
(छ)		(ज)	

माथि दिइएका लेखाचित्रमा असमानताहरूलाई निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ।

(क)	$-3 \leq x \leq 3$	(ख)	$-3 \leq x < 3$
(ग)	$-3 < x \leq 3$	(घ)	$-3 < x < 3$
(ङ)	$x \geq 3$	(च)	$x \leq 3$
(छ)	$x > 3$	(ज)	$x < 3$

(क) मा -3 देखि $+3$ सम्मका वास्तविक सङ्ख्याहरू निरन्तर रूपमा समावेश छन भने अन्यमा दुईओटा सङ्ख्याहरू बिच निरन्तरता पाइँदैन।

(क)		(ख)	
(ग)		(घ)	

माथि दिइएका फलनहरू का लेखाचित्रहरूमा

(क) $f(x)$ को वक्र 0 देखि 10 सम्म अविछिन्न (continuous) छ।

(ख) $g(x)$ को वक्र -5 देखि $+5$ सम्म अविछिन्न (continuous) छ।

(ग) $h(x)$ को वक्र -4 देखि 5 सम्म परिभाषित छ। तर उक्त वक्र $x = 3$ मा विछिन्न (discontinuous) छ।

(घ) $k(x)$ को वक्र $-\infty$ देखि $+\infty$ सम्म $(-\infty, \infty)$ का लागि परिभाषित छ। तर उक्त फलनको लेखाचित्र विन्दु $x = 2$ मा विछिन्न (discontinuous) छ।

यदि कुनै वक्र कुनै निश्चित विन्दुहरूमा गएर छुटेको (break) छ भने उक्त वक्र दिइएको निश्चित विन्दुमा विछिन्न (discontinuous) भएको मानिन्छ। यस्तो अवस्थामा वक्रमा gap, hole देखिने गरि वक्र टुटेको देखिन्छ।

अभ्यास 2.2

(1) **तल दिइएका असमानताहरूलाई सङ्ख्या रेखामा अथवा लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।**

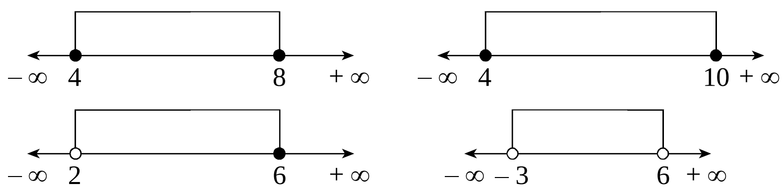
(क) $-5 \leq x \leq 5$ (ख) $-6 \leq x \leq 6$

(ग) $-3 \leq x < 4$ (घ) $-4 < x \leq 5$

(ङ) $-4 < x < 6$ (च) $x \geq 2$

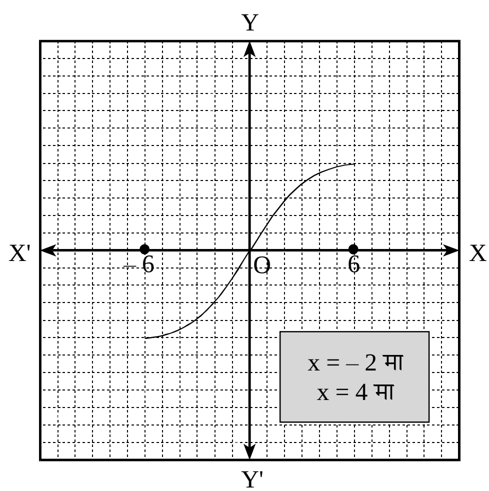
(छ) $x < 3$ (ज) $x \leq 3$

(2) **तल दिइएका लेखाचित्रहरूका असमानता लेख्नुहोस् ।**

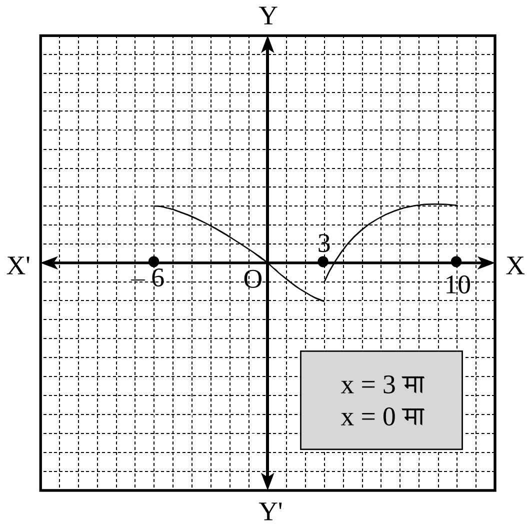


(3) तल दिइएका वक्रहरू कुन विन्दु देखि कुन विन्दु सम्म परिभाषित छन र यिनीहरूलाई लेखाचित्रमा देखाउन दिइएको विन्दुमा अविछिन्न (continuity) र विछिन्न (discontinuity) के छ ? लेख्नुहोस् ।

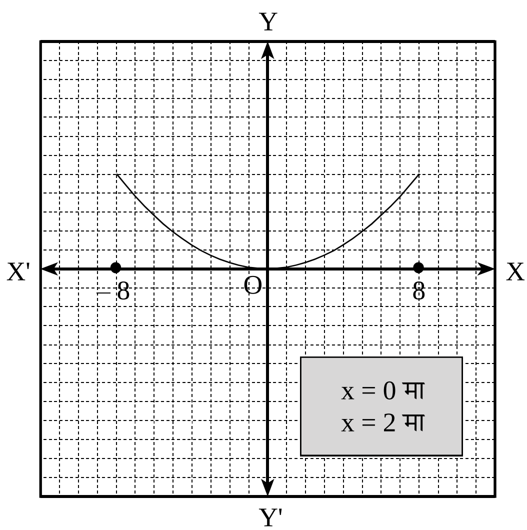
(क)



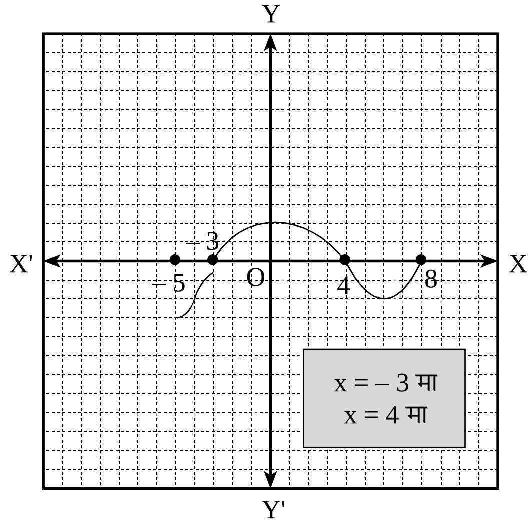
(ख)



(ग)



(घ)



अनिवार्य गणित कक्षा १० बाट अथवा अन्य कुनै पुस्तकबाट सन्दर्भ जनाउने कुनै २ ओटा निरन्तर श्रेणीसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरू लिनुहोस् । ती तथ्याङ्कहरूको सञ्चित वारम्बारता वक्र खिच्नुहोस र अविछिन्नता र विछिन्नताको व्याख्या गर्नुहोस्।

2.3 निरन्तरताको साङ्केतिक प्रस्तुति (Notational Representation of Continuity)

- $f(x) = 2x + 4$ का लागि $x = 2$ मा

  $f(2) = 2 \times 2 + 4 = 4 + 4 = 8$ हुन्छ।

- $f(x) = 2x + 4$ का लागि $x = 1.99$ मा

  $f(1.99) = 2 \times 1.99 + 4 = 7.98 = 8$ (लगभग) र $x= 2.01$ मा $f(2.01) = 8.02 = 8$ (लगभग) हुन्छ। $f(1.99)$ लाई $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ भएकाले छोटकरीमा $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ लेखिन्छ।

  $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 2x + 4 = 8$ भएकाले यसलाई पढ्दा x जति जति 2 को नजिक पुग्छ, $2x + 4$ पनि 8 को नजिक पुग्छ। अथवा x र 2 को फरक धेरै कम हुन्छ र उक्त फरक को धनात्मक मान $2x + 4$ र 8 को धेरै सानो धनात्मक मानसँग सम्बन्धित हुन्छ, एउटालाई अर्कोको पदमा व्यक्त गर्न सकिन्छ।

(क) जब x बायाँबाट बिन्दु a को नजिक पुग्छ, यसलाई $x \to a$ अथवा $x \to a - 0$ लेख्न सकिन्छ। यस्तो अवस्थामा फलन f(x) का लागि वायाँबाट बिन्दु a मा सीमान्त मानलाई $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ अथवा $\lim\limits_{x \to a - 0} f(x)$ द्वारा जनाइन्छ।

(ख) जब x दायाँबाट बिन्दु a को नजिक पुग्छ, त्यसलाई $\lim\limits_{x \to a^+}$ अथवा $x \to a + 0$ लेख्ने गरिन्छ। यस्तो अवस्थामा फलन $f(x)$ का लागि $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ लाई बिन्दु a मा दायाँबाट $f(x)$ को सीमान्त मान भनिन्छ।

(ग) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ भएमा सीमान्तमान परिभाषित भएको मानिन्छ।

(घ) यदि कुनै विन्दुमा परिभाषित, फलनको मान र सीमान्त मान एकआपसमा बराबर हुन्छन भने उक्त बिन्दुमा फलन निरन्तर (continuous) छ भनि लेख्न सकिन्छ। अथवा, यदि फलन $f(x)$ को बिन्दु $x = a$ मा परिभाषित फलनको मान $f(a)$ र सीमान्त मान $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ एक–आपसमा बराबर भए बिन्दु a मा फलन $f(x)$ निरन्तर छ भनी लेख्न सकिन्छ।

अभ्यास 2.3

(1) (क) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ को अर्थ लेख्नुहोस्।

(ख) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ को अर्थ लेख्नुहोस्।

(ग) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ लाई वाक्यमा लेख्नुहोस्।

(घ) फलन $f(x)$ को विन्दु $x = a$ मा निरन्तर/अविछिन्न हुने अवस्था लेख्नुहोस्।

(2) (क) $f(x) = x + 1$ भए $x = 2.99$, $x = 2$ र $x = 3.01$ मा फलन को मान पत्ता लगाई $f(x)$ को $x = 2$ मा अविछिन्नता अथवा विछिन्नता हुने अवस्था निर्धारण गर्नुहोस्।

(ख) $f(x) = 3x - 1$ का लागि $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ र $f(2)$ पत्ता लगाई उक्त विन्दुमा $f(x)$ विछिन्न हुने/नहुने अवस्थाका बारेमा छलफल गर्नुहोस्।

(ग) $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 4)$ लाई परिभाषित गर्नुहोस्। जहाँ $x = 1.99, 1.999, 2.001, 2.001$ मानहरू को प्रयोग गर्नुहोस्।

(3) $f(x) = x^2$ अथवा $y = x^2$ को वक्र खिच्नुहोस्। उक्त वक्र $x = 2$ र $x = 4$ मा विछिन्न छ अथवा छैन ? व्याख्या गर्नुहोस्।

(4) हाम्रो दैनिक जीवनमा निरन्तरता (continuity) भन्ने शब्द कहाँ–कहाँ प्रयोग भएको छ ? साथीहरूको बिचमा छलफल गरी प्रतिवेदन तयार गर्नुहोस्।

एकाइ 3

मेट्रिक्स (Matrix)

3.0 पुनरावलोकन (Review)

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ र $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ भए A + B, A – B, AB र BA को मान कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

$(A)_{m \times n}$ र $(B)_{m \times n}$ दुई एउटै क्रमका मेट्रिक्सहरू भए AB परिभाषित हुन्छ, किनकि अग्रणी मेट्रिक्स (Pre-matrix) र पछिल्लो मेट्रिक्स (Post matrix) मा अग्रणी मेट्रिक्समा भएका पङ्क्तिहरूको सङ्ख्या र पछिल्लो मेट्रिक्स (Post matrix) मा भएका लहरको सङ्ख्या बराबर हुनु पर्दछ ।

3.1 मेट्रिक्सको डिटरमिनान्ट (Determinant of a Matrix)

मानौँ $a_1x + b_1 = 0$ र $a_2x + b_2 = 0$ दुई रेखीय समीकरणहरू हुन् $x = -\frac{b_1}{a_1}$ र $x = -\frac{b_2}{a_2}$ ले एउटै चल राशीको मानलाई जनाउँछन्, त्यसैले, $-\frac{b_1}{a_1} = -\frac{b_2}{a_2}$ हुन्छ ।

अथवा, $b_1a_2 - a_1b_2 = 0$ हुन्छ । उक्त समीकरणलाई हल गर्दा आउने अवस्था $a_1b_2 - a_2b_1$ ले एउटा वास्तविक सङ्ख्यालाई जनाउँछ । त्यसैले $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ मुख्य विकर्ण (main diagonals) का सदस्यहरूको गुणनफल a_1b_2 बाट द्वितीयक (सहायक) विकर्ण (Secondary diagonal) का सदस्यहरूको गुणनफल a_2b_1 लाई घटाउँदा प्राप्त हुने सङ्ख्या नै $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ को डिटरमिनान्ट हो ।

यदि $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ को डिटरमिनान्टर $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ ले शून्य मान दिन्छ भने यसलाई एकल मेट्रिक्स (Singular matrix) भनिन्छ भने अन्यथा अमान्य एकल मेट्रिक्स हुन्छ । जस्तैः $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ भए A को डिटरमिनान्ट, $|A| = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$ हुन्छ । त्यसैले यो एउटा एकल मेट्रिक्स हो । त्यस्तै $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ भए B को डिटरमिनान्ट, $|B| = 2 \times 2 - 1 \times 1 = 3$ हुन्छ । $|B| \neq 0$ भएकाले मेट्रिक्स B एउटा स्वामित्वहीन एकल मेट्रिक्स हो ।

नोटः '||' अथवा || || ले डिटरमिनान्टको सङ्केतलाई जनाउँछन् ।

एउटा मात्र सदस्य भएको मेट्रिक्स (Singular Matrix) को डिटरमिनान्ट दिइएकै सदस्य हुन्छ ।

$A = [-4]$ भएमा $|A| = -4$ र $B = [4]$ भएमा $|B| = 4$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ भए $|A|$ पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ मा $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ हुन्छ ।

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times (-1) = 8 + 3 = 11$

उदाहरण 2

'a' को मान पत्ता लगाउनुहोस् । $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & a \end{bmatrix}$ एउटा एकल मेट्रिक्स छ ।

समाधान

मानौँ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & a \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & a \end{vmatrix} = 4a - 24$$

A एउटा एकल मेट्रिक्स भएकाले एकल मेट्रिक्सको परिभाषा अनुसार $|A| = 0$ हुन्छ ।

त्यसैले, $4a - 24 = 0$

अथवा, $4a = 24$

अथवा, $a = \frac{24}{4} = 6$

उदाहरण 3

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ भए $A^2 + 5A + 7I$ को डिटरमिनान्ट पत्ता लगाउनुहोस्, जहाँ I ले 2×2 क्रमको एकाइ मेट्रिक्सलाई जनाउँछ ।

समाधान

यहाँ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 3 & 2 \times 1 + 1 \times 2 \\ 3 \times 2 + 2 \times 3 & 3 \times 1 + 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 3 & 2 + 2 \\ 6 + 6 & 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$5A = 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$$

$$7I = 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 + 5A - 7I &= \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7+10 & 4+5 \\ 12+15 & 7+10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 27 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17-7 & 9-0 \\ 27-0 & 17-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 27 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

अभ्यास 3.1

1. मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ भए $|A|$ [Ans: 4]

(ख) यदि $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ भए $|I|$ [Ans: 1]

(ग) यदि $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ भए $|B|$ [Ans: – 22]

(घ) यदि $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ भए $|M|$ [Ans: 11]

2. k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ k & 6 \end{vmatrix} = 0$ (ख) $\begin{vmatrix} k & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (ग) $\begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

(घ) $\begin{vmatrix} 2k & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 0$ (ङ) $\begin{vmatrix} -6 & k+1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (च) $\begin{vmatrix} 3+k & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$

Answers

2. (क) 6 (ख) 4 (ग) 8.5 (घ) – 0.75 (ङ) – 0.5

3. **तल दिइएका मेट्रिक्सहरूको डिटरमिनान्ट पत्ता लगाउनुहोस् ।**

(क) $A^2 + 2A - 2I$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [Ans: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$]

(ख) $A^2 - 3A - 4I$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [Ans: $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$]

(ग) $A^2 + 5B + 6I$, जहाँ $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ र $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [Ans: $\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$]

(घ) $2I + 7C - C^2$, जहाँ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ र I 2×2 क्रमको एकाई मेट्रिक्स हो ।

[Ans: $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 16 & 20 \end{pmatrix}$]

(ङ) $4I - 4D + D^2$, जहाँ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ र $I_{2\times 2}$ एकात्मक मेट्रिक्स हो ।

[Ans: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]

3.2 विपरीत मेट्रिक्स (Inverse Matrix)

मेट्रिक्स $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ र मेट्रिक्स $B = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ छन् । AB र BA को गुणन बाट प्राप्त मेट्रिक्स कति होला ?

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times \frac{4}{5} + 1 \times \left(-\frac{3}{5}\right) & 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \times \frac{2}{5} \\ 3 \times \frac{4}{5} + 4 \times \left(-\frac{3}{5}\right) & 3 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 4 \times \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8-3}{5} & \frac{-2+2}{5} \\ \frac{12-12}{5} & \frac{-3+8}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{5} & \frac{0}{5} \\ \frac{0}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \times 2 + \left(-\frac{1}{5}\right) \times 3 & \frac{4}{5} \times 1 + \left(-\frac{1}{5}\right) \times 4 \\ \left(-\frac{3}{5}\right) \times 2 + \frac{2}{5} \times 3 & -\frac{3}{5} \times 1 + \frac{2}{5} \times 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \\ -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Since, $AB = BA = I_2$

B को विपरति फलन A हो, अथवा A को विपरीत B फलन हा

(A is inverse of B or B is inverse of A)

यदि $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ भए, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ हुन्छ।

उदाहरण 1

दिइएका मेट्रिक्सहरू गुणन गर्नुहोस र तिनिहरू एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्स हुन, होइनन् ? यकिन गर्नुहोस्।

(क) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ र $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(ख) $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ र $Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

समाधान

(क) यहाँ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\times 3 + 1\times(-5) & 2\times(-1) + 1\times 2 \\ 5\times 3 + 3\times(-5) & 5\times(-1) + 3\times 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\times 2 + (-1)\times 5 & 3\times 1 + (-1)\times 3 \\ (-5)\times 2 + 2\times 5 & (-5)\times 1 + 2\times 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

यहाँ $AB = BA = I$

त्यसैले A र B एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्सहरू हुन्।

(ख) यहाँ,

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ र } Q = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
PQ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\times(-3) + 3\times 2 & 3\times 4 + 3\times(-5) \\ 5\times(-3) + 0\times 2 & 5\times 4 + 0\times(-5) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -9+6 & 12-15 \\ -15+0 & 20+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -13 & -3 \\ -15 & 20 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

PQ = I नभएकाले P र Q एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्स होइनन्।

उदाहरण 2

(क) **तल दिइएका मेट्रिक्सहरूको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।** $M = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

(ख) **यदि मेट्रिक्स** $\begin{pmatrix} x & 2x-9 \\ -y & 3 \end{pmatrix}$ **को विपरीत मेट्रिक्स** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ y & x \end{pmatrix}$ **भए** x **र** y **को मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।**

समाधान

(क) **यहाँ,** $M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ मानौँ यसको विपरीत मेट्रिक्स $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ छ।

हामीलाई थाहा छ,

$$MN = I$$

अथवा, $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 2a+7c & 2b+7d \\ 5a+9c & 5b+9d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

क्रमागत सदस्यहरूको सम्बन्धलाई हल गर्दा

$2a + 7c = 1$ .... (i)

$5a + 9c = 0$ .... (ii)

$2b + 7d = 0$ .... (iii)

$5b + 9d = 1$............ (iv)

समीकरण (i) लाई 5 ले र समीकरण (ii) लाई 2 ले गुणन गरी नयाँ समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) घटाउँदा :

$$\begin{array}{rl} 10a + 35c & = 5 \\ 10a + 18c & = 0 \\ \underline{(-) \quad\quad (-)} & \underline{(-)} \\ 17c & = 5 \end{array}$$

$$c = \frac{5}{17}$$

समीकरण (i) मा c को मान राख्दा,

$$2a + 7 \times \frac{5}{17} = 1$$

अथवा, $2a + \frac{35}{17} = 1$

अथवा, $2a = 1 - \frac{35}{17}$

अथवा, $2a = \frac{17 - 35}{17}$

अथवा, $a = -\frac{18}{2 \times 17} = -\frac{9}{17}$

समीकरण (iii) लाई 5 ले र समीकरण (ii) लाई 2 ले गुणन गरी नयाँ समीकरण (iii) बाट समीकरण (iv) घटाउँदा :

$$\begin{array}{rl} 10\,b + 35\,d & = 0 \\ 10\,b + 18\,d & = 2 \\ \underline{(-)\ (-)\quad (-)} & \\ 17\,d & = -2 \\ d & = -\frac{2}{17} \end{array}$$

समीकरण (iii) मा d को मान राख्दा,

$$2b + 7 \times \left(-\frac{2}{17}\right) = 0$$

अथवा, $2b - \frac{14}{17} = 0$

अथवा, $2b = \frac{14}{17}$

अथवा, $2a = \frac{14}{2 \times 17}$

अथवा, $b = \frac{7}{17}$

त्यसैले, $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

वैकल्पिक विधि :

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 9 - 7 \times 5 \\ &= 18 - 35 \\ &= -17 \end{aligned}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

(ख) $\begin{pmatrix} x & 2x-9 \\ -y & 3 \end{pmatrix}$ **र** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ y & x \end{pmatrix}$ **एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्स भएकाले** $\begin{pmatrix} x & 2x-9 \\ -y & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

अथवा, $\begin{pmatrix} x \times 3 + (2x-9) \times y & x \times 5 + (2x-9) \times x \\ (-y) \times 3 + 3 \times y & (-y) \times 5 + 3 \times x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 3x + 2xy - 9y & 5x + 2x^2 - 9x \\ -3y + 3y & -5y + 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

अथवा, $\begin{pmatrix} 2xy + 3x - 9y & 2x^2 - 4x \\ 0 & 3x - 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

अथवा, $2x^2 - 4x = 0$

अथवा, $2x(x-2) = 0$

$x = 0, 2$

When, $x = 0$,

$3x - 5y = 1$

$3 \times 0 - 5y = 1$

or, $-5y = 1$

or, $y = -\frac{1}{5}$

When, $x = 2$,

$3x - 5y = 0$

$3 \times 2 - 5y = 0$

or, $6 = 5y$

or, $y = \frac{6}{5}$

$\therefore$ $x = 0, y = -\frac{1}{5}$

or, $x = 2, y = \frac{6}{5}$

अभ्यास 3.2

1. विपरीत मेट्रिक्सको परिभाषा लेख्नुहोस्।

2. तल दिइएका मेट्रिक्सहरू एकआपसमा विपरीत हुन होइनन, गुणन गरी यकिन गर्नुहोस्।

(क) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ र $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

(ख) $P = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ र $Q = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$

(ग) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ र $N = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(घ) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ र $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

उत्तर : *2. (क) हुन (ख) हुन (ग) होइन (घ) हुन*

3. तल दिइएका मेट्रिक्सहरूको विपरीत मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।

(क) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (ग) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

4. (क) यदि $\begin{pmatrix} 2x & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ को विपरीत मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 9 & y \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

(ख) यदि $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ र $\begin{pmatrix} 9 & y \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्सभए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

(ग) यदि $\begin{pmatrix} 4 & x-1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ र $\begin{pmatrix} x & 1-x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ एकआपसमा विपरीत मेट्रिक्सभए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

उत्तरहरू : 3. (क) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ (ग) $\begin{pmatrix} \frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$

4. (क) $(2, -7) = (x, y)$ (ख) 5 (ग) -2

3.3 दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणको मेट्रिक्स विधिबाट हल (Solving simultaneous equation of two variables by matrix method)

मानौँ $a_1x + b_1y = c_1$ र $a_2x + b_2y = c_2$ दुइ युगपतरेखीय समीकरणहरू हुन् । यी समीकरणहरूलाई मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ हुन्छ ।

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = A$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X$ र $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = B$ मान्दा माथिको समीकरणहरूलाई $AX = B$ को स्वरूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । $AX = B$ मा $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$ भएमा A^{-1} पत्ता लगाउन सकिन्छ । $|A| \neq 0$ भएमा दिइएका समीकरणहरूको एकल समाधान (unique solution) हुन्छ । $AX = B$ लाई दुवै पक्षमा A^{-1} गुणन गर्दा

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

अथवा, $IX = A^{-1}B$

अथवा, $X = A^{-1}B$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

यदि $4x + 3y = 5$ र $y - 3x = -7$ भए x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

दिइएका समीकरणलाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

A X = B मानौँ

$$X = A^{-1}B \text{ .... (i)}$$

यहाँ,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4+9}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

समीकरण (i) बाट,

$$X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

अथवा, $X = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 \times 5 + (-3)\times(-7) \\ 3 \times 5 + 4 \times (-7) \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 + 21 \\ 15 - 28 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 26 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{13} \times 26 \\ \frac{1}{13} \times (-13) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \quad x = 2, y = -1$

उदाहरण 2

हल गर्नुहोस् :

$$\mathbf{\frac{5}{y} = \frac{1}{x} - 1, \quad \frac{5}{y} = \frac{2}{x} - 4}$$

समाधान

मानौँ $\frac{1}{x} = a$ र $\frac{1}{y} = b$ छ ।

$5b = a - 1, \quad 5b = 2a - 4$

अथवा, $a - 5b = 1, \quad 2a - 5b = 4$

दिइएका समीकरणलाई मेट्रिक्सको स्वरूपमा लेख्दा,

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A \quad X = B$ मानौँ

$X = A^{-1} B$ .... (i)

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ यदि $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ भएमा

त्यसैले, $A^{-1} = \frac{1}{1 \times (-5) - 2 \times (-5)} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{-5 + 10} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

समीकरण (i) बाट :

$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \times 1 + 5 \times 4 \\ -2 \times 1 + 1 \times 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 + 20 \\ -2 + 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \times 15 \\ \frac{1}{5} \times 2 \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$a = 3$ अथवा, $\frac{1}{x} = 3, \; x = \frac{1}{3}$

$b = \frac{2}{5}$ अथवा, $\frac{1}{y} = \frac{2}{5}, y = \frac{5}{2}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

अभ्यास 3.3

1. तल दिइएका मेट्रिक्सहरूको विपरीतमेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् ।

(क) $x + y = 5$ (ख) $x - 3y = 0$

$x - y = -1$ $4x + y = 26$

(ग) $x + y = 6, \quad 2x - y = 3$

(घ) $2y = 3 - 3x,\ y = 4x + 7$

(ङ) $3x + 2y = 1,\quad 7x + 5y = 4$

2. मेट्रिक्स विधिबाट हल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8,\quad \frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$ (ख) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1,\quad \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{24}$

(ग) $\frac{5}{2}x - y = 5,\quad \frac{4}{3} - y = -2$ (घ) $x + \frac{2y}{3} = \frac{3}{5},\quad \frac{2x}{3} + \frac{5y}{9} = \frac{11}{9}$

(ङ) $\frac{x + 2y}{8} = 1 = y - x$ (च) $x + \frac{2}{3}y = 1,\quad \frac{2x}{3} + \frac{5y}{9} = 1$

उत्तरहरू :

1. (क) $(x, y) = (2, 3)$ (ख) $(x, y) = (6, 2)$ (ग) $(x, y) = (3, 3)$
   (घ) $(x, y) = (-1, 3)$ (ङ) $(x, y) = (-3, 5)$
2. (क) $(x, y) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ (ख) $(x, y) = (8, 5)$ (ग) $(x, y) = (5, 10)$
   (घ) $(x, y) = (1, 1)$ (ङ) $(x, y) = (2, 3)$ (च) $(x, y) = (-1, 3)$

3.4 दुई चलयुक्त युगपत रेखीय समीकरणको हल कामरको नियमबाट (Solving simultaneous equation in two variables by Cramer's rule)

मानौँ $a_1x + b_1y = c_1$ र $a_2x + b_2y = c_2$

x र y मा दुई चलयुक्त रेखीय समीकरणहरू हुन् ।

$a_1x + b_1y = c_1$ ....(i)

$a_2x + b_2y = c_2$ ....(ii)

समीकरण (i) लाई a_2 र समीकरण (ii) लाई a_1 ले गुणन गरि आएको समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) लाई घटाउँदा :

$$\begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \\ \underline{(-)\qquad\quad (-)\qquad\quad (-)} \\ a_2b_1y - a_1b_2 \qquad = a_2c_1 - a_1c_2 \end{array}$$

अथवा, $(a_2b_1 - a_1b_2)y = a_2c_1 - a_1c_2$

अथवा, $y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}$

अथवा, $y = \dfrac{-(a_1c_2 - a_2c_1)}{-(a_1b_2 - a_2b_1)}$

$= \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{D_1}{D}$ मानौँ

समीकरण (i) लाई b_2 र समीकरण (ii) लाई b_1 ले गुणन गरि आएको समीकरण (i) बाट समीकरण (ii) लाई घटाउँदा :

$$\begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \\ \underline{(-) \qquad (-) \qquad (-)} \\ a_2b_1x - a_2b_1x \quad = \quad c_1b_2 - c_2b_1 \end{array}$$

अथवा, $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$

अथवा, $y = \dfrac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$= \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{D_1}{D}$ मानौँ

$a_1x + b_1y = c_1$ र $a_2x + b_2y = c_2$ मा $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ र $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ भए $x = \dfrac{D_1}{D}$ र $y = \dfrac{D_2}{D}$ हुन्छ । यस नियमलाई क्रामरको नियम भन्दछन् । यो नियम लागु हुन $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \neq 0$ अनिवार्य सर्त हो ।

उदाहरण 1

$2(x - 1) = y$ र $3(x - 1) = -4y$ लाई क्रामरको नियम प्रयोग गरी समाधान गर्नुहोस् ।

समाधान

दिइएका समीकरणहरूलाई स्तरीय स्वरूपमा लेख्दा

$2(x - 1) = y$

अथवा, $2x - 2 = y$

$2x - y = 2$ .... (i)

$3(x - 1) = -4y$

अथवा, $3x - 3 = -4y$

$3x + 4y = 4$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट D, D_1 र D_2 पत्ता लगाउँदा

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times 4 - (-1) \times 3$

$= 8 + 3 \qquad = 5\ (\neq 0)$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times 4 - 3 \times (-1)$

$= 8 + 3 \qquad = 5$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times 3 - 3 \times 2$

$= 6 - 6$

$= 0$

क्रामरको नियमअनुसार,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{5} = 0$$

समीकरण (i) मा x र y को मान राख्दा $2(1 - 1) = 0$, अथवा $0 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 0$

उदाहरण 2

क्रामरको नियम प्रयोग गरी हल गर्नुहोस्।

$$\frac{x+1}{8} = \frac{y+3}{5} = \frac{x-y}{4}$$

समाधान

यहाँ, $\frac{x+1}{8} = \frac{x-y}{4}$

अथवा, $4(x + 1) = 8(x - y)$

अथवा, $x + 1 = 2(x - y)$

अथवा, $x + 1 = 2x - 2y$

अथवा, $2x - x - 2y - 1 = 0$

अथवा, $x - 2y = 1$................ (i)

फेरि, $\frac{y+3}{5} = \frac{x-y}{4}$

अथवा, $4(y + 3) = 5(x - y)$

अथवा, $4y + 12 = 5x - 5y$

अथवा, $5x - 5y - 4y = 12$

अथवा, $5x - 9y = 12$ .... (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट क्रामरको नियम अनुसार :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-9) - (-2) \times 5$$

$$= -9 + 10 \quad = 1 (\neq 0)$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 12 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-9) - 12 \times (-2)$$

$$= -9 + 24 \quad = 15$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 12 - 5 \times 1$$

$$= 12 - 5 \quad = 7$$

$$\therefore \quad x = \frac{D_1}{D} \quad = \frac{15}{1} \quad = 15$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{7}{1} \quad = 7$$

x र y का मानहरू सुरुको समीकरणमा राख्दा :

अथवा, $\frac{x+1}{8} = \frac{y+3}{5} = \frac{x-y}{4}$

अथवा, $\frac{15+1}{8} = \frac{7+3}{5} = \frac{15-7}{4}$

अथवा, $\frac{16}{8} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4}$

अथवा, $2 = 2 = 2$

$\therefore \quad (x, y) = (15, 7)$

अभ्यास 3.4

1. यदि $a_1x + b_1y = c_1$ र $a_2x + b_2y = c_2$ भए क्रामरको नियम अनुसार x र y कति कति हुन्छ लेख्नुहोस्।

2. $a_1x + b_1y = c_1$ र $a_2x + b_2y = c_2$ मा क्रामरको नियम प्रयोग गर्न सकिने अनिवार्य सर्त के हो ? लेख्नुहोस्।

3. क्रामरको नियम प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् :

   (क) $x + y = 10; \quad x - y = 4$

   (ख) $x + y = 6; \quad 2x - y = 3$

   (ग) $3x + 5y = 21; 2x + 3y = 13$

   (घ) $4x + 3y = 5; \quad y - 3x = -7$

   (ङ) $3x + 20 = 4y + 19; \quad 4(x + 2) = 3(y + 3)$

   (च) $2x + 5y - 5 = 0; \quad 3x - 2y - 1 = 0$

4. क्रामरको नियम प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् :

   (क) $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1$ र $\frac{3}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{24}$ [Hint: $\frac{1}{x} = a$ र $\frac{1}{y} = 4$]

   (ख) $\frac{5}{2}x - y = 5$ र $x - y = -2$ (ग) $x - y = 5 = 3x + 2y$

   (घ) $\frac{x + 2y}{8} = 1 = y - x$

5. आफ्नो दैनिक जीवनमा प्रयोग गरिने कुनै दुईओटा वस्तुहरूको मूल्यलाई x र y मानी मूल्यसँग सम्बन्धित युगपतरेखीय समीकरणहरू बनाउनुहोस्। ती समीकरणहरूलाई क्रामरको नियम प्रयोग गरी हल गर्नुहोस्।

उत्तरहरू :

1. (क) $(x, y) = (7, 3)$ (ख) $(x, y) = (3, 3)$ (ग) $(x, y) = (2, 3)$

   (घ) $(x, y) = (2, -1)$ (ङ) $(x, y) = (1, 1)$ (च) $(x, y) = (1, 1)$

4. (क) $(x, y) = (8, 6)$ (ख) $(x, y) = (6, 10)$ (ग) $(x, y) = (3, -2)$

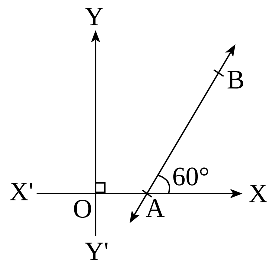
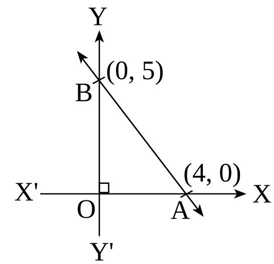
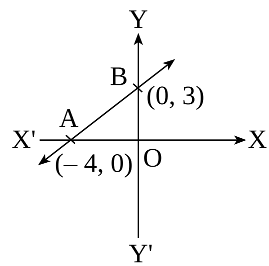
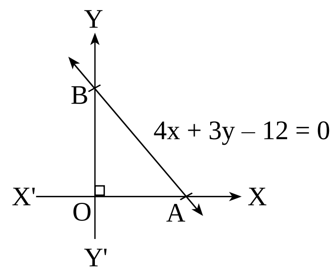
(घ) $(x, y) = (2, 3)$

एकाइ 4

निर्देशाङ्क ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)

4.0 पुनरावलोकन (Review)

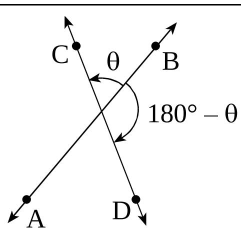
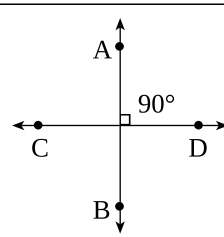
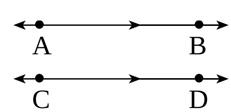
तल दिइएको अवस्थाहरूमा सिधा रेखा AB को झुकाव पत्ता लगाउनुहोस्। प्राप्त झुकावका बारेमा साथीहरूका बिचमा छलफल गर्नुहोस्।

(क)		(ख)	
(ग)		(घ)	

सरल रेखाहरूको समीकरणलाई $y = mx + c$, $ax + by + c = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ र $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ को स्वरूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ।

4.1 दुई सरल रेखाहरूबिचको कोण (Angle between two straight lines)

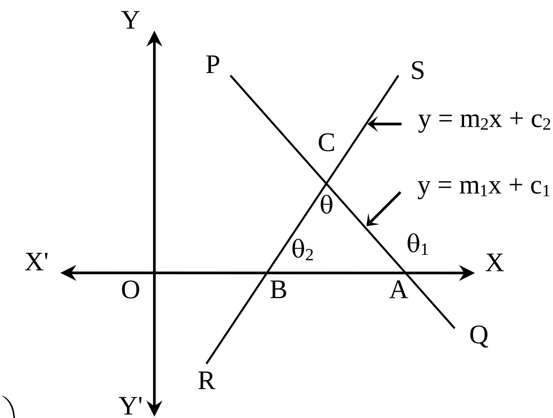
तल दिइएका अवस्थाहरू अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस्।

		
चित्रमा, रेखाहरू AB र CD बिचको न्यूनकोण θ र अधिक कोण $180° - \theta$ छ।	चित्रमा, रेखाहरू AB र CD बिचको कोण 90° छ।	चित्रमा, रेखाहरू AB र CD बिचको कोण 0° अथवा 180° छ।

- दुईओटा रेखाहरू बिचको कोण 'θ' एक न्यूनकोण भए $\tan \theta$ कति होला ? धनात्मक अथवा ऋणात्मक ?
- दुईओटा रेखाहरू बिचको कोण 'θ' एक अधिककोण भए $\tan \theta$ कति होला ? धनात्मक अथवा ऋणात्मक ?
- $\theta = 90°$ र $0°$ भएमा $\tan \theta$ कति होला ? छलफल गर्नुहोस्।

मानौँ, $y = m_1x + c_1$ र $y = m_2 + c_2$ दुई सीधा रेखाहरू छन्, जहाँ $m_1 = \tan \theta_1$ र $m_2 = \tan \theta_2$ छ। यी दुई रेखाहरू बिचको कोण 'θ' छ।

ΔABC मा $\theta + \theta_2 = \theta_1$ [बाह्य कोण = भित्री अनासन्न कोणहको योगफल भएकोले]



अथवा, $\theta = \theta_1 - \theta_2$

दुबैतिर 'tan' लिँदा

$$\tan \theta = \tan (\theta_1 - \theta_2)$$

$$\tan \theta = \frac{\tan Q_1 - \tan Q_2}{1 + \tan Q_1 . \tan Q_2}$$

अथवा, $\tan \theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$

$$\tan (180° - \theta) = -\tan \theta$$

$$= -\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

दुईओटा रेखाहरू बिचको कोण θ अथवा $180° - \theta$ हुने भएकाले $\tan \theta = \pm \left(\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$ हुन्छ।

दुईओटा रेखाहरू समानान्तर हुने अवस्था

$\theta = 0°$ अथवा $180°$ भएमा, $m_1 - m_2 = 0$, $m_1 = m_2$ हुन्छ।

दुईओटा रेखाहरू लम्ब हुने अवस्था

$\theta = 90°$ भएमा $1 + m_1m_2 = 0$ अथवा, $m_1m_2 = -1$ हुन्छ।

यदि $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ र $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

दुई सिधा रेखाहरू भए $m_1 = -\dfrac{a_1}{b_1}$ र $m_2 = -\dfrac{a_2}{b_2}$ हुन्छ।

$$\tan \theta = \pm \left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

$$= \pm \left(\frac{-\frac{a_1}{b_1} - \left(-\frac{a_2}{b_2}\right)}{1 + \left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)} \right)$$

$$= \pm \left(\frac{\frac{a_2}{b_2} - \frac{a_1}{b_1}}{1 + \frac{a_1a_2}{b_1b_2}} \right)$$

$$= \pm \left(\frac{\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1b_2}}{\frac{b_1b_2 + a_1a_2}{b_1b_2}} \right)$$

$$= \pm \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1b_2} \times \frac{b_1b_2}{b_1b_2 + a_1a_2} \right)$$

$$= \pm \left(\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2} \right)$$

उदाहरण 1

रेखाहरू $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$ र $y + 3 = 0$ बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$ रेखाको झुकाव (m_1) $= -\frac{(\text{x-coefficient})}{(\text{y-coefficient})}$

$$= -\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)$$

$$= \sqrt{3}$$

$y + 3 = 0$ रेखाको झुकाव (m_2) $= -\left(\frac{\text{x-u'0ff+s (coefficient of x)}}{\text{y-u'0ff+s (coefficient of y)}}\right)$

$$= -\left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

यहाँ, $m_1 \times m_2 = \sqrt{3} \times 0 = 0$

$m_1 + m_2 = \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3}$

हामीलाई थाहा छ,

दुईओटा रेखाहरूबिचको कोण (θ) भए

$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{\sqrt{3} - 0}{1 + \sqrt{3} \times 0}\right)$$

$= \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + 0}\right)$

$= \pm (\sqrt{3})$

$\tan \theta = \sqrt{3}$ भए $\tan \theta = \tan 60°, \theta = 60°$

र $\tan \theta = -\sqrt{3}$ भए $\tan \theta = -\tan 60°$

$= \tan (180° - 60°)$

$= \tan 120°, \theta = 120°$

त्यसैले, दुईओटा रेखाहरू बिचको न्यूनकोण 60° र अधिककोण 120° छ।

उदाहरण 2

(a) रेखाहरू $2x - 3y - 5 = 0$ र $2x - 3y - 7 = 0$ एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

(b) रेखाहरू $7x + 8y - 63 = 0$ र $8x - 7y - 1 = 0$ एकआपसमा लम्ब हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

समाधान

(a) $2x - 3y - 5 = 0$ को झुकाव (m_1) $= \left(\frac{-\text{x-u'0ffË}}{\text{y-u'0ffË}}\right)$

$= \frac{-2}{(-3)} = \frac{2}{3}$

$2x - 3y - 7 = 0$ को झुकाव (m_2) $= \left(\frac{-\text{x-u'0ffË}}{\text{y-u'0ffË}}\right)$

$= -\left(\frac{2}{-3}\right)$

$= \frac{2}{3}$

$\therefore$ $m_1 = m_2$, त्यसैले रेखाहरू $2x - 3y - 5 = 0$ र $2x - 3y - 7 = 0$ एकआपसमा समानान्तर छन्
।

(b) $7x + 8y - 63 = 0$ को झुकाव (m_1) $= \left(\frac{-\text{x-u'0ffË}}{\text{y-u'0ffË}}\right)$

$= \left(\frac{7}{8}\right)$

$8x - 7y - 1 = 0$ को झुकाव (m_2) $= \left(\frac{-\text{x-u'0ffË}}{\text{y-u'0ffË}}\right)$

$= -\left(\frac{8}{-7}\right)$

$$= \frac{8}{7}$$

$$m_1m_2 = -\frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = -1$$

त्यसैले, दुवै रेखाहरू एकआपसमा लम्बवत छन् ।

उदाहरण 3

तल दिइएको अवस्थामा 'a' को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $4x + 3y = 0$ र $3x + ay = 5$ एकआपसमा लम्ब छन् ।

(b) $5x + ay - 6 = 0$ र $5x - 3y - 8 = 0$ एकआपसमा समानान्तर छन् ।

समाधान

(a) यहाँ $4x + 3y = 0$ को झुकाव (m_1) = 0 को झुकाव (m_1)

$$= \left(\frac{-\text{ x-गुणाङ्क}}{\text{y-गुणाङ्क}}\right) = -\frac{4}{3}$$

$3x + ay = 5$ को झुकाव (m_2) $= \left(\frac{-\text{ x-गुणाङ्क}}{\text{y-गुणाङ्क}}\right) = -\frac{3}{a}$

दुवै रेखाहरू एकआपसमा लम्ब भएकाले,

$$m_1m_2 = -1$$

अथवा, $\left(-\frac{4}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{a}\right) = -1$

अथवा, $\frac{12}{3a} = -1$

अथवा, $12 = -3a$

अथवा, $a = -4$

(b) $5x + ay - 620$ को झुकाव (m_2) $= \left(\frac{-\text{ x-गुणाङ्क}}{\text{y-गुणाङ्क}}\right)$

$$= -\left(\frac{5}{a}\right)$$

$5x - 3y - 8 = 0$ को झुकाव (m_2) $= \left(\frac{-\text{ x-गुणाङ्क}}{\text{y-गुणाङ्क}}\right)$

$$= -\left(\frac{5}{-3}\right) = \frac{5}{3}$$

दुवै रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर भएकाले,

$$m_1 = m_2$$

अथवा, $-\frac{5}{a} = \frac{5}{3}$

अथवा, $a = -3$

उदाहरण 4

विन्दु (1, – 4) बाट जाने र रेखा 2x + 3y = 5 सँग 45° को कोण बनाउने रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

विन्दु (1, – 4) भएर जाने रेखाको समीकरण $y - y_1 = m(x - x_1)$

अथवा, $y - (-4) = m(x - 1)$

अथवा, $y + 4 = m(x - 1)$ ...(i) छ ।

फेरि, रेखा $2x + 3y = 1$ को झुकाव $(m_2) = -\frac{2}{3}$

दुवै रेखाहरू बिचको कोण 45° छ ।

त्यसैले, $\tan 45° = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$

$$1 = \pm\left(\frac{m - \left(\frac{-2}{3}\right)}{1 + m\left(\frac{-2}{3}\right)}\right)$$

अथवा, $1 = \pm\left(\frac{m + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2m}{3}}\right)$

अथवा, $1 = \pm\left(\frac{3m + 2}{3} \times \frac{3}{3 - 2m}\right)$

अथवा, $1 = \pm\left(\frac{3m + 2}{3 - 2m}\right)$

(+ve) चिह्न लिँदा

$$1 = \frac{3m + 2}{3 - 2m}$$

अथवा, $3 - 2m = 3m + 2$

अथवा, $3 - 2 = 3m + 2m$

अथवा, $1 = 5m$

अथवा, $\frac{1}{5} = m$

m को मान समीकरण (i) मा राख्दा

$$y + 4 = \frac{1}{5}(x - 1)$$

अथवा, $5y + 20 = x - 1$

अथवा, $x - 5y - 21 = 0$

(– ve) चिह्न लिँदा

$$1 = -\left(\frac{3m + 2}{3 - 2m}\right)$$

अथवा, $3 - 2m = -3m - 2$

अथवा, $3m - 2m = -2 - 3$

अथवा, $m = -5$

m को मान समी (i) मा राख्दा

$$y + 4 = -5(x - 1)$$

अथवा, $y + 4 = -5x + 5$

अथवा, $5x + y + 4 - 5 = 0$

अथवा, $5x + y - 1 = 0$

$\therefore$ इस्ट समीकरण, $x - 5y - 21 = 0$ र $5x + y - 1 = 0$

उदाहरण 5

(a) विन्दुहरू (– 7, 5) र (2, 2) जोड्ने रेखासँग समानान्तर हुने र (– 4, 1) भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

(b) विन्दु (2, – 3) भई जने र विन्दुहरू (5, 7) र (– 6, 3) जोड्दा आउने रेखासँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

(a) विन्दुहरू (– 7, 5) र (2, 2) जोड्ने रेखाको झुकाव (m) $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 5}{2 - (-7)}$

$$= -\frac{-3}{2 + 7} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$$

उक्त रेखासँग समानान्तर हुने रेखाको झुकाव (m) $= -\frac{1}{3}$

$(-4, 1)$ भएर जाने र झुकाव $-\frac{1}{3}$ भएको रेखाको समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

अथवा, $y - 1 = -\frac{1}{3}(x + 4)$

अथवा, $3(y - 1) = -1(x + 4)$

अथाव, $3y - 3 = -x - 4$

अथवा, $x + 3y - 3 + 4 = 0$

अथवा, $x + 3y + 1 = 0$

$\therefore$ इस्ट समीकरण $x + 3y + 1 = 0$

वैकल्पीक विधिः

$(-7, 5)$ र $(2, 2)$ भएर जाने रेखाको समीकरण,

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अथवा, $y - 5 = \frac{2 - 5}{2 - (-7)}(x - (-7))$

अथवा, $y - 5 = \frac{-3}{9}(x + 7)$

अथवा, $y - 5 = -\frac{1}{3}(x + 7)$

अथवा, $3y - 15 = -x - 7$

अथवा, $x + 3y - 15 + 7 = 0$

अथवा, $x + 3y - 8 = 0$

$x + 3y - 8 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण, $x + 3y + k = 0$...(i)

समीकरण (i) विन्दु $(-4, 1)$ भएर जान्छ।

त्यसैले, $-4 + 3 \times 1 + k = 0$

अथवा, $-4 + 3 + k = 0$

अथवा, $k = 1$

$\therefore$ इस्ट समीकरण, $x + 3y + 1 = 0$

(b) (5, 7) र (– 6, 3) जोड्ने रेखाको झुकाव (m) = $\frac{3-7}{-6-5} = \frac{-4}{-11} = \frac{4}{11}$

उक्त रेखासँग लम्ब हुने रेखाको झुकाव = $-\frac{11}{4}$ $[m \times \frac{4}{11} = -1 = -\frac{11}{4}]$

विन्दु (2, – 3) भएर जाने र झुकाव $-\frac{11}{4}$ भएको रेखाको समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

अथवा, $y + 3 = -\frac{11}{4}(x - 2)$

अथवा, $4(y + 3) = -11(x - 2)$

अथवा, $4y + 12 = -11x + 22$

अथवा, $11x + 4y + 12 - 22 = 0$

अथवा, $11x + 4y - 10 = 0$

∴ इस्ट समीकरण $11x + 4y - 10 = 0$

वैकल्पिक विधिः

(5, 7) र (– 6, 3) भएर जाने रेखाको समीकरण,

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

अथवा, $y - 7 = \frac{3-7}{-6-5}(x - 5)$

अथवा, $y - 7 = \frac{-4}{-11}(x - 5)$

अथवा, $11(y - 7) = 4(x - 5)$

अथवा, $11y - 77 = 4x - 20$

अथवा, $4x - 11y - 20 + 77 = 0$

अथवा, $4x - 11y + 57 = 0$ ...(i)

समीकरण (i) सँग लम्ब रेखाको समीकरण,

$-11x - 4y + k = 0$ ...(ii)

[$ax + by + c = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाहरूको समीकरण, $bx - ay + k = 0$ हुने भएकाले]

समीकरण (ii) विन्दु (2, – 3) भएर जान्छ।

त्यसैले, $-11 \times 2 - 4(-3) + k = 0$

अथवा, $-22 + 12 + k = 0$, $k = 12$

समी (ii) बाट, $-11x - 4y + 10 = 0$

अथवा, $-[11x + 4y - 10] = 0$

अथवा, $11x + 4y - 10 = 0$ इस्ट समीकरण हुन्छ ।

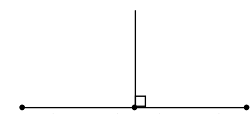
उदाहरण 6

विन्दुहरू (– 2, 4) र (2, 0) जोड्ने रेखाको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहा, विन्दुहरू (– 2, 4) र (2, 0) जोड्ने रेखाको खण्डको मध्य विन्दु रेखाखण्डको मध्यविन्दु

$$= \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{4}{2}\right) = (0, 2)$$



उक्त रेखाको झुकाव (m) = $\frac{0-4}{2-(-2)} = \frac{-4}{4} = -1$

उक्त रेखाको लम्बार्धकको झुकाव $(m_1) = 1$ $[m \times (-1) = -1, m_1 = 1]$

लम्बार्धक विन्दु (0, 2) भएर जान्छ, त्यसैले, लम्बार्धकको समीकरण,

$y - y_1 = m(x - x_1)$

अथवा, $y - 2 = 1(x - 0)$

अथवा, $y - 2 = x$

अथवा, $x - y + 2 = 0$ हुन्छ ।

अभ्यास 4.1

1. (a) यदि $y = m_1x + c_1$ र $y = m_2x + c_2$ दुई रेखाहरू भए यी दुई रेखाहरू बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् । ती दुइ रेखाहरू समानान्तर हुने र लम्ब हुने अवस्था लेख्नुहोस् ।

   (b) रेखाहरू $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ र $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ एकआपसमा समानान्तर हुने अवस्था लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका सिधा रेखाहरू बिचको कोण (θ) पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (a) $x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ र $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$ [30°, 150°]

   (b) $4y + 8 = 0$ र $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ [60°, 120°]

   (c) $3x + y - 7 = 0$ र $x + 2 + 9 = 0$ [45°, 135°]

   (d) $y = (2 - \sqrt{3})x + 4$ र $y = (2 + \sqrt{3})x - 7$ [60°, 120°]

   (e) $3x - 2y - 5 = 0$ र $4x + y - 7 = 0$ [47.73°, 132.27°]

(f) $x - 5y + 3 = 0$ र $x - 3y - 4 = 0$ [7.12°, 172.88°]

(g) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ र $x \sin \alpha - y \cos \alpha = q$ [90°]

(h) $(1 - \sin^2 \alpha)x + \cos^2\alpha\ y = a$ र $\sin^2 \alpha\ x - (1 - \cos^2 \alpha)y = b$ [90°]

उत्तरहरू :

1. (a) [30°, 150°] (b) [60°, 120°] (c) [45°, 135°]
(d) [60°, 120°] (e) [47.73°, 132.27°] (f) [7.12°, 172.88°]
(g) [90°] (h) [90°]

3. तल दिइएका रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

(a) $x - 5y - 3 = 0$ र $10y - 2x - 13 = 0$

(b) $2x + 3y = 5$ र $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5$

(c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ र $bx + ay = ab$

4. तल दिइएका रेखाहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

(a) $7x + 8y - 63 = 0$ र $8x - 7y - 1 = 0$

(b) $y = x$ र $y = -x$

(c) $(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)y = 0$ र $(2 - \sqrt{3})x + y = 5$

(d) $x \sin \theta + y \cos \theta = p$ र $x \cos \theta - y \tan \theta \,.\, \cos \theta = 4$

तल दिइएको अवस्थामा 'k' को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

5. $kx + 3y - 8 = 0$ र $2y - 3x - 11 = 0$ एकआपसमा समानान्तर छन्।

5. $\frac{-9}{2}$

6. $2kx - y = 19$ र $(k - 1)x + 3y = 0$ एकआपसमा समानान्तर छन्।

6. $\frac{1}{7}$

7. $3y - 2x = 4$ र $4y - km = 2$ एकआपसमा लम्ब छन्।

7. -6

8. $(k + 2)x - 3y = 2$ र $3x - (k - 4)y = -1$ एकआपसमा लम्ब छन्।

8. 1

9. $(2 + \sqrt{3})x + (2 - \sqrt{3})y = 5$ र $(2 - \sqrt{3}x - ky = 1$ एकआपसमा लम्ब छन्।

9. $2 + \sqrt{3}$

10. (a) विन्दु (2, 3) भएर जाने र रेखा $5x - 4y + 3 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $5x - 4y + 2 = 0$]

(b) विन्दु (– 1, 2) भएर जाने र रेखा $2x + 3y - 7 = 0$ सँग समानान्तर हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $2x + 3y - 4 = 0$]

11. (a) सरल रेखा $4x - 3y - 10 = 0$ सँग लम्ब भई विन्दु (2, 3) बाट जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $3x + 4y - 18 = 0$]

(b) विन्दु (4, 6) बाट जाने र रेखा $x - 2y - 2 = 0$ सँग लम्ब हुने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $2x - y - 14 = 0$]

12. (a) विन्दु (2, 3) भएर जाने र $x - 3y - 2 = 0$ सँग 45° को कोण बनाउने रेखाको समीकरणहरू पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $x + 2y - 8 = 0$, $2x - y - 1 = 0$]

(b) समीकरण $x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ भएको रेखासँग 30° को कोण बनाउने र विन्दु (1, 0) बाट जाने रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $y = 0$, $\sqrt{3}x - y = \sqrt{3}$]

13. विन्दुहरू (2, 3) र (10, 15) जोड्ने रेखाखण्डको लम्बार्धकको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

[Ans: $2x + 3y - 39 = 0$]

14. A(2, 3), B(– 4, 1) र C(2, 0) शीर्षविन्दुहरू भएको त्रिभुज ABC को शीर्षविन्दु (2, 3) बाट खिचिएको उचाइको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $6x - y - 9 = 0$]

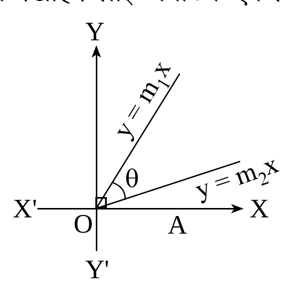
15. विन्दुहरू (3, – 7) र (– 5, 3) जोड्ने रेखाखण्डसँग लम्बार्धक भएर जाने रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $4x - 5y - 6 = 0$]

16. एउटा त्रिभुजका तीनओटा शीर्ष विन्दुहरू लेख्नुहोस् । उक्त त्रिभुजका लम्बार्धकहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । के तीनओटै लम्बार्धकहरू कुनै विन्दुमा भेट्छन् ? कारण लेख्नुहोस् ।

17. दुईओटा रेखाहरू बिचको कोणका बारेमा उदाहरण सहित व्याख्या गर्नुहोस् ।

4.2 जोडा रेखाहरूको समीकरण (Equation of pair of straight lines)

मानौँ $y = m_1x$ र $y = m_2x$ उद्गम विन्दु भएर जाने रेखाहरू छन् । दुवै रेखाहरूलाई जनाउने एकल समीकरण के होला ? छलफल गरौँ ।



$y - m_1x = 0$ र $y - m_2x = 0$ लाई एक–आपसमा गुणन गर्दा

$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$

अथवा, $y^2 - m_1xy - m_2xy + m_1m_2x^2 = 0$

अथवा, $y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0$ ...(1)

समीकरण (1), x र y को समघातीय वर्ग समीकरण हो । उक्त समीकरणलाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ को स्तरीय स्वरूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ।

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ लाई

$\frac{a}{b}x^2 + \frac{2h}{b}xy + y^2 = 0$ ...(2) [$b \neq 0$] लेख्न सकिन्छ।

समीकरण (1) र (2) लाई तुलना गर्दा

$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ तथा $m_1m_2 = \frac{a}{b}$

$$(m_1 - m_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2$$

$$= \left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - \frac{4a}{b}$$

$$= \frac{4h^2}{b^2} - \frac{4a}{b}$$

$$= 4\left[\frac{h^2 - ab}{b^2}\right]$$

अथवा, $m_1 - m_2 = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}$

हामीलाई थाहा छ,

$$\tan\theta = \pm\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}}{1 + \frac{a}{b}}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{\frac{2\sqrt{x^2 - ab}}{b}}{\frac{b + a}{b}}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b} \times \frac{b}{a + b}\right)$$

$$= \pm\left(\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right)$$

यदि दुवै रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर भएमा,

$\tan\theta = 0$

अथवा, $\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} = 0$

अथवा, $2\sqrt{h^2 - ab} = 0$

अथवा, $h^2 - ab = 0$

अथवा, $h^2 = ab$ हुन्छ ।

$$\left(\frac{1}{2}\, xy\text{-गुणाङ्क}\right)^2 = (x^2\text{-गुणाङ्क})\,(y^2\text{-गुणाङ्क})$$

यदि दुवै रेखाहरू एकआपसमा लम्ब भएमा

$\cot\theta = 0$

अथवा, $\dfrac{a + b}{2\sqrt{h^2 - ab}} = 0$

$a + b = 0$

अथवा, x^2-गुणाङ्क + y^2-गुणाङ्क = 0 हुन्छ ।

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ मा

$b = 0$ भएमा, $ax^2 + 2hxy = 0$

अथवा, $x[ax + 2hy] = 0$

अथवा, $x = 0,\ y = -\dfrac{a}{2h}x$

दुवै रेखाहरू उद्‌गम विन्दु भएर जान्छन् ।

$b \neq 0$ भएमा पनि माथि दिइएझैँ $y = m_1x$ र $y = m_2x$ स्वरूपका रेखाहरू उद्‌गम विन्दुबाट जाने गरी प्राप्त हुन्छन् ।

उदाहरण 1

तलका जोडा समीकरणहरूलाई प्रतिनिधित्त्व गर्ने एउटै समीकरण लेख्नुहोस् ।

(a) $ax + by$ र $bx + ay = 0$

(b) $x + y + 2 = 0$ र $x + 2y - 1 = 0$

समाधान

(a) $ax = by$

अथवा, $by - ax = 0$

$\therefore \quad bx + ay = 0$

एकल समीकरण $(by - ax)\,(bx + ay) = 0$

अथवा, $by(bx + ay) - ax(bx + ay) = 0$

अथवा, $b^2xy + aby^2 - abx^2 - a^2xy = 0$

अथवा, $aby^2 + (b^2 - a^2)xy - abx^2 = 0$

आवश्यक समीकरण $aby^2 + (b^2 - a^2)xy - abx^2 = 0$ हुन्छ ।

(b) $x + y + 2 = 0$ र $x + 2y - 1 = 0$

$(x + y + 2)(x + 2y - 1) = 0$

अथवा, $x(x + 2y - 1) + y(x + 2y - 1) + 2(x + 2y - 1) = 0$

अथवा, $x^2 + 2xy - x + xy + 2y^2 - y + 2x + 4y - 2 = 0$

अथवा, $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 3y - 2 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

उदाहरण 2

तलका समीकरणहरूले जनाउने दुई सरल रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $\mathbf{33x^2 - 44xy + 11y^2 = 0}$

(b) $\mathbf{x^2 - 2\cot\alpha\, xy - 6y^2 = 0}$

समाधान

(a) $33x^2 - 44xy + 11y^2 = 0$

अथवा, $11(3x^2 - 4xy + y^2) = 0$

अथवा, $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$

अथवा, $3x(x - y) - y(x - y) = 0$

अथवा, $(x - y)(3x - y) = 0$

अथवा, $x - y = 0$ र $3x - y = 0$ इस्ट समीकरणहरू हुन् ।

(b) $x^2 - 2\cot\alpha\, xy - 6y^2 = 0$

अथवा, $-[y^2 + 2\cot\alpha\, xy - x^2] = 0$

अथवा, $y^2 + 2\cot\alpha\, xy - x^2 = 0$

अथवा, $\frac{y^2}{x^2} + 2\cot\alpha\, xy\,\frac{xy}{x^2} - \frac{x^2}{x^2} = 0$

अथवा, $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\cot\alpha\left(\frac{y}{x}\right) - 1 = 0$

अथवा, $\frac{y}{x} = \frac{-2\cot a \pm \sqrt{(2\cot a)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$

अथवा, $\frac{y}{x} = \frac{-2\cot a \pm \sqrt{4\cot^2 a + 4}}{2}$

अथवा, $\frac{y}{x} = \frac{-2 \cot a \pm 2\sqrt{1 + \cot^2 a}}{2}$

अथवा, $\frac{y}{x} = 2\,\frac{[-\cot a \pm \operatorname{cosec} h]}{2}$ [□ $1 + \cot^2 \alpha = \sec^2 \alpha$]

अथवा, $\frac{y}{x} = (-\cot \alpha \pm \operatorname{cosec} \alpha)$

अथवा, $y = (-\cot \alpha + \operatorname{cosec} \alpha)\, x$ र $y = (-\cot \alpha - \operatorname{cosec} \alpha)\, x$

आवश्यक समीकरणहरू हुन् ।

उदाहरण 3

तलका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरू बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(a) $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$ (b) $x^2 + 2 \sec \alpha\, xy + y^2 = 0$

समाधान

(a) $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$ लाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सँग तुलना गर्दा

$a = 3, h = -2$ र $b = 1$

हामीलाई थाहा छ, दुईओटा सरल रेखाहरू बिचको कोणको लागी (θ)

$\tan \theta = \pm \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$

अथवा, $\tan \theta = \pm \frac{2\sqrt{(-2)^2 - 3 \times 1}}{3 + 1}$

अथवा, $\tan \theta = \pm \frac{2\sqrt{4 - 3}}{4}$

अथवा, $\tan \theta = \pm \frac{1}{2}$

अथवा, $\tan \theta = \frac{1}{2}$ [+ ve पनि लिँदा]

अथवा, $\tan \theta = \tan 26.57°$

अथवा, $\theta = 26.57°$ अथवा, $(180 - 26.57)°$

$\therefore$ आवश्यक कोण $= 26.57°$ र $153.43°$

(b) $x^2 + 2 \sec \alpha\, xy + y^2 = 0$ लाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$a = 1, h = \sec \alpha$ र $b = 1$

आवश्यक कोण (θ) का लागि,

$\tan\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$

अथवा, $\tan\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{\sec^2 a + 1 \times 1}}{1 + 1}$

अथवा, $\tan\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{\sec^2 a - 1}}{2}$

अथवा, $\tan\theta = \pm\dfrac{2\tan a}{2}$

अथवा, $\tan\theta = \pm\tan\alpha$

(+ ve) चिह्न लिँदा,

$\tan\theta = \tan\alpha$

$\therefore\quad \theta = \alpha$

(– ve) चिह्न लिँदा,

$\tan\theta = -\tan\alpha$

अथवा, $\tan\theta = \tan(180° - \alpha)$

अथवा, $\theta = 180° - \alpha$

आवश्यक कोण α र $180° - \alpha$ हुन्।

उदाहरण 4

तल दिइएको अवस्थामा k को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

(a) $kx^2 - 8xy + 8y^2 = 0$ ले दिने सरल रेखाहरू सम्पाती छन्।

(b) $(k^2 - 1)x^2 + 2xy - (3k - 3)y^2 = 0$ ले खिदने सरल रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन्।

समाधान

(a) $kx^2 - 8xy + 8y^2 = 0$ लाई $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ सँग तुलना गर्दा,

$a = k,\ h = -4$ र $b = 8$

उक्त समीकरणले दिने रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर अथवा सम्पाती छन्। त्यसैले $h^2 = ab$ हुन्छ।

अथवा, $(-4)^2 = 8k$

अथवा, $16 = 8k$

अथवा, $k = 2$

(b) $(k^2 - 1)x^2 + 2xy - (3k - 3)y^2 = 0$ ले दिने सरल रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन्।

त्यसैले, x^2-गुणाङ्क + y^2-गुणाङ्क = 0 हुन्छ।

अथवा, $(k^2 - 1) + (3k - 3) = 0$

अथवा, $k^2 + 3k - 4 = 0$

अथवा, $k^2 + 4k - k - 4 = 0$

अथवा, $k(k + 4) - 1(k + 4) = 0$

अथवा, $(k + 4)(k - 1) = 0$

अथवा, $k = -4$ र 1

उदाहरण 5

$3x^2 + 8xy + 5y^2 = 0$ ले दिने सरल रेखासँग लम्ब हुने र उद्गम विन्दुबाट जाने जोडा रेखाको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

$3x^2 + 9xy + 5y^2 = 0$

अथवा, $3x^2 + 5xy + 3xy + 5y^2 = 0$

अथवा, $x(3x + 5y) + y(3x + 5y) = 0$

अथवा, $(3sx + 5y)(x + y) = 0$

अथवा, $y = -x$ र $y = -\frac{3}{5}x$

उक्त रेखाहरूको झुकावः $m_1 = -1$ र $m_2 = -\frac{3}{5}$

लम्ब रेखाहरूको झुकाव = 1 र $\frac{5}{3}$

लम्ब रेखाहरू समीकरण [$y - y_1 = m(x - x_1)$ बाट]

$y - 0 = 1(x - 0)$ र $y - 0 = \frac{5}{3}(x - 0)$

अथवा, $y - x = 0$ र $y - \frac{5}{3}x = 0$

अथवा, $y - x = 0$ र $3y - 5x = 0$

दुवै समीकरणहरूलाई गुणन गर्दा,

$(y - x)(3y - 5x) = 0$

अथवा, $y(3y - 5x) - x(3y - 5x) = 0$

अथवा, $3y^2 - 5xy - 3xy + 5y^2 = 0$

अथवा, $3y^2 - 8xy + 5x^2 = 0$ आवश्यक समीकरण हो ।

अभ्यास 4.2

1. (a) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने सरल रेखाहरू आपसमा सम्पती र लम्ब हुने अवस्था लेख्नुहोस् ।

   (b) समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ले जनाउने एक जोडी सरल रेखाहरू बिचको कोठा पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस् ।

2. तलका जोडा समीकरणहरूलाई प्रतिनिधित्व गर्ने एउटै समीकरण लेख्नुहोस् ।

   (a) $x + 3y = 0$ र $3x + y = 0$ [Ans: $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 0$]

   (b) $y - x = 0$ र $y = 2x$ [Ans: $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$]

   (c) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$ र $x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0$

   [Ans: $\sin \alpha \cos \alpha (x^2 + y^2) + xy = 0$]

   (d) $x + y + z = 0$ र $x + 2y + 1 = 0$ [Ans: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 3x + 5y + 2 = 0$]

तलका समीकरणहरूले जनाउने दुई सरल रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$ [Ans: $(3x + y) = 0$ र $(x + 2y) = 0$]

4. $x^2 - 13xy + 42y^2 = 0$ [Ans: $(x - 4y) = 0$ र $(x - 3y) = 0$]

5. $4x^2 - 24xy + 11y^2 = 0$ [Ans: $2x - y = 0$ र $2x - 11y = 0$]

6. $x^2 + 2xy \sec \theta + y^2 = 0$ [Ans: $x + y \sec \theta + y \tan \theta = 0$, $x + y \sec \theta - \tan \theta = 0$]

7. $y^2 \sin^2 \theta + (1 + \cos^2 \theta)x^2 - 2xy = 0$ [Ans: $x - y = 0$, $x - y + \cos^2 \theta (x + y) = 0$]

8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ [Ans: $y - h \pm \sqrt{\frac{h^2 - ab}{b}}$]

तल दिइएका समीकरणहरूले दिने सरल रेखाहरूबिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$ [Ans: 45°, 135°]

10. $4x^2 - 5xy + y^2 = 0$ [Ans: $\tan^{-1}\left(\pm \frac{3}{5}\right)$]

11. $3x^2 - 4xy + y^2 = 0$ [Ans: $\tan^{-1}\left(\pm \frac{1}{2}\right)$]

12. $x^2 + 2xy \operatorname{cosec} \beta + y^2 = 0$ [Ans: $\pm (90° - \beta)$]

13. $x^2 - y^2 - 2xy \tan \alpha + y^2 \sec^2 \alpha = 0$ [Ans: 0°]

तल दिइएको अवस्थामा k को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

14. समीकरण $kx^2 + 5xy - 6y^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू सम्पाती छन् । [Ans: $\frac{-25}{24}$]

15. $kx^2 + 16y^2 - 24xy = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू सम्पाती छन् ।

16. $(k + 5)x^2 - 5xy + (3k - 1)y^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन् । [Ans: 3]

17. $(3k - 2)x^2 - 48xy - k^2y^2 = 0$ ले दिने जोडा रेखाहरू एकआपसमा लम्ब छन् । [Ans: – 2, – 1]

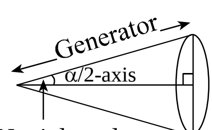
18. उद्गम विन्दुबाट जाने र $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$ ले दिने रेखाहरूसँग लम्ब हुने जोडा रेखाहरूको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$]

19. समीकरण $x^2 - y^2 = 0$ ले प्रतिनिधित्व गर्ने रेखाहरूसँग लम्ब भई विन्दु (4, 5) भएर जाने रेखाहरूको एउटै समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् । [Ans: $2x^2 - xy - y^2 - 11x + 14y - 13 = 0$]

20. x र y मा समघातीय एउटा समीकरण लेख्नुहोस् । उक्त रेखासँग लम्ब भएर जाने रेखाहरूको एउटै समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

4.3 साङ्किक (Conic Sections)

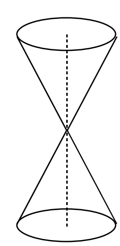
तल दिइएको समकोणी सोली (Right Cone) का बारेमा छलफल गरौँ ।



यी पदावलीहरूलाई चित्रमा पत्ता लगाई लेखौँ

- Generator
- Axis
- Vertical angle
- Semi-vertical angle

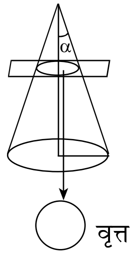
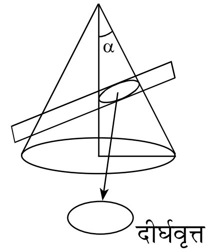
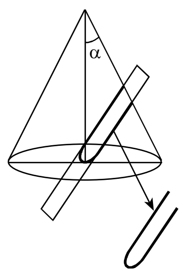
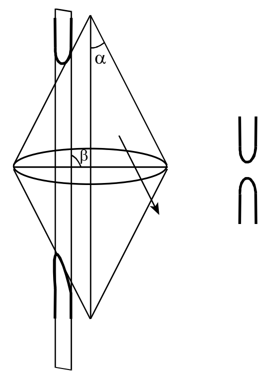
यस्ता आकृतिहरू हामीले हाम्रो दैनिक जीवनमा कहाँकहाँ देखेका छौँ ? पत्ता लगाऔँ ।



चित्रमा दुईओटा समकोणी सोलीहरू पनि अवलोकन गर्न सकिन्छ । दुवै प्रकारका सोलीहरूलाई चक्कुले काट्दा हामी फरकफरक क्षेत्र (Section) हरू पाउछौँ । उक्त कार्यलाई माटोको सोली, कागजको ठोस सोली, र अन्य विधिबाट पनि प्रयोगात्मक रूपमा गर्न सकिन्छ ।

सोलीको ठाडो उचाईलाई अक्ष र छड्के उचाइलाई 'जेनेरेटर' भनिन्छ । अक्ष र जेनेरेटर बिच बनेको कोणलाई अर्धशिर्षकोण (Semi-vertical angle) भनिन्छ । समकोणी

सोलीलाई समतलीय सतहले काट्दा बन्ने विभिन्न प्रकारका साङ्किकका बारेमा तल दिइएझैँ छलफल गर्न सकिन्छ।

	
समतलीय सतहले समकोणी सोलीलाई अक्षसँग लम्ब हुने गरि काट्दा बनेको साङ्किक 'वृत्त' हुन्छ।	समतलीय सतहले समकोणी सोलीलाई अर्ध शीर्षकोण भन्दा कम हुने गरी काट्दा बनेको कोण (α) (β) छ भने यसरी बनेको साङ्किक दीर्घवृत्त (Ellipse) हुन्छ।
	
समतलीय सतहले समकोणी सोलीलाई जेनेरेटरसँग समानान्तर हुने गरी काटेको छ। यसरी बनेको साङ्किकलाई पारावोला (Parabola) भनिन्छ।	समतलीय सतहले दुईओटा संयुक्त समकोणी सोली (Combined double cone) लाई अर्ध शिर्षकोण (α) भन्दा बढी हुने गरी कोण (β) बनाउँछ। यसरी बनेको साङ्कीकलाई हाइपरवोला (Hyperbola) भनिन्छ।

अभ्यास 4.3

1. **तल दिइएका शब्दवालीहरूलाई सोलीको चित्रमा देखाउनुहोस्।**

   (a) अर्धशीर्षकोण (Semi-vertical angle)

   (b) शीर्षविन्दु (Vertex)

   (c) जेनेरेटर (Generator)

   (d) अक्ष (Axis)

2. **चित्रद्वारा परिभाषित गर्नुहोस् ।**

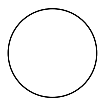
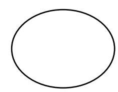
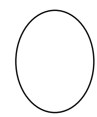
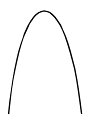
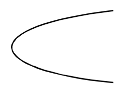
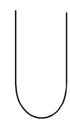
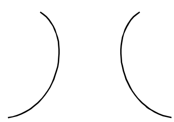
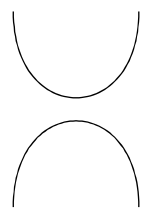
   (a) वृत्त (Circle)

   (b) पारावोला (Parabola)

   (c) दीर्घवृत्त (Ellipse)

   (d) हाइपरबोला (Hyperbola)

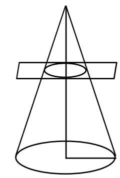
3. **तल दिइएका आकृतीहरूको गणितीय नाम लेख्नुहोस् ।**

(a)		(b)		(c)	
(d)		(d)		(e)	
(f)		(g)			

4. आलु, गाँजर अथवा मुलालाई समकोणी आकार हुने गरी काट्नुहोस् । फेरि उक्त वस्तुलाई चक्कुको सहायताले काटी (a) वृत्त (b) पाराबोला (c) दीर्घ वृत्त बन्ने गरी काट्नुहोस् ।

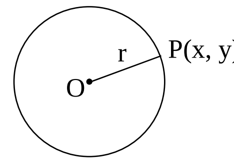
5. इन्टरनेटबाट साङ्कीक सम्बन्धि पत्ता लगाई छोटो प्रतिवेदन तयार पार्नुहोस् ।

4.4 वृत्त (Circle)



एउटा समकोणी सोलीलाई कुनै समतल सतहले आधारसँग समानानतर अथवा अक्षसँग 90° को कोण बनाउने गरि काट्दा बनेको साङ्किककलाई वृत्त भन्दछन्।

उक्त साङ्किककलाई विन्दुपथका रूपमा पनि परिभाषित गर्न सकिन्छ। कुनै निश्चित विन्दु O बाट बराबर दुरीमा घुम्ने विन्दु P(x, y) को विन्दुपथलाई वृत्त भन्दछन्। यसलाई C(0, r) सङ्केतद्वारा लेख्न सकिन्छ। वृत्तको समीकरण केन्द्र O(h, k) र अर्धव्यास 'r' भएको अवस्थामा $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ द्वारा पनि जनाउन सकिन्छ। यसलाई विस्तारित स्वरूप अथवा सामान्य रूपमा $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ द्वारा पनि जनाउन सकिन्छ। जसलाई

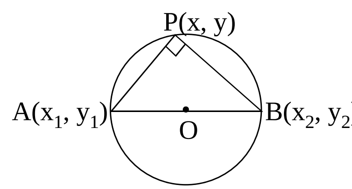


$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) + (g^2 + f^2 - c)$

$(x + g)^2 + (y + f)^2 + (g^2 + f^2 - c)$ लेख्दा केन्द्र $(- g, - f)$ र अर्धव्यास $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ हुन्छ।

त्यस्तै व्यासका अन्तिम विन्दुहरू $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ दिइएको अवस्थामा ΔAPB ले एउटा समकोणी त्रिभुजलाई जनाउँछ। जहाँ,

(AP को झुकाव) × (BP को झुकाव) = – 1



अथवा, $\frac{y - y_1}{x - x_1} \times \frac{y - y_2}{x - x_2} = - 1$

अथवा, $(y - y_1)(y - y_2) = - (x - x_1)(x - x_2)$

अथवा, $(y - y_1)(y - y_2) + (x - x_1)(x - x_2) = 0$ द्वारा वृत्तको समीकरणलाई दर्साउन सकिन्छ।

तसर्थ वृत्तको समीकरण निम्न गणितीय सम्बन्धहरू (सूत्रहरू) द्वारा पत्ता लगाउन सकिन्छ।

1. केन्द्र (h, k) र अर्धव्यास 'r' एकाई दिइएको अवस्थामा $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
2. केन्द्र (0, 0) र अर्धव्यास 'r' दिइएको अवस्थामा $x^2 + y^2 = r^2$
3. व्यासका छेउछाउका (अन्तिम) विन्दुहरू (x_1, y_1) र (x_2, y_2) दिइएको अवस्थामा $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
4. समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ दिइएको अवस्थामा केन्द्र $(- g, - f)$ र अर्धव्यास $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ हुन्छ।

उदाहरण 1

तल दिइएको अवथामा वृत्तको समीकरण त्ता लगानुहोस् ।

(a) केन्द्र (0, 0), अर्धव्यास '5' एकाइ

(b) केन्द्र (– 2, 3), अर्धव्यास '4' एकाइ

(c) व्यासका छेउछाउका विन्दुहरू (3, 4) र (2, – 7)

समाधान

(a) यहाँ केन्द्र = (0, 0) र अर्धव्यास (r) = 5

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको समीकरण

$x^2 + y^2 = a^2$

$x^2 + y^2 = 5^2$

$x^2 + y^2 = 25$

(b) यहाँ केन्द्र (h, k) = (– 2, 3), अर्धव्यास (r) = 4

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको समीकरण

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अथवा, $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

अथवा, $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 16$

अथवा, $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(c) यहाँ, वृत्तका व्यासका छेउछाउका विन्दुहरू

मानौँ, $(x_1, y_1) = (3, 4)$ र $(x_2, y_2) = (2, -7)$

हामीलाई थाहा छ, वृत्तको समीकरण

$(x - x_1) (x - x_2 + (y - y_1) (y - y_2) = 0$

अथवा, $(x - 3) (x - 2) + (y - 4) (y + 7) = 0$

अथवा, $x^2 - 3x - 2x + 6 + y^2 - 4y + 7y - 28 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 22 = 0$

उदाहरण 2

तलका वृत्तको केन्द्र र अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् । लेखाचित्रमा वृत्तलाई देखाउनुहोस् ।

(a) $x^2 + y^2 = 100$

(b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 24$

(c) $2x^2 + 2y^2 + 10x + 6y + 7 = 0$

समाधान

(a) $x^2 + y^2 = 100$

उक्त समीकरणलाई $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 10^2$ को स्वरूपमा लेख्दा केन्द्र = (0, 0) र अर्धव्यास = 10 एकाइ हुन्छ ।

(b) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 24$ लाई $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ सँग तुलना गर्दा केन्द्र (h, k) = (– 2, 3) र अर्धव्यास (r) = $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ हुन्छ ।

(c) $2x^2 + 2y^2 + 10x + 6y + 7 = 0$

अथवा, $x^2 + y^2 + 5x + 3y + \frac{7}{2} = 0$ [2 ले भाग गर्दा]

$2g = 5, 2f = 3$ र $c = \frac{7}{2}$ हुन्छ ।

त्यसैले, केन्द्र $(-g, -f) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ र

अर्धव्यास (r) $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2}}$

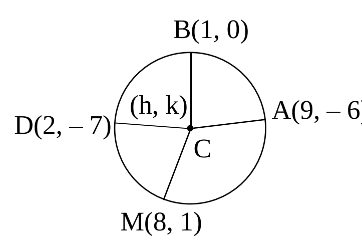
$= \sqrt{25 + 9 - \frac{7}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

विन्दुहरू (1, 0), (2, – 7), (8, 1) र (9, – 6) एउटै वृत्तमा पर्छन भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान

मानौँ C(h, k) वृत्तको केन्द्र A(9, – 6), B(1, 0), C(2, – 7) तथा M(8, 1) एउटै वृत्तमा पर्छन् ।



$CA^2 = CB^2$

अथवा, $(h - 1)^2 + (k - 0)^2 = (h - 9)^2 + (k + 6)^2$

अथवा, $h^2 - 2h + 1 + k^2 = h^2 - 18h + 81 + k^2 + 12k + 36$

अथवा, $-2h + 18h - 12k + 1 - 81 - 36 = 0$

अथवा, $16h - 12k - 116 = 0$

$\therefore$ $4h - 3k - 29 = 0$ ...(1)

फेरि, $CD^2 = CB^2$

अथवा, $(h - 2)^2 + (k + 7)^2 = (h - 1)^2 + (k - 0)^2$

अथवा, $h^2 - 4h + 4 + k^2 + 14k + 49 = h^2 - 2h + 1 + k^2$

अथवा, $-4h + 2h + 14k + 53 - 1 = 0$

अथवा, $-2h + 14k + 52 = 0$

अथवा, $-2[h - 7k - 26] = 0$

अथवा, $h - 7k - 26 = 0$ ...(2)

समी. (2) लाई 4 ले गुणन गरी समीकरण (1) बाट घटाउँदा

$$\begin{array}{l} 4h - 3k - 29 = 0 \\ 4h - 28k - 104 = 0 \\ (-)\quad (+)\quad (+) \\ \hline 25k + 75 = 0 \end{array}$$

अथवा, $25k = -75, k = -3$

k को मान समी. (1) मा राख्दा

$4h - 3(-3) - 29 = 0$

अथवा, $4h + 9 - 29 = 0$

अथवा, $4h - 20 = 0$

अथवा, $h = 5$

$\therefore$ केन्द्र $(h, k) = (5, -3)$

अर्धव्यास = $CB = \sqrt{(h-1)^2 + k^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-3)^2} = 5$ units

वृत्तको समीकरण

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अथवा, $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$

अथवा, $x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 = 25$

अथवा, $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$

उक्त समीकरणलाई M(8, 1) सन्तुष्ट गरेमा दिइएका विन्दुहरू एउटै वृत्तमा पर्दछन् ।

त्यसैले, $(8)^2 + (1)^2 - 10 \times 8 + 6 \times 1 + 9 = 0$

अथवा, $64 + 1 - 80 + 6 + 9 = 0$

अथवा, $0 = 0$

$\therefore$ (1, 0), (2, – 7),(8, 1) र (9, – 6) एउटै वृत्तमा पर्दछन् ।

उदाहरण 4

(a) **विन्दु** (4, 3) भएर जाने र व्यासका समीकरणहरू $3x + 2y = 5$ र $2x - y = 1$ भएको वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

(b) केन्द्र (2, 2) भएको र दुवै अक्षलाई छोएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

(a) $3x + 2y = 5$ र $2x - y = 1$ लाई समाधान गर्दा

$$3x + 2y - 5 = 0 \quad ...(1)$$
$$4x - 2y - 2 = 0 \quad ...(2)$$
$$7x - 7 = 0$$

अथवा, $7x = 7, x = 1$

$x = 1$ समीकरण (1) मा राख्दा

$3 \times 1 + 2y + 5 = 0$

अथवा, $2y = 5 - 3$

अथवा, $y = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ केन्द्र $(x, y) = (h, k) = (1, 1)$

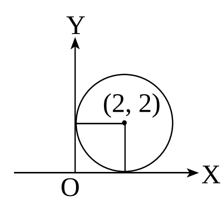
वृत्तको समीकरणः $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अथवा, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (4 - 1)^2 + (3 - 1)^2$

अथवा, $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 9 + 4$

अथवा, $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

(b) यहाँ, $(h, k) = (2, 2), r = 2$



$\therefore$ वृत्तको समीकरण

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

अथवा, $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

अथवा, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 4$

अथवा, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

अभ्यास 4.4

1. तल दिइएका प्रत्येक अवस्थामा वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

(a) केन्द्रः (0, 0), अर्धव्यास = 3 एकाइ [Ans: $x^2 + y^2 - 9 = 0$]

(b) केन्द्रः (0, 0), व्यास = 10 एकाइ [Ans: $x^2 + y^2 - 25 = 0$]

(c) केन्द्रः (5, – 2), अर्धव्यास = 5 एकाइ [Ans: $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$]

(d) केन्द्रः (a, b), अर्धव्यास = $\sqrt{a^2 + b^2}$ एकाइ [Ans: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$]

(e) व्यासका छेउछाउका विन्दुहरू (1, 2) र (7, 6) [Ans: $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 18 = 0$]

(f) व्यासका छेउछाउका विन्दुहरू (3, 4) र (2, – 7) [Ans: $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 22 = 0$]

(g) व्यासका छेउ–छाउका विन्दुहरू (a, 0) र (0, b) [Ans: $x^2 + y^2 - ax - by = 0$]

2. तल दिइए अनुसार समीकरणहरू भएको वृत्तको केन्द्र र अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस्।

(a) $x^2 + y^2 = 36$ [Ans: (0, 0), 6]

(b) $x^2 + y^2 = 48$ [Ans: (0, 0), $4\sqrt{3}$]

(c) $x^2 + y^2 = a^2$ [Ans: (0, 0), a]

3. (a) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$ [Ans: (3, 5), 2]

(b) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ [Ans: (– 1, – 3), 5]

(c) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$ [Ans: (– 3, 4), 6]

4. (a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ [Ans: (2, – 1), 3]

(b) $x^2 + y^2 - 12x + 4y - 9 = 0$ [Ans: (6, – 2), 7]

(c) $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ [Ans: $\left(\frac{5}{6}, 1\right), \frac{\sqrt{13}}{6}$]

(d) $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y - 107 = 0$ [Ans: $\left(2, \frac{-1}{3}\right), 4$]

5. (2, – 2), (6, 6) र (5, 7) भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$]

6. विन्दुहरू (0, 0), (0, p) र (q, 0) भएर जाने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$]

7. (3, 3) (6, 4), (7, 1) र (4, 6) एउटै वृत्तमा पर्छन् भनी प्रमाणीत गर्नुहोस्।

8. विन्दुहरू (– 2, 0) र (0, – 2) भएर जाने र केन्द्र विन्दु सीधा रेखा $2x - 3y + 1 = 0$ मा पर्ने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$]

9. व्यासका समीकरणहरू $3x - 2y - 1 = 0$ र $4x + y - 27 = 0$ भएको वृत्त विन्दु (2, 3) भएर जान्छ भने उक्त वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्। [Ans: $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 49 = 0$]

10. X-अक्षको विन्दु (– 3, 0) मा हुने र Y-खण्ड 8 बनाउने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोस्।

[Ans: $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$]

11. केन्द्र (– 3, – 4) भएको वृत्तले X-अक्षलाई छुन्छ भने वृत्तको समीकरण पत्ता लगाउनुहोसे।

[Ans: $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$]

12. वृत्तको परिभाषा साङ्केतिक र विन्दुपथका रूपमा दिनुहोस्। उक्त वृत्तको समीकरण के कति तरिकाले पत्ता लगाउन सकिन्छ, उदाहरणसहित प्रष्ट पार्नुहोस्।

एकाइ 5

त्रिकोणमित (Trigonometry)

5.0 पुनरावलोकन (Review)

त्रिभुजको नापलाई त्रिकोणमिती (Trigonometry) भनिन्छ । त्रिभुजका कोणहरू A र B को योग (A+B) वा अन्तर (A-B) लाई मिश्रितकोण (Compound Angle) भनिन्छ । मिश्रित कोणहरू (A+B) र (A-B) का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratios of Compound Angles) :

$\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

$\sin(A-B) = \sin A.\cos B - \cos A.\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A.\cos B - \sin A.\sin B$

$\cos(A-B) = \cos A.\cos B + \sin A.\sin B$

$\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B}$

$\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A.\tan B}$

मिश्रित कोणहरू (A+B) र (A-B) का त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका गुणानफलहरू (Products of Trigonometric Ratios of Compound Angles) :

$\sin(A+B).\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

$\sin(A+B).\sin(A-B) = \cos^2 B - \cos^2 A$

$\cos(A+B).\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

$\cos(A+B).\cos(A-B) = \cos^2 B - \sin^2 A$

5.1 अपवर्त्यकोणका त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratio of Multiple Angles)

यदि त्रिभुजका कुनै कोण A भए त्यसका 2A, 3A, 4A, 5A आदिलाई कोण A का अपवर्त्यकोणहरू (Multiple Angles of Angle A) भनिन्छ ।

(क) कोण 2A का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratios of Angle 2A)

हामीलाई थाहा छ (we know that),

$\sin(A+B) = \sin A.\cos B + \cos A.\sin B$

यदि A = B भए माथि दिइएको मिश्रित कोणको अनुपात,

$\sin(A+A) = \sin A.\cos A + \cos A.\cos A$

अथवा, $\sin 2A = \sin A.\cos A + \sin A.\ \sin A$

$\therefore \sin 2A = 2\sin A.\cos A$ ....(i)

यहाँ cos2A बराबर के हुन्छ ?

$\cos 2A = \cos(A+A)$

$= \cos A.\cos A - \sin A.\sin A$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ ....(ii)

हामीलाई थाहा छ,

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$\therefore \cos^2 A = (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$ (ii) बाट

$= 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

$\therefore \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ ....(iii)

त्यसैगरी $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$\therefore \cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$

$= \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$

$= 2\cos^2 A - 1$

$\therefore \cos 2A = 2\cos^2 A - 1$..........................(iv)

$\tan 2A = ?$

यहाँ,

$\tan 2A = \tan(A+A)$

$= \dfrac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A.\tan A}$

$= \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\therefore \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$ ....(v)

(क) उदाहरणहरू

प्रमाणित गर्नुहोस् ।

1. (क) $\sin 90° = 2\sin 45°.\cos 45° = 1$ [$\sin 45° = \cos 45° = 1/2$]

(ख) $\cos 90° = \cos^2 45° - \sin^2 45° = 0$

(ग) $\tan 90° = \frac{2\tan 45°}{1 - \tan^2 45°} = \infty$ (अपरिभाषित) $[\tan 45° = 1]$

(क) यहाँ,

$\sin 90° = \sin(45° + 45°)$

$= \sin^2(45°)$

$= 2\sin 45°.\cos 45°$

$= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

$= 2 \times \frac{1}{2}$

$= 1$

$\therefore \sin 90° = 2\sin 45°.\cos 45° = 1$ प्रमाणित भयो ।

(ख) यहाँ,

$\cos 90° = \cos 2 \times (45°)$

$= \cos^2 45° - \sin^2 45°$

$= (\cos 45°)^2 - (\sin 45°)^2 \quad [\because \sin^2\theta = (\sin\theta)^2]$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$= 0$

$\therefore \cos 90° = \cos^2 45° - \sin^2 45° = 0$ प्रमाणित भयो ।

(ग) यहाँ,

$\tan 90° = \tan 2(45°)$

$= \frac{2\tan 45°}{1 - \tan^2 45°}$

$= \frac{2 \times 1}{1 - (\tan^2 45°)^2}$

$= \frac{2}{1 - (1)^2}$

$= \frac{2}{1 - 1}$

$= \frac{2}{0}$

$= \infty$ ($\because \frac{\text{Something}}{0}$ = Infinite)

$\therefore \tan 90° = \dfrac{2\tan 45°}{1 - \tan^2 45°} = \infty$ प्रमाणित भयो ।

2. (क) यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ भए sin2A, cos2A र tan2A का मानहरू कति कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्

(ख) यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ भए sin2A, cos2A र tan2A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्

(क) यहाँ,

$\sin A = \frac{1}{2}$ भए $\cos A = ?$

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - (\sin A)^2}$

$= \sqrt{\frac{4}{4} - (\frac{1}{2})^2}$ $\quad [\because 1 = \frac{4}{4}]$

$= \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}}$ $\quad = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$= \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$ $\quad [\because 3 = (\sqrt{3})^2$ र $4 = 2^2]$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

अतः $\sin 2A = 2\sin A.\cos A$

$= 2 \text{ x } \frac{1}{2} \text{ x } \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ भए $\sin 2A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हुन्छ ।

त्यसैगरी,

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$= 2(\cos A)^2 - 1$

$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1$

$= 2 \text{ x } \frac{3}{4} - \frac{4}{4}$ $\quad [\because 1 = \frac{4}{4}]$

$= \frac{6 - 4}{4}$

$= \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$ $\quad [\because \frac{2}{4} = \frac{2 \text{ x } 1}{2 \text{ x } 2} = \frac{1}{2}]$

$\therefore$ यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ भए $\cos^2 A = \frac{1}{2}$ हुन्छ।

यहाँ,

$\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$

$= \frac{\sqrt{3}/2}{½}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ x } \frac{2}{1}$ $\quad [\because \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c}]$

$= \sqrt{3}$

$\therefore$ यदि $\sin A = \frac{1}{2}$ भए $\tan 2A = \sqrt{3}$ हुन्छ।

(ख) यहाँ,

$\cos A = \frac{1}{3}$ भए $\sin A = ?$

$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$

$= \sqrt{1 - (\cos A)^2}$

$= \sqrt{1 - (\frac{1}{3})^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{9} - \frac{1}{9}}$ $\quad [\because 1 = \frac{9}{9}]$

$= \sqrt{\frac{9 - 1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}}$

$= \sqrt{(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2}$ $\quad [\because 8 = 2 \text{ x } 2^2 = (\sqrt{2})^2 \text{ x } 2^2 = (\sqrt{2})^2]$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\quad [\because \sqrt{a^2} = a$ र $\sqrt{(\sqrt{b})^2} = \sqrt{b}]$

अब, $\sin 2A = 2\sin A.\cos A$

$= 2 \text{ x } \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore$ यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ भए $\sin 2A = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ हुन्छ।

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$

$= 2 \times (\frac{1}{3})^2 - 1$

$= 2 \times \frac{1}{9} - \frac{9}{9}$ $\quad [\because \frac{9}{9} = 1]$

$= \frac{2 - 9}{9} = -\frac{7}{9}$

तसर्थ यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ भए $\cos 2A = -\frac{7}{9}$ हुन्छ।

यहाँ $\tan 2A = \frac{\sin 2A}{\cos 2A}$

$= \frac{4\sqrt{2}/9}{-7/9}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{9}{(-7)}$ $\quad [\because \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}]$

$= -\frac{4\sqrt{2}}{7}$

तसर्थ यदि $\cos A = \frac{1}{3}$ भए $\tan 2A = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$ हुन्छ।

अभ्यास 5.1 (क)

1. प्रमाणित गर्नुहोस् (Prove that):

(क) $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$

(ख) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(ग) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

(घ) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

(ङ) $\sin 60° = 2\sin 30° \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\sin 30° = \frac{1}{2}$ र $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2})$

(च) $\cos 120° = \cos^2 120° - \sin^2 120° = -\frac{1}{2}$ $(\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ र $\cos 30° = \frac{1}{2})$

(छ) $\tan 60° = \frac{2\tan 30°}{1 - \tan^2 30°} = \sqrt{3}$ $(\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}})$

(ज) $\sin 120° = 2\sin 60° \cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ र $\cos 60° = \frac{1}{2})$

(झ) $\tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1 - \tan^2 60°} = -\sqrt{3}$ $(\tan 60° = \sqrt{3})$

(ञ) $\cos 60° = 1 - 2\sin^2 30° = \frac{1}{2}$ $(\sin 30° = \frac{1}{2})$

2. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ भए $\sin 2A$, $\cos 2A$ र $\tan 2A$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः $\frac{3\sqrt{7}}{8}, \frac{1}{8}$ र $3\sqrt{7}$)

3. यदि $\cos A = \frac{4}{5}$ भए $\sin 2A$, $\cos 2A$ र $\tan 2A$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ र $\frac{24}{7}$)

(ख) कोण 3A का त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratios of Angle 3A)

यहाँ sin(A+B), sin(A-B), cos(A+B), cos(A-B), tan(A+B) र tan(A-B) का अनुपातहरू एकपटक सोचेर लेख्नुहोस् त, सक्नुहुन्छ, होइन त? के ती अनुपातहरूको प्रयोग गरी sin3A, cos3A र tan3A का अनुपातहरू पत्ता लगााउन सकिएला? हेरौं।

हामीलाई थाहा छ,

$\sin 3A = \sin(A+2A)$

$= \sin A.\cos 2A + \cos A.\sin 2A$

$= \sin A(1 - 2\sin^2 A) + \cos A.2\sin A \cos A$ [$\because \cos^2 A = 1 - 2\sin^2 A$ र $\sin^2 A = 2\sin A \cos A$]

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A.\cos^2 A$

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A(1 - \sin^2 A)$

$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A - 2\sin^3 A$

$= 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore \sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ....(i)

त्यसैगरी,

$\cos 3A = \cos(A + 2A)$

$= \cos A.\cos 2A - \sin A.\sin 2A$

$= \cos A(2\cos^2 A - 1) - \sin A(2\sin A.\cos A)$ [$\because \cos 2A = 2\cos^2 A$ र $\sin^2 A = 2\sin A \cos A$]

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(\sin^2 A)$

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$ [$\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A$]

$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$

$= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ....(ii)

अब, $\tan 3A = ?$

यहाँ, $\tan 3A = \tan(A + 2A)$

$$= \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A.\tan 2A}$$

$= \frac{\tan A + 2\tan A / 1 - \tan^2 A}{1 - \tan A.2\tan A / 1 - \tan^2 A}$ $[\because \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}]$

$= \frac{\tan A(1 - \tan^2 A) / (1 - \tan^2 A) + 2\tan A/1 - \tan^2 A}{1 - \tan^2 A / 1 - \tan^2 A - 2\tan A / 1 - \tan^2 A}$

$= \frac{\tan A - \tan^3 A + 2\tan A / (1 - \tan^2 A)}{1 - \tan^2 A - 1\tan^2 A / (1 - \tan^2 A)}$

$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$\therefore \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ ....(iii)

के sin2A र cos2A लाई tanA को रुपमा व्यक्त गर्न सकिएला ? प्रयास गर्नुहोस्।

यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

$\sin 2A = \frac{2\sin A.\cos A}{1}$ हुन्छ।

$= \frac{2\sin A.\cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$? $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$= \frac{2\sin A.\cos A / \cos^2 A}{\sin^2 A + \cos^2 A / \cos^2 A}$? [$\because$ अंश र हरलाई cos2A ले भाग गर्दा]

$= \frac{2\sin A.\cos A / \cos A.\cos A}{\sin^2 A / \cos^2 A + \cos^2 A / \cos^2 A}$ [$\because$ cos2A = cosA.cosA र $\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}$]

$= \frac{2\tan A}{\tan^2 A + 1}$

$\therefore \sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$ ....(i)

त्यसैगरी,

$\cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{1}$ [$\because$ सिंगोलाई 1 ले भाग गर्दा सिंगो नै हुन्छ]

$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$ $[\because 1 = \cos^2 A + \sin^2 A]$

$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A / \cos^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A / \cos^2 A}$ [$\because$ अंश र हरलाई cos2A ले भाग गर्दा]

$= \frac{\cos^2 A / \cos^2 A - \sin^2 A / \cos^2 A}{\cos^2 A / \cos^2 A + \sin^2 A / \cos^2 A}$? $[\because \frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab}]$

$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$\therefore \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ ....(ii)

(ख) उदाहरणहरू

1. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ भए sin3A, cos3A र tan3A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

हामीलाई थाहा छ,

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ हुन्छ ।

$= 3 \times \frac{3}{5} - 4 \times (\frac{3}{5})^3$ $\quad [\because \sin A = \frac{3}{5}]$

$= \frac{9}{5} \times \frac{25}{25} - \frac{4 \times 27}{125}$ $\quad [\because \frac{25}{25} = 1$ भएकोले हर समान बनाउने]

$= \frac{225 - 108}{125}$

$= \frac{117}{125}$

तसर्थ यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ भए $\sin 3A = \frac{117}{125}$ हुन्छ ।

यहाँ $\sin A = \frac{3}{5}$ भए $\cos A = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2}$

$= \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}}$ $\quad [\because 1 = \frac{25}{25}$ भएकोले समान हर बनाउने]

$= \sqrt{\frac{25 - 5}{25}}$

$= \sqrt{\frac{16}{25}}$

$= \sqrt{(\frac{4}{5})^2} = \frac{4}{5}$

अब $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4 \times (\frac{4}{5})^3 - 3 \times \frac{4}{5}$

$= 4 \times \frac{64}{125} - \frac{12 \times 25}{5 \times 25}$? $\quad [\because$ हर समान बनाउँदा]

$= \frac{256 - 300}{125} = -\frac{44}{125}$

तसर्थ यदि $\sin = \frac{3}{5}$ भए $\cos 3A = -\frac{44}{125}$ हुन्छ ।

हामीलाई थाहा छ,

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \frac{3/5}{4/5}$

$= \frac{3}{4}$

अब, $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$= \frac{3 \text{ x } 3/4 - (3/4)^3}{1 - 3 \text{ x } (3/4)^2}$

$= \frac{9/4 \text{ x } 16/16 - 27/64}{16/16 - 3 \text{ x } 9/16}$

$= \frac{144/64 - 27/64}{16 - 27/16}$

$= \frac{144 - 27}{64} - \frac{16}{(-11)}$ $[\because \frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c}]$

$= - \frac{117}{64} \text{ x } \frac{16}{11} = - \frac{117}{44}$

तसर्थ यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ भए $\tan 3A = - \frac{117}{44}$ हुन्छ।

अभ्यास 5.1 ख

1. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$ भए sin2A, cos2A र tan2A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(उत्तरः $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}$ र $\frac{24}{7}$)

2. यदि $\sin A = \frac{4}{5}$ भए sin3A, cos3A र tan3A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(उत्तरः $\frac{44}{125}, \frac{117}{125}$ र $\frac{44}{117}$)

3. यदि $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए sin3A, cos3A र tan3A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(उत्तरः $\frac{1}{\sqrt{2}}, - \frac{1}{\sqrt{2}}$ र - 1)

4. यदि $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ भए sin3A, cos3A र tan3A का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः 0, -1 र 0)

5. यदि $\tan\theta = \frac{1}{2}$ भए $\tan\theta$ को मान पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः $\frac{11}{2}$)

(ग) उदाहरणहरू

1. यदि $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ भए $\cos^2\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos^2\theta}{2}}$ हुन्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस् ।

यहाँ, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

हामीलाई थाहा छ,

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \cos 2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$

अथवा, $\cos 2\theta = \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

अथवा, $\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta$

अथवा, $\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \cos^2\theta$

अथवा, $\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right)^2 = (\cos\theta)^2$

अथवा, $\pm\sqrt{\frac{\cos 2\theta + 1}{2}} = \cos^2\theta$ ($\because$ दुबै तर्फ वर्ग हटाउँदा)

तसर्थ यदि $\cos^2 A = \cos^2 A - \sin^2 A$ भए

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$ हुन्छ ।

2. प्रमाणित गर्नुहोस

$$\tan\theta = \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

यहाँ,

दायाँ पक्ष $= \frac{1 - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta - (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin^2\theta}$ [$\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$]

$= \frac{\cancel{\cos^2\theta} + \sin^2\theta - \cancel{\cos^2\theta} - \sin^2\theta}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\cancel{2}\sin^2\theta}{\cancel{2}\sin^2\theta.\cos\theta}$

$= \frac{\cancel{\sin\theta}.\sin\theta}{\cancel{\sin\theta}.\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

= बायाँ पक्ष

तसर्थ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाागित भयो ।

3. प्रमाणित गर्नुहोस

$\frac{\cos3\theta + \sin3\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = 1 + 2\sin2\theta$

बायाँ पक्ष = $\frac{\cos3\theta + \sin3\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

$= \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

$= \frac{4\cos^3\theta - 4\sin^3\theta - 3\cos\theta - 3\sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

$= \frac{4(\cos^3\theta - \sin^3\theta) - 3(\cos\theta - \sin\theta)}{\cos\theta - \sin\theta}$

हामीलाई थाहा छ,

$\cos^3\theta - \sin^3\theta = (\cos\theta - \sin\theta)\ (\cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta.\cos\theta)$

$= \frac{4(\cos\theta - \sin\theta)\ (\cos^2\theta + \sin^2\theta + \sin\theta.\cos\theta) - 3(\cos\theta - \sin\theta)}{(\cos\theta - \sin\theta)}$

$= \frac{\cancel{(\cos\theta - \sin\theta)}\ \{4(1 + \sin\theta.\cos\theta)\} - 3}{\cancel{(\cos\theta - \sin\theta)}}$

$= (4 + 4\sin\theta.\cos\theta - 3)$

$= 1 + 2(2\sin\theta.\cos\theta)$

$= 1 + 2\sin2\theta$

= दायाँ पक्ष

तसर्थ बायाँ पक्ष = वायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{\sin3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos3\theta}{\cos\theta} = 2$$

यहाँ, बायाँ पक्ष $= \frac{\sin3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos3\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\sin\theta} - \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cancel{\sin\theta}(3 - 4\sin^2\theta)}{\cancel{\sin\theta}} - \frac{\cancel{\cos\theta}(4\cos^2\theta - 3)}{\cancel{\cos\theta}}$

$= 3 - 4\sin^2\theta - (4\cos^2\theta - 3)$

$= 3 - 4\sin^2\theta - 4\cos^2\theta + 3$

$= 3 + 3 - 4(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$= 6 - 4(1)$ $\qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= 6 - 4$

$= 2$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{\cos^3\theta - \cos^3\theta}{\sin^3\theta + \sin^3\theta} = \tan\theta$$

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos^3\theta - (4\cos^3\theta - 3\cos\theta)}{3\sin\theta - 4\sin^3\theta + \sin^3\theta}$

$= \frac{\cos^3\theta - 4\cos^3\theta + 3\cos\theta}{3\sin\theta - 3\sin^3\theta}$

$= \frac{3\cos\theta - 3\cos^3\theta}{3\sin\theta - 3\sin^3\theta}$

$= \frac{\cancel{3}\cos\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cancel{3}\sin\theta(1 - \sin^2\theta)}$

$= \frac{\cos\theta.\sin^2\theta}{\sin\theta.\cos^2\theta}$

$= \frac{\cancel{\cos\theta}.\cancel{\sin\theta}.\sin\theta}{\cancel{\sin\theta}.\cancel{\cos\theta}.\cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

= दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

6. प्रमाणित गर्नुहोस् ।

$\frac{\sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta + 1 + \cos 2\theta} = \tan\theta$

बायाँ पक्ष $= \frac{\sin 2\theta + 1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta + 1 + \cos 2\theta}$

$= \frac{2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta}$

$= \frac{\cancel{2}\sin\theta\cancel{(\cos\theta + \sin\theta)}}{\cancel{2}\cos\theta\cancel{(\sin\theta + \cos\theta)}}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

= दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\cot(\theta + 45°) - \tan(\theta - 45°) = \frac{2\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$

$= \cot(\theta + 45°) - \tan(\theta - 45°)$

$= \frac{\cos(\theta + 45°)}{\sin(\theta + 45°)} - \frac{\sin(\theta - 45°)}{\cos(\theta - 45°)}$

$= \frac{\cos(\theta + 45°).\cos(\theta - 45°) - \sin(\theta + 45°).\sin(\theta - 45°)}{\sin(\theta + 45°).\cos(\theta - 45°)}$

हामीलाई थाहा छ,

$\cos A.\cos B - \sin A.\sin B = \cos(A + B)$

$= \frac{\cos[(\theta + 45°) + (\theta - 45°)]}{(\sin\theta.\cos 45° + \cos\theta.\sin 45°)(\cos\theta.\cos 45° + \sin\theta.\sin 45°)}$

$$= \frac{\cos(\theta + \cancel{45^\circ} + \theta - \cancel{45^\circ})}{(\frac{1}{\sqrt{2}}.\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta).\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2(\sin\theta + \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\frac{1}{2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta.\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

8. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$(2\cos\theta + 1)\ (2\cos\theta - 1)\ (2\cos 2\theta - 1) = 2\cos 4\theta + 1$

बायाँ पक्ष = $(2\cos\theta + 1)\ (2\cos\theta - 1)\ (2\cos 2\theta - 1)$

$= \{(2\cos\theta)^2 - (1)^2\}\ (2\cos 2\theta - 1)$ [$\because (a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$]

$= (4\cos 2\theta - 1)\ (2\cos 2\theta - 1)$

$= \{2(2\cos 2\theta) - 1\}\ (2\cos 2\theta - 1)$

$= \{2(1 + \cos 2\theta) - 1\}\ (2\cos 2\theta - 1)$ [$\because 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$]

$= (2 + 2\cos 2\theta - 1)\ (2\cos 2\theta - 1)$

$= (2\cos 2\theta + 1)\ (2\cos 2\theta - 1)$

$= (2\cos 2\theta)^2 - 1^2$ [$\because$ फेरी $(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$]

$= (4\cos^2 2\theta - 1)$

$= 2(2\cos^2 2\theta) - 1$

$= 2\{\cos^2(2\theta) + 1\} - 1$ [$\because 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ हुने भएकोले]

$= 2\cos 4\theta + 2 - 1$

$= 2\cos 4\theta + 1$

= दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो।

9. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$4(\cos^6\theta - \sin^6\theta) = 3\cos 2\theta + \cos^3 2\theta$

बायाँ पक्ष $= 4(\cos^6\theta - \sin^6\theta)$

$= 4[(\cos^2\theta)^3 - (\sin^2\theta)^3]$

$= 4(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,[(\cos^2\theta)^2 + (\sin^2\theta)^2 + \cos^2\theta.\sin^2\theta]$ [$\because a^3 + b^3 = (a - b)\,(a^2 + b^2 + ab)$]

$= 4\cos^2\theta[(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta.\cos^2\theta + \sin^2\theta.\cos^2\theta$ [$\because a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$]

$= 4\cos^2\theta[1^2 - \sin^2\theta.\cos^2\theta]$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= 4\cos^2\theta[1 - \frac{1}{4}(2\sin^2\theta.\cos^2\theta]$

$= \cancel{4}\cos^2\theta[\frac{4 - (2\sin^2\theta.\cos^2\theta)^2}{\cancel{4}}]$

$= \cos^2\theta[4 - (\sin^2\theta)^2]$ [$\because 2\sin\theta\cos\theta = \sin^2\theta$]

$= \cos^2\theta[4 - 1 + \cos^2 2\theta]$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

$= \cos^2\theta(3 + \cos^2 2\theta]$

$= 3\cos 2\theta + \cos^3 2\theta$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो।

10. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin50°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos50°}\right) = 1$$

बायाँ पक्ष $= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin50°} + \frac{\sqrt{3}}{\cos50°}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{\sin50°} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{\cos50°}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin30°}{\sin50°} + \frac{\cos30°}{\cos50°}\right)$ $\quad$ $[\because \frac{1}{2} = \sin30°$ र $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos30°]$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin30°.\cos50° + \cos30°.\sin50°}{\sin50°.\cos50°}\right)$

$= \frac{\sin(30° + 50°)}{2\sin50°.\cos50°}$

$= \frac{\sin80°}{\sin2(50°)}$ $\quad$ $[\because 2\sin\theta.\cos\theta = \sin2\theta]$

$= \frac{\sin(180° - 100°)}{\sin100°}$ $\quad$ $[\because \sin(180° - \theta) = \sin\theta]$

$= \frac{\sin100°}{\sin100°}$

$= 1$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

11. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\cos^8\theta + \sin^8\theta = 1 - \sin^2 2\theta + \frac{1}{8}\sin^4 2\theta$$

बायाँ पक्ष $= \cos^8\theta + \sin^8\theta$

$= (\cos^4\theta)^2 + (\sin^4\theta)^2$

$= (\cos^4\theta)^2 - 2\cos^4\theta.\sin^4\theta + (\sin^4\theta)^2 + 2\sin^4\theta.\cos^4\theta$

$= (\cos^4\theta - \sin^4\theta)^2 + \frac{1}{8}(16\sin^4\theta.\cos^4\theta)$

$= [(\cos^2\theta)^2 - (\sin^2\theta)^2]^2 + \frac{1}{8}(2\sin\theta.\cos\theta)^4$

$= [(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)]^2 + \frac{1}{8}(\sin2\theta)^4$

$= [1.\cos2\theta]^2 + \frac{1}{8}(\sin^4 2\theta)$

$= \cos^2 2\theta + \frac{1}{8}\sin^4 2\theta$

$= 1 - \sin^2 2\theta + \frac{1}{8}\sin^4 2\theta$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

12. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\frac{4}{3}(\sin^3 20° + \cos^3 10°) = \sin 20° + \cos 10°$

बायाँ पक्ष $= \frac{4}{3}(\sin^3 20° + \cos^3 10°$

$= \frac{1}{3}(4\sin^3 20° + 4\cos^3 10°)$

$= \frac{1}{3}[(3\sin 20° - \sin 3(20° + \cos 3(10°) + 3\cos 10°)$

$= \frac{1}{3}(3\sin 20° + 3\cos 10° - \sin 60° + \cos 30°)$

$= \frac{1}{3} \times [3(\sin 20° + \cos 10°) - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{3}(\sin 20° + \cos 10°)$

$= \sin 20° + \cos 10°$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

13. यदि $\sin\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए $\sin 3\theta = -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

यहाँ, $\sin\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3.\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a}) - 4\{\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\}^3$

$= \frac{3}{2}(a + \frac{1}{a}) - 4 \text{ x } \frac{1}{8}(a + \frac{1}{a})^3$

$= \frac{1}{2}[3(a + \frac{1}{a}) - \{a^3 + \frac{1}{a^3} + 3.a.\frac{1}{a}(a + \frac{1}{a})\}]$ $[\because (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)]$

$= \frac{1}{2}[\cancel{3(a + \frac{1}{a})} - (a^3 + \frac{1}{a^3}) - \cancel{3(a + \frac{1}{a})}]$

$= \frac{1}{2}[-(a^3 + \frac{1}{a^3})$

$= -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

$\therefore \sin 3\theta = -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$ प्रमाणित भयो ।

14. $\sin 2\theta$ र $\cos 3\theta$ को सुत्र प्रयोग गरी $\sin 18°$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ, $\theta = 18°$ मान्दा

$5\theta = 5 \times 18°$ हुन्छ ।

अथवा $2\theta + 3\theta = 90°$

अथवा $2\theta = 90° - 3\theta$

दुवै तर्फ sin अनुपात लिंदा

$\sin 2\theta = \sin(90° - 3\theta)$

अथवा $2\sin\theta.\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

अथवा $2\sin\theta.\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

अथवा $2\sin\theta = \frac{\cos\theta(4\cos^2\theta - 3)}{\cos\theta}$

अथवा $2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3$

अथवा $2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3$

अथवा $2\sin\theta = 4 - 4\sin^2\theta - 3$

अथवा $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$

यो समीकरणलाई $ax^2 + bx + c = 0$ सँग तुलना गर्दा वर्ग समीकरणको सुत्र अनुसार

$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4} \times (-1).4}{2 \times 4}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2 \times 4}$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2 \times 4}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2 \times 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$

हामीलाई थाहा छ sin18° मान घनात्मक हुन्छ।

$\therefore \sin 18° = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$ हुन्छ।

अभ्यास 5.1 (ग)

1. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}}$ (ख) $\sin\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}$

(ग) $\tan\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$ (घ) $\cot\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}}$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \cot\theta$ (ख) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$ (ग) $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \cot\theta$

(घ) $\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin^2\theta} = \tan\theta$ (ङ) $\tan^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ (च) $\cot^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}$

(छ) $\dfrac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ (ज) $\dfrac{1+\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$

(झ) $\dfrac{\sin^2\theta - \cos 2\theta + 1}{\sin^2\theta + \cos 2\theta + 1} = \tan\theta$ (ञ) $\sin 2\theta.\cot\theta = 1 + \cos 2\theta$

(ट) $(1 - \cos 2\theta) = \sin 2\theta.\tan\theta$ (ठ) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}} = 2\cos\theta$

(ड) $\cos 3\theta + \cos\theta = 2\cos\theta.\cos 3\theta$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\cos 3\theta - \sin 3\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 1 - 2\sin 2\theta$ (ख) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 4\cos 2\theta$

(ग) $\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = 2$ (घ) $\dfrac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = 1 - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

(ङ) $\dfrac{\cos^3\theta - \sin^3\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = 1 + \dfrac{1}{2}\sin^2\theta$ (च) $\dfrac{\cos^3\theta - \cos 3\theta}{\sin 3\theta + \sin^3\theta} = \tan\theta$

(छ) $\dfrac{\sin 3\theta + \sin^3\theta}{\cos^3\theta - \cos 3\theta} = \cot\theta$ (ज) $\dfrac{\sin^3\theta + \sin 3\theta}{\cos 3\theta - \cos^3\theta} = -\cot\theta$

(झ) $\dfrac{\cos 3\theta - \cos^3\theta}{\sin^3\theta + \sin 3\theta} = -\tan\theta$ (ञ) $\dfrac{\sin 3\theta + \sin 3\theta}{\sin\theta} - \dfrac{\cos 3\theta + \cos^3\theta}{\cos\theta} = 3$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1 - \tan^2(45° - \theta)}{1 + \tan^2(45° - \theta)} = \sin 2\theta$

(ख) $\frac{1 + \cot^2(45° - \theta)}{1 - \cot^2(45° - \theta)} = \sec 2\theta$

(ग) $\cot(\theta - 45°) - \tan(\theta - 45°) = \frac{2\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta}$

(घ) $2\sin^2(45° - \theta) = 1 - \sin 2\theta$

(ङ) $\cos^2(45° - \theta) - \sin^2(45° - \theta) = \sin 2\theta$

(च) $\frac{\sin(45° + \theta)}{\cos(45° + \theta)} = \frac{\cos 2\theta}{1 - \sin 2\theta}$

(छ) $\sin 2\theta = \frac{1 - \tan^2(45° - \theta)}{1 + \tan^2(45° - \theta)}$

(ज) $\frac{2}{\cos 2\theta} = \tan(45° + \theta) + \tan(45° - \theta)$

(झ) $\frac{1 + \tan^2(45° - \theta)}{2\tan(45° - \theta)} = \sec 2\theta$

(ञ) $1 + \cos 2\theta = 2\sin^2(90° - \theta)$

(ट) $\tan(45° - \theta) - \tan(\theta - 45°) = 2\sec^2\theta$

(ठ) $\frac{1}{4}(\frac{1}{\sin 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°}) = 1$

(ठ) $\frac{1}{\sqrt{3}}[\sin(45° + \theta) + \cos(45° + \theta) = \cos\theta$

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^4\theta - \cos^4\theta = - \cos 2\theta$

(ख) $8(\sin^6\theta + \cos^6\theta) = 5 + 3\cos 4\theta$

(ग) $8(\cos^6\theta - \sin^6\theta) = 7\cos 2\theta + \cos 2\theta.\cos 4\theta$

(घ) $\sin^8\theta - \cos^8\theta = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta - \frac{1}{8}\sin^4 2\theta$

(ङ) $8(\sin^8\theta + \cos^8\theta) = 8 - 8\sin^2 2\theta + \sin^4 2\theta$

(च) $4(\cos^8\theta - \sin^8\theta) = 3\cos 2\theta + \cos 2\theta.\cos 4\theta$

(छ) $\frac{\tan 8\theta}{\tan 2\theta} = \frac{\sec 8\theta - 1}{\sec 8\theta - 1}$

(ज) $\frac{4(\cos^3 20° + \cos^3 10°)}{\cos 20° + \sin 10°} = \frac{\sec^8\theta - 1}{\sec^4\theta - 1}$

(झ) $8(\sin^4\theta) = 3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$

(ञ) $8(\cos^4\theta) = 3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta$

6. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\cos 2\theta = (a^2 + \frac{1}{a^2})$

(ख) $\cos 4\theta = (a^4 + \frac{1}{a^4})$

7. यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos 3\theta = (a^3 + \frac{1}{a^3})$

8. यदि $\sin\theta = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin 3\theta = (a^3 + \frac{1}{a^3})$

9. यदि $\cos 2A = \frac{3\cos 2A - 1}{3 - \cos 2B}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan A = \pm\sqrt{2}.\tan B$

10. यदि $\tan\theta = \frac{b}{a}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $b\sin 2\theta + a\cos 2\theta = a$

5.2 अपर्वतक कोणको त्रिकोणमितीय अनुपातहरू (Trigonometric Ratios of Sub-Multiple Angles)

त्रिभुजका कुनै कोण A लाई आधा गर्दा $\frac{A}{2}$ र एकतिहाई गर्दा $\frac{A}{3}$ हुन्छ। यहाँ, कोणहरू $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}$ आदिलाई कोण A का अपर्वतक कोणहरू (Sub-multiple Angles) भनिन्छ।

(क) **कोण A को त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई $\frac{A}{2}$ को रूपमा व्यक्त गर्दा** (sinA, cosA **र** tanA **को मात्र**)

यहाँ,

हामीलाई थाहा छ,

$\sin A = \sin(\frac{A}{2} + \frac{A}{2})$ हुन्छ।

$= \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}$

$= \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$

$= 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$

$\therefore \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$ ....(i)

त्यसैगरी cosA बराबर के होला ?

यहाँ, $\cos A = \cos A(\frac{A}{2} + \frac{A}{2})$

$= \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}$

$= \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

$\therefore \cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$ ....(ii)

हामीलाई थाहा छ,

$\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos^2\frac{A}{2}$ तथा $\cos^2\frac{A}{2} = 1 - \sin^2\frac{A}{2}$

अतः $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - (1 - \cos^2\frac{A}{2})$

$= \cos^2\frac{A}{2} - 1 + \cos^2\frac{A}{2}$

$\therefore \cos A = \cos^2\frac{A}{2} - 1$ ....(iii)

र $\cos A = \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

$= 1 - \sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

$\therefore \cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ ....(iv)

समीकरण (iii) र (iv) बाट क्रमशः

$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$ ....(v)

$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$ ....(vi)

फेरी यहाँ,

$\tan A = \tan(\frac{A}{2} + \frac{A}{2})$

$= \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}.\tan\frac{A}{2}}$

$\therefore \tan A = \dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1 - \tan^2\frac{A}{2}}$ ....(vii)

उदाहरणहरू

1. यदि $\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{5}$ भए sinA,cosA र tanA का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ, $\sin\frac{A}{2} = \frac{3}{5}$ हुँदा $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{A}{2}} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$

$= 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{2}$

$= \frac{24}{25}$

$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

$= 2 \times (\frac{4}{5})^2 - 1$

$= 2 \times \frac{16}{25} - 1$

$= \frac{32}{25} - 1$

$= \frac{32 - 25}{25}$

$= \frac{7}{25}$

र $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$

$= \frac{24}{7}$

2. यदि $\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}$ भए sinA, cosA र tanA का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ

$\sin A = \frac{1}{2}$ भए $\cos\frac{A}{2} = ?$

$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{A}{2}}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 - 1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{3}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

त्यसैगरी

$$\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$$

$$= 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} - 1 \qquad [\because (\sqrt{3})^2 = 3]$$

$$= \frac{6 - 4}{4}$$

$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

र $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{3}$$

अभ्यास 5.2 (क)

1. यदि $\cos\frac{A}{2} = \frac{3}{2}$ भए sinA, cosA र tanA का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् (उत्तरः $\frac{24}{25}$, $-\frac{7}{25}$ र $-\frac{24}{7}$)
2. यदि $\cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए sinA, cosA र tanA का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् (उत्तरः $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$ र $\sqrt{3}$)
3. यदि $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए sinA, cosA र tanA का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् (उत्तरः 1, 0, ∞)
4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$

(ख) $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$

(ग) $\tan\theta = \dfrac{\tan 2}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$

(घ) $\sin 90° = 2\sin 45°.\cos 45° = 1$ ($\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

(ङ) $\cos 90° = \cos^2 30° - \sin^2 30° = \frac{1}{2}$ ($\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ र $\sin 30° = \frac{1}{2}$)

(च) $\tan 60^\circ = \frac{2\tan 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} = \sqrt{3}$ $(\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}})$

(छ) $\cos 90^\circ = \cos^2 45^\circ - \sin^2 45^\circ = 0$ $(\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}})$

(ज) $\tan 90^\circ = \frac{2\tan 45^\circ}{1 - \tan^2 45^\circ} = \infty$ $(\tan 45^\circ = 1)$

(झ) यदि $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(ख) कोण A को त्रिकोणमितीय अनुपातहरूलाई $\frac{A}{3}$ को रुपमा व्यक्त गर्दा (sinA, cosA **र** tanA **को मात्र)**

यहाँ $\sin A = \sin 3.\frac{A}{3}$ $[\because A = 3 \times \frac{A}{3}]$

$\therefore \sin A = 3\sin\frac{A}{3} - 4\sin^3\frac{A}{3}$ ....(i)

त्यसैगरी, $\cos A = \cos 3\frac{A}{3}$ $[\because A = 3 \times \frac{A}{3}]$

$\therefore \cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$ ....(ii)

र $\tan A = \tan 3\frac{A}{3}$ $[\because A = 3 \times \frac{A}{3}]$

$\therefore \cos A = \frac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}}$ ....(iii)

उदाहरणहरू

1. यदि $\sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ,

$\sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$ भए $\cos\frac{\theta}{3} = ?$

$\cos\frac{\theta}{3} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$? $[\because \cos\frac{\theta}{3} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{3}}$]

$= \sqrt{\frac{4-1}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin A = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$

$= 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times (\frac{1}{2})^3$

$= \frac{3}{2} - 4 \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3 - 1}{2}$

$= \frac{2}{2}$

$= 1$

$\therefore \sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}$ भए $\sin\theta = 1$ हुन्छ ।

त्यसै गरी,

$\cos\theta = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

$= 4 \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{4 \times 3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= 0$

अथवा,

$\frac{12\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{12\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{0}{8}$

$= 0$

र $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{0}$

$= \infty$

2. यदि $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{4}{5}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ, $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{4}{5}$ भए $\sin\frac{\theta}{3} = ?$

$\sin\frac{\theta}{3} = \sqrt{1 - \cos^2\frac{\theta}{3}}$ $\quad$ [$\because \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$]

$= \sqrt{1 - (\frac{4}{5})^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{25 - 16}{25}}$

$= \sqrt{\frac{9}{25}}$

$= \frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$

$= 3 \times \frac{3}{5} - 4 \times (\frac{3}{5})^3$

$= \frac{9}{5} - \frac{4 \times 27}{125}$

$= \frac{225 - 108}{125}$ $\quad$ [$\because$ 5 र 125 को ल.स. 125 भएकोले]

$\therefore \sin\theta = \frac{117}{125}$

त्यसैगरी,

$\cos\theta = 4\cos^2\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

$= 4 \times (\frac{4}{5})^3 - 4 \times \frac{4}{5}$

$= 4 \times \frac{64}{125} - \frac{12}{5}$

$= \frac{256 - 300}{125}$ $\quad$ [$\because$ 5 र 125 को ल.स. 125 भएकोले]

$= \frac{-44}{125}$

र $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{117}{125} \div \frac{-44}{125} = \frac{-117}{44}$

अभ्यास 5.2 (ख)

1. यदि $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः 1, 0, ∞)

2. यदि $\sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

3. यदि $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{3}{5}$ भए $\sin\theta$, $\cos\theta$ र $\tan\theta$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्। (उत्तरः $\frac{44}{125}, -\frac{117}{125}, \frac{44}{125}$)

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin\theta = 3\sin\frac{\theta}{3} - 4\sin^3\frac{\theta}{3}$

(ख) $\cos\theta = 4\cos\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$

(ग) $\tan\theta = \dfrac{4\cos\frac{\theta}{3} - \tan^3\frac{\theta}{3}}{1 - 3\tan\frac{\theta}{3}}$

(घ) $\sin 90° = 3\sin 30° - 4\sin^3 30° = 1$ $\quad [\sin 30° = \frac{1}{2}]$

(ङ) $\cos 90° = 4\cos^3 30° - 3\cos 30° = 0$ $\quad [\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

(च) $\tan 135° = \dfrac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1 - 3\tan^2 45°} = -1$ $\quad [\tan 45° = 1]$

(छ) $\sin 180° = 3\sin 60° - 4\sin^3 60° = 0$ $\quad [\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

(ज) $\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = -1$ $\quad [\cos 60° = \frac{1}{2}]$

(झ) $\sin 270° = 3\sin 90° - 4\sin^3 90° = -1$

(ञ) यदि $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 45°$ हुन्छ भने प्रमाणित गर्नुहोस्।

उदाहरणहरू

1. यदि $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\sin 15°$, $\cos 15°$ र $\tan 15°$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\sin 30° = ?$

$\sin 30° = \sqrt{1 - \cos^2 30°}$

$= \sqrt{1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$= \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4 - 3}{4}} = \frac{1}{2}$

हामीलाई थाहा छ,

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$$

अथवा $2\sin^2\frac{30°}{2} = 1 - \cos30°$

अथवा $2\sin^2 15° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा $\sin^2 15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}$ [$\because$ अंश र हरलाई 2 ले गुणान गर्दा]

$= \frac{1}{8}(3 - 2\sqrt{3} + 1)$ [$\because 4 = 3 + 1$]

$= \frac{1}{8}\{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1^2\}$ [$\because 3 = (\sqrt{3})^2$]

$= (\frac{1}{2\sqrt{2}})^2 (\sqrt{3} - 1)^2$ [$\because 8 = (2\sqrt{2})^2$]

$= \{\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)\}^2$

$\therefore \sin15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$ [$\because$ $\sin15°$ पहिलो चतुर्थांशमा पर्दछ, त्यसको मान घनात्मक हुन्छ ।]

त्यसैगरी,

$2\cos^2\frac{30°}{2} = 1 + \cos30°$

अथवा $2\cos^2 15° = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा $2\cos^2 15° = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{8}$

$= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1^2}{(2\sqrt{2})^2}$

$= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(2\sqrt{2})^2}$

$\therefore \cos15° = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ [$\because$ $\cos15°$ पहिलो चतुर्थांशमा पर्ने भएकोले त्यसैको मान घनात्मक हुन्छ]

$$\tan 15° = \frac{\sin 15°}{\cos 15°}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$ [∵ अंश र हरलाई ($\sqrt{3}$ - 1) ले गुणान गर्दा]

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$ [∵ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ तथा $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$]

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1}$$ [∵ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$]

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{2}$$ [∵ $(\sqrt{3})^2 = 3$]

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}(2 - 2\sqrt{3})}{\cancel{2}}$$

$$\therefore \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$ (ख) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$

(क) यहाँ,

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \cancel{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \cancel{\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$ [∵ $1 = \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}$ र $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$]

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$ [∵ अंश र हरबाट $2\cos^2\frac{\theta}{2}$ हटाउँदा]

$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो।

(ख) दायाँ पक्ष $= \frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$

$$= \frac{1 + 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} - (1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})}{\cancel{1} + \sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - \cancel{1}}$$

$$= \frac{\cancel{1} + 2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2} - \cancel{1} + 2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos\frac{\theta}{2}[\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}]}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}\cancel{[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}]}}{\cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}\cancel{[\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}]}}$$

$$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$= \tan\frac{\theta}{2} =$ बायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो।

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\sec\theta + \tan\theta = \tan(45° + \frac{\theta}{2})$

बायाँ पक्ष $= \sec\theta + \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}.\sin\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})^2}{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})}$

$= \dfrac{\cancel{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})}(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})}{\cancel{(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2})}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2})}$

$= \dfrac{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}$ [∵ अंश र हरलाई $\cos\frac{\theta}{2}$ ले भाग गर्दा]

$= \dfrac{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} + \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} - \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}} = \dfrac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}}$

$= \dfrac{\tan 45° + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan 45°.\tan\frac{\theta}{2}}$ [∵ $1 = \tan 45°$ र $\tan\frac{\theta}{2} = 1 \times \tan\frac{\theta}{2}$]

$= \tan(45° + \frac{\theta}{2})$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो। [पुनश्चः यो समस्यालाई दायाँ पक्ष पनि हल गर्न सकिन्छ, गर्नुहोस्।]

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2 = 1 + \sin\theta$$

दायाँ पक्ष $= (\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})^2$

$= \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + 2.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$

$= 1 + \sin 2.\frac{\theta}{2}$

$= 1 + \sin\theta$

= दायाँ पक्ष

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\frac{\theta}{2}$$

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

$= \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{2\sin\theta.\cos\theta}{\cos^2\theta + \cancel{\sin^2\theta} + \cos^2\theta - \cancel{\sin^2\theta}}$

$= \frac{\cancel{\cos\theta}}{1+\cos\theta} \times \frac{\cancel{2}\sin\theta.\cos\theta}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\theta}$

$= \frac{\cancel{2}\sin\theta.\cancel{\cos^2\theta}}{\cancel{2\cos^2\theta}(1+\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{\cancel{2}\sin\frac{\theta}{2}.\cancel{\cos\frac{\theta}{2}}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{\theta}{2}}$

$= \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$= \tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

6. यदि $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$

यहाँ,

$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$

$\therefore \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$

$= 2\{\frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})\}^2 - 1$

$= 2 \times \frac{1}{4}(a^2 + 2.a.\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}) - 1$

$= \frac{1}{2}(a^2 + \cancel{2} + \frac{1}{a^2} - 2)$ [$\because \frac{1}{2}$ कमन लिँदा] [$2 - 1 = 2 \times \frac{1}{2}$]

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})$ प्रमाणित भयो ।

7. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\sin^6\frac{\theta}{2} + \cos^6\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}(4 - 3\sin^2\theta)$

बायाँ पक्ष $= \sin^6\frac{\theta}{2} + \cos^6\frac{\theta}{2}$

$= (\cos^2\frac{\theta}{2})^3 + (\sin^2\frac{\theta}{2})^3$

$= (\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})\ (\cos^4\frac{\theta}{2} + \sin^4\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2})$

$= 1\{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}\} - \sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}$ [$\because a^4 + b^4 = (a^2 + b^2) - 2a^2b^2$]

$= 1^2 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - 3\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}$

$= 1 - 3 \times \frac{1}{4}\ (4\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2})$

$= 1 - \frac{3}{4}(2\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2})^2$

$=\frac{4}{4}-\frac{3}{4}(\sin\cancel{2}.\frac{\theta}{\cancel{2}})^2$

$=\frac{1}{4}(4-3\sin^2\theta)$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

8. प्रमाणित गर्नुहोस

$$\frac{\cos^3\frac{\theta}{2}-\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin\theta$$

बायाँ पक्ष $=\frac{\cos^3\frac{\theta}{2}-\sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$

$$=\frac{\cancel{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})}\,(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2})}{\cancel{(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})}}$$

$=1-\frac{1}{2}(2\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})$

$=1-\frac{1}{2}.\sin^2\frac{\theta}{2}$

$=1-\frac{1}{2}\sin\theta$ = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यास: 5.2 (ग)

1. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$

(ख) $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$

(ग) $1-\sin\theta=(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2})^2$

(घ) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\frac{\theta}{2}$

(ङ) $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$

(च) $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\cot\frac{\theta}{2}$

(छ) $\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2})=\sec\theta-\tan\theta$

(ज) $\cot\theta-\tan\theta=2\cot\theta$

(झ) $\sin\frac{\theta}{2}.\cos^3\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}.\sin^3\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\sin\theta$

(ञ) $\frac{\sin\theta+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta+1}=\tan\frac{\theta}{2}$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{1 + \sin\theta}}{\sin\frac{\theta}{2} - \sqrt{1 + \sin\theta}} = \tan\frac{\theta}{2}$

(ख) $\dfrac{2\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \cot(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$

(ग) $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) + \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \dfrac{2}{\cos\theta}$

(घ) $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}) = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}}$

(ङ) $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}) = \dfrac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} = \sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\cos^3\frac{\theta}{2} + \sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}(2 - \sin\theta)$

(ख) $\dfrac{\cos^3\frac{\theta}{2} - \sin^3\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}(2 + \sin\theta)$

(ग) $\tan\theta.\tan\theta(60° - \theta)\tan(60° + \theta) = \tan^3\theta$

4. (क) यदि $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् $\cos\theta = -\frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})$

(ख) यदि $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos\theta = \frac{1}{2}(a^2 + \frac{1}{a^2})$

(ग) यदि $\sin\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\sin\theta = -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

(घ) यदि $\cos\frac{\theta}{3} = \frac{1}{2}(a + \frac{1}{a})$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\cos\theta = -\frac{1}{2}(a^3 + \frac{1}{a^3})$

5. यदि $\cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin(22\frac{1}{2})° = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

(ख) $\cos\frac{45°}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(ग) $\tan\frac{45°}{2} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

6. (क) यदि $\cos60° = \frac{1}{2}$ भए $\sin30°$, $\cos30°$ र $\tan30°$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस्।

(उत्तरः $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ र $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

5.3 त्रिकोणमितीय अनुपातहरूका सुत्रहरूको रुपान्तरण

(Transformation of Trigonometric Ratios Formulae)

यहाँ sine र cosine को गुणनफलाई जोड वा अन्तर तथा sine र cosine को जोड वा अन्तरलाई गुणनफलमा रुपान्तरण गरिन्छ। sine र cosine लाई संक्षेपमा sin र cos मात्र लेख्ने गरिन्छ।

5.3 (क) sine र cosine को गुणनफलाई जोड वा अन्तरमा रुपान्तरण

(Transformation of products into sum or difference)

हामीलाई थाहा छ,

$\sin A.\cos B + \cos A.\sin B = \sin(A + B)$ ....(i)

$\sin A.\cos B - \cos A.\sin B = \sin(A - B)$ ....(ii)

यहाँ समीकरण (i) बाट (ii) लाई जोड्दा

$2\sin A.\cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ ....(iii)

त्यसैगरी समीकरण (i) बाट (ii) लाई घटाउँदा

$\cancel{\sin A.\cos B} + \cos A.\sin B = \sin(A + B)$

$\cancel{\sin A.\cos B} \pm \cos A.\sin B = \sin(A - B)$

$2\cos A.\sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ ....(iv)

र $\cos A.\cos B - \sin A.\sin B = \cos(A + B)$ ....(v)

$\cos A.\cos B + \sin A.\sin B = \cos(A - B)$ ....(vi)

अब समीकरण (v) बाट (vi) लाई जोड्दा

$2\cos A.\cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ ....(vii)

त्यसैगरी समीकरण (v) बाट समीकरण (vi) घटाउँदा

$\cancel{\cos A.\cos B} + \sin A.\sin B = \cos(A + B)$

$\cancel{\cos A.\cos B} \pm \sin A.\sin B = \cos(A - B)$

$-2\sin A.\sin B = \cos(A + B) - \cos(A - B)$

अथवा

$2\sin A.\sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

उदाहरणहरू

1. तलका sin र cos का गुणनफलहरूलाई sin र cos को जोड वा अन्तरका रुपमा रुपान्तरण गर्नुहोस्।

(क) $2\sin5\theta.3\cos\theta$ (ख) $\cos7\theta.\cos4\theta$

(ग) $\sin3\theta.\sin\theta$ (घ) $2\cos4\theta.\sin\theta$

(क) दिइएको गुणनफल = $2\sin5\theta.\cos3\theta$

sin र cos को गुणनफल समीकरण (iii) को सूत्रसँग सम्बन्धित छ।

तसर्थ, $2\sin5\theta.\cos3\theta = \sin(5\theta + 3\theta) + sn(5\theta - 3\theta)$

$= \sin8\theta + \sin2\theta$

(ख) दिइएको cos र cos को गुणनफल = $\cos7\theta.\cos4\theta$ छ जुन समीकरण (vii) सँग सम्बन्धित छ।

$\therefore \cos7\theta.\cos4\theta = \frac{1}{2}[2\cos7\theta.\cos4\theta]$

$= \frac{1}{2}[\cos(7\theta + 4\theta) + \cos(7\theta - 4\theta)]$

$= \frac{1}{2}[\cos11\theta + \cos3\theta]$

(ग) दिइएको sin र sin को गुणनफल = $\sin3\theta.\sin\theta$ छ, जुन समीकरण (vii) सँग सम्बन्धित छ।

$\therefore \sin3\theta.\sin\theta = \frac{1}{2}[2\sin3\theta.\sin4\theta]$

$= \frac{1}{2}[\cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta)]$

$= \frac{1}{2}[\cos2\theta - \cos4\theta]$

(घ) दिइएको गुणनफल $2\cos4\theta.\sin\theta$ छ, जुन समीकरण (iv) सँग सम्बन्धित छ।

$\therefore 2\cos4\theta.\sin\theta = [\sin(4\theta + \theta] - \sin(4\theta - \theta)]$

$= \sin5\theta - \sin3\theta$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $2\sin60°.\cos30° = \frac{3}{2}$

बायाँ पक्ष $= 3\sin60°\cos30°$

$= [\sin(60° + 30°) + (60° - 30°)]$

$= \sin90° + \sin30°$

$= 1 + \frac{1}{2}$

$= 1 \text{ x } \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ [∵ हर समान बनाउन]

$= \frac{2 + 1}{2}$

$= \frac{3}{2}$ = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

(ख) $\cos75°.\sin15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

बायाँ पक्ष $= \cos75°.\sin15°$

$= \frac{1}{2}[2\cos75°.\sin15°]$

$= \frac{1}{2}[\sin(75° + 15°) - \sin(75° - 15°)]$

$= \frac{1}{2}[\sin90° - \sin60°]$

$= \frac{1}{2}[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{1}{2}[\frac{2 - \sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin20°.\sin40°.\sin60°.\sin80° = \frac{3}{16}$

यहाँ,

बायाँ पक्ष $= \sin20°.\sin40°.\sin60°.\sin80°$

$= \sin20°.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}(2\sin80°.\sin40°)$ $\quad [\because \sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\ \sin20°[\cos(80° - 40°) - \cos(80° + 40°)]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\ \sin20°[\cos40° - \cos120°]$

$= \quad .\ \sin20°[\cos40° + \frac{1}{2}]$ $\quad [\because \cos120° = -\frac{1}{2}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\ \cos40°.\sin20° + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[2\cos40°.\sin20°] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin(40°+ 20°) - \sin(40°- 20°)] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8}[\sin60°- \sin20°] + \frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°$

$= \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\sin20°}$

$= \frac{3}{16}$ = बायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

पुनश्चः $\cos10°\cos30°\cos50°\cos70° = \sin20°\sin40°\sin60°\sin80°$

(ख) $\cos10°.\cos20°.\cos50°.\cos70° = \frac{3}{16}$

बायाँ पक्ष $= \cos10°\cos30°\cos50°\cos70°$

$= \cos10° \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}[2\cos70°\cos50°]$ $\quad [\because \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos10°[\cos(70°+50°) + \cos(70°- 50°)]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos10°[\cos120° + \cos20°]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos10°[-\frac{1}{2} + \cos20°]$ $\quad [\because \cos120° = -\frac{1}{2}]$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\ \cos10° + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos20°.\cos10°$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2}(2\cos20°.\cos10°)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{8}[\cos(20° + 10°) + \cos(20° - 10°)]$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos30° + \cos10°)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{8}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos10°)$

$= -\cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10°} + \frac{3}{16} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{8}\cos10°}$ $\quad [\because \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3]$

$= \frac{3}{16}$ = दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$4\sin\theta.\sin(60° + \theta).\sin(60° - \theta) = \sin^3\theta$

बायाँ पक्ष $= 4\sin\theta.\sin(60° + \theta).\sin(60° - \theta)$

$= 2\sin\theta\{2\sin(60° + \theta).\sin(60° - \theta)\}$

$= 2\sin\theta[\cos\{(60° + \theta) - (60° - \theta) - \cos(60° - \theta)\}]$

$= 2\sin\theta[\cos(\cancel{60°} + \theta - \cancel{60°} + \theta) - \cos120°]$

$= 2\sin\theta[\cos^2\theta + \frac{1}{2}]$ $\quad [\because -\cos120° = \frac{1}{2}]$

$= 2\cos^2\theta.\sin\theta + 2 \times \frac{1}{2}\sin\theta$

$= [\sin(2\theta + \theta) - \sin(2\theta - \theta)] + \sin\theta$

$= \sin3\theta - \cancel{\sin\theta} + \cancel{\sin\theta}$

$= \sin3\theta$ = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$4\cos\theta.\cos(45° + \theta) \cos(45° - \theta) = \cos\theta + \cos3\theta$

बायाँ पक्ष $= 4\cos\theta.\cos(45° + \theta).\cos(45° - \theta)$

$= 2\cos\theta[2\cos(45° + \theta).\cos(45° - \theta)]$

$= 2\cos\theta[\cos(45° + \theta + 45° - \theta) + \cos(45° + \theta - 45° + \theta)]$

$= 2\cos\theta[\cos90° + \cos^2\theta]$

$= 2\cos\theta[0 + \cos^2\theta]$

$= 2\cos\theta \times 0 + 2\cos^2\theta.\cos\theta$

$= 0 + [\cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta)]$

$= \cos3\theta + \cos\theta =$ दायाँ पक्ष प्रमाणित भयो ।

अभ्यासः 5.3 (क)

1. तलका sine र cosine का गुणनफलहरूलाई sin र cos को जोड वा अन्तरका रुपमा रुपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $2\sin3\theta.\cos\theta$ (ख) $2\cos45°.\sin15°$ (ग) $\cos90°.\cos30°$ (घ) $\sin90°.\sin40°$

(ङ) $\cos50°.\sin30°$ (च) $-2\sin60°.\sin40°$ (छ) $2\sin5\theta.\cos2\theta$ (ज) $2\sin52°.\sin32°$

उत्तरहरूः (क) $\sin4\theta + \cos2\theta$ (ख) $\sin60° - \sin30°$ (ग) $\cos120° + \cos60°$
(घ) $\cos50° - \cos130°$ (ङ) $\sin80° - \sin20°$ (च) $\cos100° - \cos20°$
(छ) $\sin7\theta + \sin3\theta$ (ज) $\cos20° - \cos84°$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) $\sin75°.\cos15° = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (ख) $2\cos60°.\sin30° = \frac{1}{2}$

(ग) $\cos90°.\cos60° = 0$ (घ) $\sin45°.\sin15° = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

3. प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) $\sin10°.\sin30°.\sin50°.\sin70° = \frac{1}{16}$ (ख) $\cos20°.\cos40°.\cos60°.\cos80° = \frac{1}{16}$

(ग) $\cos20°.\cos30°.\cos40°.\cos80° = \frac{\sqrt{3}}{16}$ (घ) $\sin20°.\sin30°.\sin40°.\sin80° = \frac{\sqrt{3}}{16}$

(ङ) $16\sin20°.\sin40°.\sin80° = \sqrt{3}$

4. प्रमाणित गर्नुहोस् ।

(क) $2\sin(45° + \theta).\sin(45° - \theta) = \cos2\theta$ (ख) $2\cos(45° + \theta).\cos(45° - \theta) = \cos2\theta$

(ग) $4\cos\theta.\cos(60° + \theta).\cos(60° - \theta) = \cos3\theta$ (घ) $4\sin\theta.\sin(45° + \theta).\sin(45° - \theta) = \sin3\theta - \sin\theta$

(ङ) $16\sin6°.\sin42°.\sin66°.\sin78° = 1$ (च) $\sin\theta.\cos\theta.\cos2\theta.\cos4\theta = \frac{1}{8}\sin8\theta$

(छ) $\sin\theta.\cos\theta.\cos2\theta.\cos4\theta.\cos8\theta = \frac{1}{16}\sin16\theta$

(ख) sine र cosine **को जोड वा अन्तरलाई गुणनफलमा रुपान्तरण**

(Transformation of sum or difference into product)

हामीलाई थाहा छ,

$\sin(A + B) + \sin(A - B) = 2\sin A.\cos B$ ....(i)

$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\cos A.\sin B$ ....(ii)

$\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A.\cos B$ ....(iii)

$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2\sin A.\sin B$ ....(iv)

$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A.\sin B$ ....(v)

अब, $A + B = C$ र $A - B = D$ मान्दा

यी दुवैलाई जोड्दा,

$2A = C + D$

$\therefore A = \frac{C + D}{2}$ र $A + B = C$

$-A \pm B = -D$ घटाउँदा ।

$2B = C - D$

$\therefore B = \frac{C - D}{2}$

माथिको समीकरण (i), (ii), (iii) र (iv) मा यी मानध्य प्रतिस्थापना गर्दा

$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C + D}{2}.\cos\frac{C - D}{2}$ ....(vi)

$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C + D}{2}.\sin\frac{C - D}{2}$ ....(vii)

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C + D}{2}.\cos\frac{C - D}{2}$ ....(viii)

$\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C + D}{2}.\sin\frac{C - D}{2}$ ....(ix)

र $\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C + D}{2}.\sin\frac{C - D}{2}$ ....(x)

उदाहरणहरू

1. तल दिइएका जोड वा अन्तरलाई गुणनफलमा रुपान्तरण गर्नुहोस् ।

(क) $\sin 40° + \sin 50°$ **(ख) $\cos 50° + \cos 30°$**

(क) यहाँ $\sin 40° + \sin 50° = 2 \sin \frac{50° + 40°}{2} . \cos \frac{50° - 40°}{2}$

$= 2 \sin \frac{90°}{2} . \cos \frac{10°}{2}$

$= 2 \sin 45° . \cos 5°$

(ख) यहाँ $\cos 50° + \cos 30° = 2 \cos \frac{50° + 30°}{2} . \cos \frac{50° - 30°}{2}$

$= 2 \cos \frac{80°}{2} . \cos \frac{20°}{2}$

$= 2 \cos 40° . \cos 10°$

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\frac{\sin 3\theta + \sin \theta}{\cos 3\theta + \cos \theta} = \tan 2\theta$ **(ख) $\frac{\sin 5\theta - \sin \theta}{\cos 5\theta + \cos \theta} = \tan 2\theta$**

(क) यहाँ

बायाँ पक्ष $= \frac{\sin 3\theta + \sin \theta}{\cos 3\theta + \cos \theta}$

$$= \frac{2 \sin \frac{3\theta + \theta}{2} . \cos \frac{3\theta - \theta}{2}}{2 \cos \frac{3\theta + \theta}{2} . \cos \frac{3\theta - \theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{4\theta}{2} . \cos \frac{2\theta}{2}}{\cos \frac{4\theta}{2} . \cos \frac{2\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin 2\theta . \cos \theta}{\cos 2\theta . \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$= \tan 2\theta =$ दाया पक्ष, प्रमाणित भयो ।

(ख) यहाँ

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin 5\theta - \sin\theta}{\cos 5\theta + \cos\theta}$

$= \dfrac{2\cos\dfrac{5\theta+\theta}{2} . \sin\dfrac{5\theta-\theta}{2}}{2\cos\dfrac{5\theta+\theta}{2} . \cos\dfrac{5\theta-\theta}{2}}$

$= \dfrac{\cos\dfrac{6\theta}{2} . \sin\dfrac{4\theta}{2}}{\cos\dfrac{6\theta}{2} . \cos\dfrac{4\theta}{2}}$

$= \dfrac{\cos 3\theta . \sin 2\theta}{\cos 3\theta . \cos 2\theta}$

$= \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

$= \tan 2\theta =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

3. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\mathbf{\cos 10° - \sin 10°}}{\mathbf{\cos 10° + \sin 10°}} = \mathbf{\tan 35°}$

(ख) $\dfrac{\mathbf{\cos 50° + \sin 30°}}{\mathbf{\cos 50° - \sin 30°}} = \dfrac{\mathbf{\tan 35°}}{\mathbf{\tan 5°}}$

(क) यहाँ

बायाँ पक्ष $= \dfrac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°}$

$= \dfrac{\cos(90° - 80°) - \sin 10°}{\cos(90° - 80°) + \sin 10°}$

[$\therefore$ अंश र हरमा समान त्रिकोण अनुपातहरूको अन्तर र जोड बनाउनु पर्ने भएकोले]

$= \dfrac{\sin 80° - \sin \sin 10°}{\sin 80° + \sin 10°}$ [$\therefore \cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

$= \dfrac{2\cos\dfrac{80° + 10°}{2} . \sin\dfrac{80° - 10°}{2}}{2\sin\dfrac{80° + 10°}{2} . \cos\dfrac{80° - 10°}{2}}$

$= \dfrac{\cos\dfrac{90°}{2} . \sin\dfrac{70°}{2}}{\sin\dfrac{90°}{2} . \cos\dfrac{70°}{2}}$

$$= \frac{\cos 45° . \sin 35°}{\sin 45° . \cos 35°}$$

$= \cot 45° . \tan 35°$ $\quad [\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ र $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}]$

$= 1 \times \tan 35°$ $\quad [\therefore \cot 45° = 1]$

$= \tan 35° =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

(ख) यहाँ

बायाँ पक्ष $= \frac{\cos 50° + \sin 30°}{\cos 50° - \sin 30°}$

$= \frac{\cos(90° - 40°) + \sin 30°}{\cos(90° - 40°) - \sin 30°}$ $\quad [\therefore 50° = 90° - 40°]$

$= \frac{\sin 40° + \sin 30°}{\sin 40° - \sin 30°}$ $\quad [\therefore \cos(90° - \theta) = \sin\theta]$

$$= \frac{2 \sin \frac{40° + 30°}{2} . \cos \frac{40° - 30°}{2}}{2 \cos \frac{40° + 30°}{2} . \sin \frac{40° - 30°}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{70°}{2} . \cos \frac{10°}{2}}{\cos \frac{70°}{2} . \sin \frac{10°}{2}}$$

$$= \frac{\sin 35° . \cos 5°}{\cos 35° . \sin 5°}$$

$= \tan 35° . \cot 5°$

$= \tan 35° \times \frac{1}{\tan 5°}$ $\quad [\therefore \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}]$

$= \frac{\tan 35°}{\tan 5°} =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

4. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\mathbf{\frac{2 \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 2\theta}{2 \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta} = \tan 3\theta}$$

बायाँ पक्ष $= \frac{2 \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 2\theta}{2 \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta}$

$$= \frac{2\sin 3\theta + 2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\,.\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}}{2\cos 3\theta + 2\cos\frac{4\theta+2\theta}{2}\,.\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}}$$

$$= \frac{2(\sin 3\theta + \sin 3\theta\,.\cos\theta)}{2(\cos 3\theta + \cos 3\theta\,.\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin 3\theta(1+\cos\theta)}{\cos 3\theta(1+\cos\theta)}$$

$= \tan 3\theta =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

5. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\mathbf{\frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta}$$

बायाँ पक्ष$= \frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$

$$= \frac{(\sin 5\theta + \sin\theta) + (\sin 4\theta + \sin 2\theta)}{(\cos 5\theta + \cos\theta) + (\cos 4\theta + \cos 2\theta)}$$

$$= \frac{\left(2\,.\sin\frac{5\theta+\theta}{2}\,.\cos\frac{5\theta-\theta}{2}\right) + \left(2\,.\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\,.\cos\frac{4\theta-\theta}{2}\right)}{\left(2\cos\frac{5\theta+\theta}{2}\,.\cos\frac{5\theta-\theta}{2}\right) + \left(2\cos\frac{4\theta+2\theta}{2}\,.\cos\frac{4\theta-2\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\sin 3\theta\,.\cos 2\theta + 2\sin 3\theta\,.\cos\theta}{2\cos 3\theta\,.\cos 2\theta + 2\cos 3\theta\,.\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sin 3\theta(\cos 2\theta + \cos\theta)}{2\cos 3\theta(\cos 2\theta + \cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta}$$

$= \tan 3\theta =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\mathbf{\frac{\sin(A+2\theta) + \sin A\theta}{\cos A\theta + \cos(A+2\theta)} = \tan(A+\theta)}$$

बायाँ पक्ष $= \frac{\sin(A+2\theta) + \sin A\theta}{\cos A\theta + \cos(A+2\theta)}$

$$= \frac{2\sin\frac{A+2\theta+A\theta}{2} . \cos\frac{A+2\theta-A\theta}{2}}{2\cos\frac{A+2\theta+A}{2} . \cos\frac{A+2\theta-\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{2A\theta+2\theta}{2} . \cos\frac{2\theta}{2}}{\cos\frac{2A\theta+2\theta}{2} . \cos\frac{2\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin(A+\theta) . \cos\theta}{\cos(A+\theta) . \cos\theta}$$

$= \tan(A + \theta) =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो।

7. यदि $\sin 2A + \sin 2B = \frac{1}{3}$ र $\cos 2A + \cos 2B = \frac{1}{2}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $3\tan(A + B) = 2$

यहाँ, $\sin 2A + \sin 2B = \frac{1}{3}$

अथवा $2\sin\frac{2A+2B}{2} . \cos\frac{2A-2B}{2} = \frac{1}{3}$

अथवा $6\sin(A + B) . \cos(A - B) = 1$ … … … (i)

र $\cos 2A + \cos 2B = \frac{1}{2}$

अथवा $2\cos\frac{2A+2B}{2} . \cos\frac{2A-2B}{2} = \frac{1}{2}$

अथवा $4\cos(A + B) . \cos(A - B) = 1$ … … … (ii)

समीकरण (i) लाई समीकरण (ii) ले भाग गर्दा

$$\frac{6\sin(A+B) . \cos(A-B)}{4\cos(A+B) . \cos(A-B)} = 1$$

अथवा $\frac{3}{2}\tan(A + B) = 1$

$\therefore$ $3\tan(A + B) = 2$ [$\therefore$ छड्के गुणन गर्दा]

प्रमाणित भयो।

अभ्यास 5.3

1. तल दिइएका जोड वा अन्तरलाई गुणनफलमा रुपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $\sin 70° + \sin 10°$
[उत्तरः $2 \sin 40° . \cos 30°$]

(ख) $\sin 75° - \sin 15°$
[उत्तरः $2 \cos 45° . \sin 30°$]

(ग) $\cos 80° + \cos 20°$
[उत्तरः $2 \cos 50° . \cos 30°$]

(घ) $\cos 50° - \cos 20°$
[उत्तरः $-2 \sin 35° . \sin 15°$]

(ङ) $\sin 5\theta + \sin \theta$
[उत्तरः $2 \sin 3\theta . \cos 2\theta$]

(च) $\cos 7\theta - \cos 3\theta$
[उत्तरः $-2 \sin 5\theta . \sin 2\theta$]

2. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{\sin 70° + \sin 10°}{\cos 70° + \cos 10°} \tan 40°$

(ख) $\dfrac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 50° + \cos 10°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(ग) $\dfrac{\sin 75° - \sin 15°}{\cos 75° + \cos 15°} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(घ) $\dfrac{\sin 80° + \sin 20°}{\cos 80° - \cos 20°} = \sqrt{3}$

(ङ) $\dfrac{\cos 2\theta + \sin \theta + \sin 5\theta}{\sin 2\theta + \cos \theta - \cos 5\theta} = \cot 2\theta$

(च) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin 5\theta - \sin \theta}{\cos 2\theta + \cos 5\theta + \cos 4\theta} = \tan 2\theta$

(छ) $\dfrac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin A \cos B + \sin B \cos B} = \tan(A - B)$

(ज) $\dfrac{2 \sin A + \sin(A + B) + \sin(A - B)}{2 \cos A + \cos(A + B) + \cos(A - B)} = \tan A$

(झ) $\dfrac{\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$

(ञ) $\dfrac{\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cos 9\theta}{\sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \sin 9\theta} = \cot 6\theta$

3. यदि $\sin 2A - \sin 2B = \dfrac{1}{2}$ र $\cos 2B - \cos 2A = \dfrac{1}{3}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $3 \tan(A + B) = 2$

4. यदि $\sin 2A - \sin 2B = \dfrac{1}{3}$ र $\cos 2B - \cos 2A = \dfrac{1}{3}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\tan(A + B) = \cot(A - B)$.

5. यदि $\sin 2A - \sin 2B = \dfrac{3}{4}$ र $\cos 2A + \cos 2B = \dfrac{2}{3}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $8 \tan(A - B) = 9$

6. प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^4\theta = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2} \cos 2\theta + \dfrac{1}{8} \cos 4\theta$

(ख) $\cos^8\theta + \sin^8\theta = 1 - \sin^2 2\theta + \dfrac{1}{8} \sin^4 2\theta$

5.4 अनुबन्धित त्रिकोणमितीय सर्वसमिका (Conditional Trigonometrical Identities)

तल दिइएका सर्वसमिकाहरू अवलोकन गर्नुहोस्।

i) $\sin^2A + \cos^2A = 1$

ii) $\sec^2A = 1 + \tan^2A$

iii) $\text{cosec}^2A = 1 + \cot^2A$

के यी माथिका सर्वसमिकाहरू कोण A को जुनसुकै मानका लागि सर्वस्वीकार्य छ ? हेरौँ के कति अवस्थामा ती सर्वसमिकाहरू सर्वस्वीकार्य छ, परीक्षण गरौँ। मानौ A = 0°, 30°, 45°, 60°, 90° आदिलाई राखेर हेर्दा

i) $\sin^2 0° + \cos^2 0° = 1$

$0 + 1 = 1$

$\therefore$ $1 = 1$ सत्य छ, स्वीकार्य छ।

$\sin^2 30° + \cos^2 30° = 1$

अथवा $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

अथवा $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

अथवा $\frac{1+3}{4} = 1$

अथवा $\frac{4}{4} = 1$

$\therefore$ $1 = 1$ सत्य छ, स्वीकार्य छ।

$\cos^2 45° = \sin^2 45° = 1$

अथवा $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$

अथवा $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ सत्य छ, स्वीकार्य छ।

$\cos^2 60° + \sin^2 60° = 1$

अथवा $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

अथवा $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

अथवा $\frac{1 + 3}{4} = 1$

अथवा $\frac{4}{4} = 1$ सत्य छ, स्वीकार्य छ।

$\sin^2 90° + \cos^2 90° = 1$

अथवा $(1)^2 + (0)^2 = 1$

अथवा $1 + 0 = 1$ सत्य छ, स्वीकार्य छ।

त्यसै गरी सर्वसमिकाहरू $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ र $\mathrm{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ मा पनि A को मानहरू 0°, 30°, 45°, 60° र 90° राखेर हेर्दा सत्य हुन्छन् । त्यसैले माथिका तीन वटै त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाहरू (Trigonometric Identities) हुन् भने कुनै निश्चित अवस्था वा सर्तमा वा सर्तभित्र मात्र मान्य हुने सर्वसमिकाहरूलाई अनुबन्धित सर्वसमिकाहरू (Conditional Identities) भनिन्छ। फरक फरक अवस्था र परिस्थितिमा सर्तहरू फरक फरक हुन सक्छन् । यस पाठमा हामीले दिइएको अवस्था वा सर्तमा रही त्रिभुजका तीन वटा भित्री कोणहरूको योगफल 180°

अर्थात् $A + B + C = \pi^c$ वा 180° लाई लिएर केही सम्बन्धहरू स्थापित गरी तत्सम्बन्धी समस्याहरू हल गर्ने प्रयास गरिने छौँ।

अब यसका लागि केही आवश्यक सम्बन्धहरूका बारे छलफल तथा अध्ययन गरौँ।

क) यदि $A + B + C = \pi^c$ (π रेडियन) छ भने

$A + B = \pi^c - C$

अथवा $B + C = \pi^c - A$

अथवा $C + A = \pi^c - B$ हुन्छ।

$\therefore$ $\sin(C + A) = \sin(\pi^c - B) = \sin B$

$\sin(A + B) = \sin(\pi^c - C) = \sin C$

$\sin(B + C) = \sin(\pi^c - A) = \sin A$

$\cos(A + B) = \cos(\pi^c - C) = -\cos C$

$\cos(B + C) = \cos(\pi^c - A) = -\cos A$

$\cos(C + A) = \cos(\pi^c - B) = -\cos B$

ख) यदि $A + B + C = \pi^c$ भए

$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi^c}{2}$ हुन्छ (दुवै तर्फ 2 ले भाग गर्दा)

अथवा $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}$

$\frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi^c}{2} - \frac{A}{2}$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

$\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

$\sin\left(\frac{C}{2} + \frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{B}{2}\right) = \cos\frac{B}{2}$

$\therefore \quad \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$

$\cos\left(\frac{C}{2} + \frac{A}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{B}{2}\right) = \sin\frac{B}{2}$

[$\therefore \quad \sin(90° - \theta) = \cos\theta$ र $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$]

के यसरी नै अन्य सम्बन्धहरू स्थापित गर्न सकिएला ? छलफल तथा अध्ययन गरी हेर्नुहोस्।

उदाहरणहरू

1. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस्।

$$\mathbf{\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$ अथवा $\cos\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

बायाँ पक्ष $= \sin A + \sin B + \sin C = (\sin A + \sin B) + \sin C$

$= 2\sin\frac{A + B}{2} . \cos\frac{A - B}{2} + \sin C \qquad [\therefore \ \sin\frac{A + B}{2} = \cos\frac{C}{2}]$

$= 2\cos\frac{C}{2} . \cos\frac{A - B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} .\cos\frac{C}{2}$

[$\therefore \ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ र $\sin\theta = \sin 2\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$]

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\left(\frac{\frac{A+B+A-B}{2}}{2}\right).\cos\left(\frac{\frac{A+B-A+B}{2}}{2}\right)\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{2A}{2\times 2}.\cos\frac{2B}{2\times 2}\right]$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \qquad \left[\cos\frac{\theta}{2} \neq \cos\frac{\theta}{2}\right]$$

2. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\tan(A + B) = \tan(\pi^c - C)$

अथवा $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$ [$\therefore$ $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$ र $\pi^c = 180°$]

अथवा $\tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A \tan B)$ [$\therefore$ छड्के गुणन गर्दा]

अथवा $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A . \tan B . \tan C$

अथवा $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

प्रमाणित भयो।

3. **यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।**

$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A . \sin B . \sin C$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\sin(A + B) = \sin(\pi^c - C) = \sin C$

अथवा $\cos(A + B) = \cos(\pi^c - C) = -\cos C$

बायाँ पक्ष $= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C$

$= 2 \sin \frac{2A + 2B}{2} . \cos \frac{2A - 2B}{2} + \sin 2C$

$= 2 \sin \frac{2(A + B)}{2} . \cos \frac{2(A - B)}{2} + \sin 2C$

$= 2 \sin(A + B) . \cos(A - B) + \sin 2C$

$= 2 \sin C . \cos(A - B) + 2 \sin C . \cos C \quad [\therefore \sin 2C = 2 \sin C . \cos C]$

$= 2 \sin C[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 2 \sin C[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \quad [\therefore \cos C = -\cos(A + B)]$

$= 2 \sin C\left[2 \sin \frac{A + B + A - B}{2} . \sin \frac{A + B - A + B}{2}\right] = -(A - B) = -A + B$

$= 2 \sin C\left[2 \sin \frac{2A}{2} . \sin \frac{2A}{2}\right]$

$= 2 \sin C(2 \sin A . \sin B) \quad \left[\therefore 2 \sin \frac{2A}{2} \times\right]$

$= 4 \sin A . \sin B . \sin c =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

4. **यदि $A + B + C = \pi^c$ भए $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -[1 + 4 \cos A \cos B \cos C]$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :**

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\cos(A + B) = \cos(\pi^c - C) = -\cos C$

अथवा $-\cos(A + B) = \cos C$

बायाँ पक्ष $= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$

$= (\cos 2A + \cos 2B) + \cos 2C$

$= 2\cos\frac{2A + 2B}{2} . \cos\frac{2A - 2B}{2} + \cos 2C$

$= 2\cos\frac{2(A + B)}{2} . \cos\frac{2(A - B)}{2} + \cos 2C$

$= 2\cos(A + B) . \cos(A - B) + \cos 2C$

$= 2[-\cos C . \cos(A - B)] + 2\cos^2 C - 1$ $\quad [\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1]$

$= -2\cos C . \cos(A - B) + 2\cos^2 C - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) - \cos C] - 1$

$= -2\cos C[\cos(A - B) + \cos(A + B)] - 1$

$= -2\cos C\left[2\cos\frac{A + B + A - B}{2} . \cos\frac{A + B - (A - B)}{2}\right] - 1$ $\quad [\therefore A + B > A - B]$

$= -2\cos C\left[2\cos\frac{2A}{2} . \cos\frac{A + B - A + B}{2}\right] - 1$

$= -2\cos C[2\cos A . \cos B] - 1$

$= -4\cos A . \cos B . \cos C - 1$

$= -[1 + 4\cos A . \cos B . \cos C]$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो।

5. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2\sin A \sin B \cos C$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\cos(A + B) = \cos(\pi^c - C) = -\cos C$

अथवा $-\cos(A + B) = \cos C$

बायाँ पक्ष $= \cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B) - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B] - \cos^2 C$ $\quad [\therefore 2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta]$

$= \frac{1}{2}[2 + (\cos 2A + \cos 2B)] - \cos^2 C$

$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} . 2 \cos \frac{2A + 2B}{2} . \cos \frac{2A - 2B}{2} - \cos^2 C$

$= 1 + \cos \frac{2(A + B)}{2} . \cos \frac{2(A - B)}{2} - \cos^2 C$

$= 1 + \cos(A + B) . \cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C . \cos(A - B) - \cos^2 C$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ $[\therefore\ (A + B) > (A - B)]$

$= 1 - \cos C\left[2 \cos \frac{A + B + A - B}{2} . \cos \frac{A + B - A + B}{2}\right]$

$= 1 - \cos C\ [2 \cos A . \cos B]$

$= 1 - 2 \cos A . \cos B . \cos C =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

6. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् ।

$\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A . \cos B . \sin C$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

$\therefore$ $\sin(A + B) = \sin C$

बायाँ पक्ष $= \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2} (2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B) + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2} [1 - \cos 2A - (1 - \cos 2B)] + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2} [1 - \cos 2A - 1 + \cos 2B] + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2} [\cos 2B - \cos 2A] + \sin^2 C$

$= \frac{1}{2}\left[2 \sin \frac{2A + 2B}{2} . \sin \frac{2A - 2B}{2}\right] + \sin^2 C$ $[\therefore$ यदि $A > B]$

$= \sin \frac{2(A + B)}{2} . \sin \frac{2(A - B)}{2} + \sin^2 C$

$= \sin(A + B) . \sin(A - B) + \sin^2 C$

$= \sin C . \sin(A - B) + \sin^2 C$

$= \sin C[\sin(A - B) + \sin C]$

$= \sin C[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$

$= \sin C\left[2 \sin \frac{A + B + A - B}{2} . \sin \frac{A + B - A + B}{2}\right]$

$= \sin C[2 \sin A . \sin B]$

$= 2 \sin A . \sin B . \sin C =$ दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

7. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$4 \sin A \cos B \sin C - 1 = \cos 2B - \cos 2C - \cos 2A$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\sin(A + B) = \sin(\pi^c - C) = \sin C$

दायाँ पक्ष $= \cos 2B - \cos 2C - \cos 2A$

$= \cos 2B - \cos 2A - \cos 2C$

$= 2 \sin \frac{2B + 2A}{2} . \sin \frac{2A - 2B}{2} - \cos 2C$

$= 2 \sin(B + A) . \sin(A - B) - (1 - 2 \sin^2 C)$

$= 2 \sin C \sin(A - B) - 1 + 2 \sin^2 C$

$= 2 \sin C[\sin(A - B) + \sin C] - 1$

$= 2 \sin C[\sin(A - B) + \sin(A + B)] - 1$

$= 2 \sin C\left[2 \sin\frac{A - B + A + B}{2} . \cos\frac{A - B - A - B}{2}\right] - 1$

$= 2 \sin C[2 \sin A. \cos(-B)] - 1$

$= 4\sin A . \cos B . \sin C - 1$ [$\geq \cos(-\theta) = \cos \theta$]

= बायाँ पक्ष,

$\therefore$ वायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

8. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = 8 \sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2}$$

यहाँ, $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\dfrac{A + B}{2} = \dfrac{\pi^c - C}{2}$

अथवा $\sin\left(\dfrac{A + B}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi^c - C}{2}\right) = \cos\dfrac{C}{2}$

त्यसै गरी $\cos\left(\dfrac{A + B}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$

र $A + B = \pi^c - C$

$\sin(A + B) = \sin(\pi^c - C) = \sin C$

$\cos(A + B) = \cos(\pi^c - C) = -\cos C$

वायाँ पक्ष $= \dfrac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C}$

उदाहरण 1 बाट $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}$

उदाहरण 3 बाट $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C$

$\therefore$ वायाँ पक्ष $= \dfrac{4\sin A.\sin B.\sin C}{4\cos\dfrac{A}{2}.\cos\dfrac{B}{2}.\cos\dfrac{C}{2}}$

$$= \frac{\left(2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2}\right).\left(2\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}\right).\left(2\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}}$$

$= 8\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{B}{2}.\sin\dfrac{C}{2}$

= दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

9. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\mathbf{1 - 2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} = \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}}$$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\dfrac{A + B}{2} = \dfrac{\pi^c - C}{2}$

अथवा $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

त्यसै गरी $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $= \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin^2\frac{B}{2}\right) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[1 - \cos A + 1 - \cos B] + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[2 - (\cos A + \cos B)] + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2} . \cos\frac{A-B}{2}\right) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \cos\frac{A+B}{2} . \cos\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{A-B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 1 - \sin\frac{C}{2}\left[2 . \sin\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}}{2} . \sin\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right]$$

$$= 1 - 2\sin\frac{C}{2} . \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2}$$

$$= 1 - 2\sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$$

= बायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

10. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\mathbf{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2\left[1 + \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}\right]}$$

यहाँ $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi^c - C}{2}$

अथवा $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi^c}{2} - \dfrac{C}{2}\right) = \sin\dfrac{C}{2}$

त्यसै गरी $\sin\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \cos\dfrac{C}{2}$

$\therefore$ वायाँ पक्ष $= \cos^2\dfrac{A}{2} + \cos^2\dfrac{B}{2} + \cos^2\dfrac{C}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos^2\frac{B}{2}\right] + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos A + 1 + \cos B] + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[2 + (\cos A + \cos B)] + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2} . \cos\frac{A-B}{2}\right) + \cos^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 + \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{A-B}{2} + 1 - \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2 + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2 + \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 2 + \sin\frac{C}{2}\left[2\sin\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}}{2} . \sin\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right]$$

$$= 2 + 2\sin\frac{C}{2} . \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2}$$

$$= 2\left[1 + \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}\right]$$

= दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

11. यदि A + B + C = π^c भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

यहाँ, $A + B + C = \pi^c$

अथवा $A + B = \pi^c - C$

अथवा $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi^c - C}{2}$

अथवा $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

त्यसै गरी $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi^c}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$

$\therefore$ वायाँ पक्ष $= \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{A}{2} + 2\cos^2\frac{B}{2}\right] - \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos A + 1 + \cos B] - \cos^2\frac{C}{2}$

$= \frac{1}{2}[2 + (\cos A + \cos B)] - \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{A+B}{2} . \cos\frac{A-B}{2}\right) - \cos^2\frac{C}{2}$

$= 1 + \sin\frac{C}{2} . \cos\frac{A-B}{2} - 1 + \sin^2\frac{C}{2}$

$= \sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right]$

$= \sin\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}}{2} . \cos\frac{\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}}{2}\right]$

$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2}\right]$

$= 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

= दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

12. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi^c - A}{4} . \cos\frac{\pi^c - B}{4} . \cos\frac{\pi^c - C}{4}$$

$\therefore$ वायाँ पक्ष $= \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{4}\right) . \cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + \cos\frac{C}{2} + \cos\frac{\pi}{2} \quad [\geq \cos 90° = 0]$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi^c - C}{4}\right) . \cos\left(\frac{A-B}{4}\right) + 2\cos\frac{\pi + C}{4} . \cos\frac{\pi - C}{4}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi^c - C}{4}\right)\left[\cos\frac{A-B}{4} + \cos\frac{\pi + C}{4}\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi^c - C}{4}\left[2\cos\frac{\pi^c + C + A - B}{8} . \cos\frac{\pi^c + C - A + B}{8}\right]$$

$$= 4\cos\frac{\pi^c - C}{4}\left[\cos\frac{A+B+C+C+A-B}{8} . \cos\frac{A+B+2C-A+B}{8}\right]$$

$$= 4\cos\frac{\pi^c - C}{4} . \cos\frac{2A+2C}{8} . \cos\frac{2B+2C}{8}$$

$$= 4\cos\frac{\pi^c - C}{4} . \cos\frac{C+A}{4} . \cos\frac{B+C}{4}$$

$$= 4\cos\frac{\pi^c - C}{4} . \cos\frac{\pi^c - B}{4} . \cos\frac{\pi^c - A}{4}$$

$$= 4\cos\frac{\pi^c - A}{4} . \cos\frac{\pi^c - B}{4} . \cos\frac{\pi^c - C}{4}$$

= दायाँ पक्ष, प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 5.4

1. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin A + \sin B - \sin C = 4\sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \cos\frac{C}{2}$

(ख) $\sin A - \sin B + \sin C = 4\sin\frac{A}{2} . \cos\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$

(ग) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$

(घ) $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} . \cos \frac{B}{2} . \sin \frac{C}{2} - 1$

(ङ) $\cos A - \cos B + \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} . \cos \frac{C}{2} - 1$

2. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

(ख) $\tan \frac{A}{2} . \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} . \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} . \tan \frac{A}{2} = 1$

(ग) $\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A . \tan 2B . \tan 2C$

3. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C$

(ख) $\sin 2A - \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \sin B \cos C$

(ग) $\cos 2A - \cos 2B + \cos 2C = 1 - 4 \sin A \cos B \sin C$

(घ) $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C = 1 - 4 \sin A \sin B \cos C$

(ङ) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

4. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

(ख) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$

(ग) $\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \cos B \sin C$

(घ) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

(ङ) $\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \cos B \sin C$

(च) $\sin^2 2A + \sin^2 2B + \sin^2 2C = 2(1 - \cos 2A \cos 2B \cos 2C)$

(छ) $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 2(1 + \cos 2A \cos 2B \cos 2C)$

5. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$

(ख) $\sin^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

(ग) $\cos^2\frac{A}{2} - \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

(घ) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(ङ) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(च) $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

6. यदि $A + B + C = \pi^c$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{\pi^c - A}{4}\sin\frac{\pi^c - B}{4}\sin\frac{\pi^c - C}{4}$

(ख) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{\pi^c - A}{4}\cos\frac{\pi^c - B}{4}\cos\frac{\pi^c - C}{4}$

(ग) $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}$

(घ) $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$

5.5 त्रिकोणमितीय समीकरणको हल (Solution of Trigonometric Equations)

यहाँ तल दिइएका त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको सम्बन्धबारे अध्ययन गरी निष्कर्ष निकालौँ ।

i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta$ र   ii) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

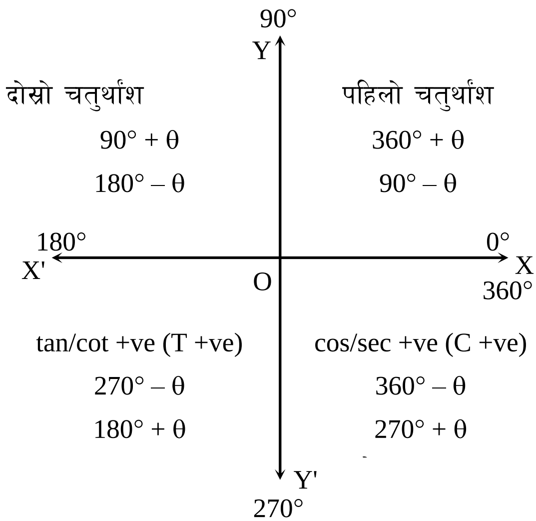
यहाँ पहिलो त्रिकोणमितीय अनुपातको सम्बन्धमा θ को मानहरू (जस्तै 0°, 30°, 45°, 60° र 90°) जुनसुकै हुँदा पनि उक्त सम्बन्ध (Relation) सत्य हुन्छ । त्यसैले यस प्रकारको त्रिकोणमितीय अनुपातको सम्बन्धलाई त्रिकोणमितीय सर्वसमिका (Trigonometrical Identity) भनिन्छ ।

तर $\cos\theta = \frac{1}{2}$ मा θ को मान निश्चित एउटाको लागि मात्र सत्य हुन्छ । θ को जुनसुकै मानका लागि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ सत्य हुन सक्दैनन् । यस्तो केही निश्चित मानका लागि मात्र सत्य हुने वा मान्य हुने त्रिकोणमितीय सम्बन्धलाई त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometric Equation) भनिन्छ ।

यस पाठमा त्रिकोणमितीय समीकरणको हलसम्बन्धी मात्र अध्ययन तथा छलफल गरिनेछ । अतः त्रिकोणमितीय अनुपातहरू प्रयोग गरी बनाएका समीकरणहरूको मात्र हल गरिनेछ ।

(क) त्रिकोणमितीय समीकरणको हल (Solution of Trigonometric Equations)

तल दिइएको चित्र तथा त्रिकोणमितीय समीकरणहरूको हल गर्ने प्रक्रियाहरूको अध्ययन गरौँ।



(क) यदि $\sin\theta = \sin\alpha$ भए $\theta = \alpha$ हुन्छ।

(ख) यदि $\cos\theta = \cos\alpha$ भए $\theta = \alpha$ हुन्छ।

(ग) यदि $\tan\theta = \tan\beta$ भए $\theta = \beta$ हुन्छ।

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

(घ) यदि $\sin A = 0$ भए $\theta = 0°, 180°, 360°$ आदि हुन्छ।

(ङ) यदि $\cos A = 0$ भए $\theta = 90°, 270°$ आदि हुन्छ।

(च) यदि $\tan A = 0$ भए $\theta = 0°, 180°, 360°$ आदि हुन्छ।

(छ) यदि $\sin A = 1$ भए $A = 90°$ हुन्छ।

(ज) यदि $\cos A = 1$ भए $A = 0°, 360°$ आदि हुन्छ।

(झ) यदि $\tan\theta = 1$ भए $\theta = 45°$ हुन्छ।

(ञ) यदि $\sin\theta = -1$ भए $\theta = 270°$ हुन्छ ।

(ट) यदि $\cos\theta = -1$ भए $\theta = 180°$ हुन्छ ।

(ठ) यदि $\tan\theta = -1$ भए $\theta = 135°$ हुन्छ ।

(ड) यदि $\sin\theta = \frac{1}{2}$ भए $\theta = 30°, 150°$ आदि हुन्छ ।

(ढ) यदि $\cos\theta = \frac{1}{2}$ भए $\theta = 60°, 300°$ आदि हुन्छ ।

(ण) यदि $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $\theta = 45°, 135°$ आदि हुन्छ ।

(त) यदि $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ भए $\theta = 45°$ हुन्छ ।

(थ) यदि $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए $\theta = 30°$ हुन्छ ।

(द) यदि $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\theta = 60°, 120°$ आदि हुन्छ ।

(ध) यदि $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ भए $\theta = 30°$ हुन्छ ।

(न) यदि $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ भए $\theta = 30°, 210°$ आदि हुन्छ ।

यसरी नै अन्य त्रिकोणमितीय अनुपातका विशेषहरू भए खोजी पत्ता लगाउनुहोस् र तालिकामा देखाउनुहोस् ।

उदाहरणहरू

1. हल गर्नुहोस् : $2\sin\theta - 1 = 0$ $(0 \le \theta \le 180°)$

यहाँ $2\sin\theta - 1 = 0$

अथवा $2\sin\theta = 1$

अथवा $\sin\theta = \frac{1}{2}$

अथवा $\sin\theta = \sin 30°$ र $\sin 150°$

$\therefore$ $\theta = 30°$ र $150°$ हुन्छ ।

2. हल गर्नुहोस् : $2 \sin \theta - \sqrt{3} = 0 \quad (0 \le \theta \le 180°)$

यहाँ $2 \sin \theta - \sqrt{3} = 0$

अथवा $2 \sin \theta = \sqrt{3}$

अथवा $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा $\sin \theta = \sin 60°$ र $\sin 120°$

$\therefore \quad \theta = 60°$ र $120°$ हुन्छ।

3. हल गर्नुहोस् : $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0 \quad (0 \le \theta \le 180°)$

यहाँ $2 \cos \theta + \sqrt{3} = 0$

अथवा $2 \cos \theta = -\sqrt{3}$

अथवा $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

अथवा $\cos \theta = \cos 150°$

$\therefore \theta = 150°$ हुन्छ।

4. हल गर्नुहोस् : $\tan \theta - \sqrt{3} = 0 \quad (0 \le \theta \le 90°)$

यहाँ $\tan \theta - \sqrt{3} = 0$

अथवा $\tan \theta = \sqrt{3}$

अथवा $\tan \theta = \tan 60°$

$\therefore \theta = 60°$ हुन्छ।

5. $0 \le \theta \le 180°$ भित्र हल गर्नुहोस्।

क) $\tan \theta - \sin \theta = 0$ **ख) $6 \cos^2\theta + \cos \theta = 1$**

(क) यहाँ $\tan \theta - \sin \theta = 0$

अथवा $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta = 0$

अथवा $\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta} = 0$

अथवा $\sin\theta - \sin\theta\cos\theta = 0$ (छड्के गुण गर्दा)

अथवा $\sin\theta(1 - \cos\theta) = 0$

यहाँ $\sin\theta = 0$ … … … (i) वा $1 - \cos\theta = 0$ … … … (ii)

समीकरण (i) बाट

$\sin\theta = 0$

अथवा $\sin\theta = \sin 0°$ र $\sin 180°$

$\therefore$ $\theta = 0°$ र $180°$ हुन्छ।

समीकरण (ii) बाट

$1 - \cos\theta = 0$

अथवा $1 = \cos\theta$

अथवा $\cos 0° = \cos\theta$

$\therefore$ $\theta = 0°$ हुन्छ।

तसर्थ, $\theta = 0°$ र $180°$ नै हुन्छ।

(ख) यहाँ $6\cos^2\theta + \cos\theta = 1$

अथवा $6\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

अथवा $6\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$ [$\geq \cos\theta = 3\cos\theta - 2\cos\theta$]

अथवा $3\cos\theta(2\cos\theta + 1) - 1(2\cos\theta + 1) = 0$

अथवा $(2\cos\theta + 1)(3\cos\theta - 1) = 0$

यहाँ $2\cos\theta + 1 = 0$ … … … (i) वा $3\cos\theta - 1 = 0$ … … … (ii)

समीकरण (i) बाट

$2\cos\theta + 1 = 0$

अथवा $2\cos\theta = -1$

अथवा $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

अथवा $\cos\theta = \cos 120°$

$\therefore$ $\theta = 120°$ हुन्छ।

समीकरण (ii) बाट

$3\cos\theta - 1 = 0$

अथवा $3\cos\theta = 1$

अथवा $\cos\theta = \frac{1}{3}$

$\therefore$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ हुन्छ । $= \cos 70.53°$

तसर्थ, $\theta = 70.53°$ र $120°$ हुन्छ ।

6. **हल गर्नुहोस् : $4\sec^2\theta = 7\tan^2\theta + 3 = 0$ $(0° \le \theta \le 180°)$**

यहाँ $4\sec^2\theta = 7\tan^2\theta + 3 = 0$

अथवा $4(1 + \tan^2\theta) = 7\tan^2\theta + 3$

अथवा $4 + 4\tan^2\theta - 7\tan^2\theta - 3 = 0$

अथवा $1 - 4\tan^2\theta = 0$

अथवा $-3\tan^2\theta = -1$

अथवा $\tan^2\theta = \frac{-1}{-3}$

अथवा $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

अथवा $\tan\theta = \tan 30°$ र $\tan 150°$

$\therefore$ $\theta = 30°$ र $150°$ हुन्छ ।

7. **हल गर्नुहोस् : $\cot^2\theta = 3 - \mathrm{cosec}^2\theta$ $(0° \le \theta \le 180°)$**

यहाँ $\cot^2\theta = 3 - \mathrm{cosec}^2\theta$

अथवा $\cot^2\theta - 3 + \mathrm{cosec}^2\theta = 0$

अथवा $\cot^2\theta - 3 + 1 + \cot^2\theta = 0$

अथवा $2\cot^2\theta - 2 = 0$

अथवा $2(\cot^2\theta - 1) = 0$

अथवा $\cot^2\theta - 1 = 0$ $[\ge 2 \ne 0]$

अथवा $(\cot\theta + 1)(\cot\theta - 1) = 0$ $[\ge a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

अथवा $\cot\theta = \pm 1$

अथवा $\cot\theta = \cot 45°$ र $\cot 135°$

$\therefore$ $\theta = 45°$ र $135°$ हुन्छ ।

8. हल गर्नुहोस् : $\cos\theta - 1 = \sqrt{3}\sin\theta$ $(0° \le \theta \le 360°)$

यहाँ $\cos\theta - 1 = \sqrt{3}\sin\theta$

अथवा $(\cos\theta - 1)^2 = (\sqrt{3}\sin\theta)^2$ [≥ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

अथवा $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 = 3\sin^2\theta$ [≥ $(\cos\theta - 1)^2 = \cos^2\theta - 2\cos\theta + 1$]

अथवा $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - 3\sin^2\theta = 0$

अथवा $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - 3(1 - \cos^2\theta) = 0$

अथवा $\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - 3 + 3\cos^2\theta = 0$

अथवा $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 2 = 0$

अथवा $2(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1) = 0$

अथवा $2\cos^2\theta - 2\cos\theta + \cos\theta - 1 = \frac{0}{2}$

अथवा $2\cos\theta(\cos\theta - 1) + 1(\cos\theta - 1) = 0$

अथवा $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

अथवा $\cos\theta - 1 = 0$ … … … (i) वा $2\cos\theta + 1 = 0$ … … … (ii)

समीकरण (i) बाट

$\cos\theta = 1 = \cos 0°$ र $\cos 360°$

$\therefore$ $\theta = 0°$ र $360°$

समीकरण (ii) बाट

$2\cos\theta = -1$

अथवा $\cos\theta = -\frac{1}{2} = \cos 120°$ र $\cos 240°$

$\therefore$ $\theta = 120°$ र $240°$

तसर्थ $\theta = 0°, 120°, 240°$ र $360°$ हुन्छ ।

9. **हल गर्नुहोस् : $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(0° \le \theta \le 180°)$**

यहाँ $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ लाई $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ले भाग गर्दा

$$\frac{1}{\sqrt{2}} . \sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{2}$$

अथवा $\sin 45° . \sin\theta + \cos 45° . \cos\theta = \frac{1}{2}$

अथवा $\cos(\theta - 45°) = \cos 60°$ $[\geq \cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)]$

अथवा $\theta - 45° = 60°$

अथवा $\theta = 60° + 45° = 105°$

$\therefore$ $\theta = 105°$ हुन्छ ।

अभ्यास 5.5 (क)

1. **हल गर्नुहोस् : $(0° \le \theta \le 90°)$**

(क) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $(\theta = 30°)$

(ख) $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $(\theta = 60°)$

(ग) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\theta = 60°)$

(घ) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\theta = 30°)$

(ङ) $\tan\theta = 1$ $(\theta = 45°)$

(च) $\tan\theta = \sqrt{3}$ $(\theta = 60°)$

(छ) $2\sin\theta - 1 = 0$ $(\theta = 60°)$

(ज) $2\cos\theta - \sqrt{3}$ $(\theta = 30°)$

(झ) $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ $(\theta = 30°)$

(ञ) $\sin\theta - 1 = 0$ $(\theta = 90°)$

(ट) $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$ $(\theta = 45°)$

(ठ) $\sqrt{3}\tan\theta = 0$ $(\theta = 0°)$

2. **हल गर्नुहोस् : $(0° \le \theta \le 180°)$**

(क) $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(\theta = 105°)$

(ख) $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta - 3 = 0$ $(\theta = 45°, 135°)$

(ग) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta = 2$ $(\theta = 30°, 150°)$

(घ) $\sqrt{2} . \cos^2\theta = \sin\theta$ $(\theta = 45°, 135°)$

(ङ) $\cos^2\theta + \sin\theta = 1$ $(\theta = 0°, 180°)$

(च) $\sqrt{2} . \sin^2\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ $(\theta = 45°, 90°)$

(छ) $3 \sin^2\theta + 5 \cos^2\theta = 4$ $(\theta = 45°, 135°)$

(ज) $4 \sec^2\theta - 7 \tan^2\theta - 3 = 0$ $(\theta = 30°, 150°)$

(झ) $4 \tan^2\theta - 7 \sec^2\theta + 8 = 0$ $(\theta = 30°, 150°)$

(ञ) $\tan^2\theta - 3 \sec \theta + 3 = 0$ $(\theta = 0°, 60°)$

3. **हल गर्नुहोस् : $(0° \le \theta \le 360°)$**

(क) $\tan^2\theta - 3 \sec \theta + 3 = 0$ $(\theta = 0°, 60°, 360°)$

(ख) $\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{3}$ $(\theta = 0°, 60°, 360°)$

(ग) $\sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta - 1$ $(\theta = 0°, 120°, 240°, 360°)$

(घ) $1 - \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = 0$ $(\theta = 0°, 120°, 240°, 360°)$

(ङ) $\tan^2\theta - \sec \theta - 1 = 0$ $(\theta = 60°, 180°, 300°)$

(च) $\tan \theta + \cot \theta - 2 \operatorname{cosec} \theta = 0$ $(\theta = 0°, 60°, 180°, 300°)$

(छ) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{3}$ $(\theta = 0°, 60°, 360°)$

(ज) $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \cos \theta = 1$ $(\theta = 0°, 60°, 360°)$

(झ) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$ $(\theta = 75°, 165°)$

(ञ) $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2$ $(\theta = 60°)$

4. **हल गर्नुहोस् : $(0° \le \theta \le 360°)$**

(क) $\sin 3\theta + \sin 2\theta = \sin \theta$ $(\theta = 0°, 60°, 180°, 360°)$

(ख) $\sin 3\theta - \sin 2\theta + \sin \theta = 0$ $(\theta = 0°, 60°, 90°, 180°)$

(ग) $\sin 3\theta + \sin 2\theta + \sin \theta = 0$ $(\theta = 0°, 90°, 120°, 240°)$

(घ) $\cos 3\theta + \cos 2\theta + \cos \theta = 0$ $(\theta = 45°, 135°, 60°, 120°)$

(ङ) $\cos 3\theta - \cos 2\theta + \cos \theta = 0$ $(\theta = 45°, 135°)$

(च) $\cos 3\theta - \sin 2\theta - \cos \theta = 0$ $(\theta = 0°, 90°, 30°, 150°)$

(छ) $\sin 4\theta - \sin 2\theta = 0$ $(\theta = 0°, 30°, 90°, 180°, 360°)$

(ज) $\sin 4\theta + \sin 2\theta = 0$ $(\theta = 0°, 60°, 90°, 120°, 180°, 360°)$

(झ) $\cos 3\theta + \cos \theta = 0$ $(\theta = 45°, 90°, 135°, 270°)$

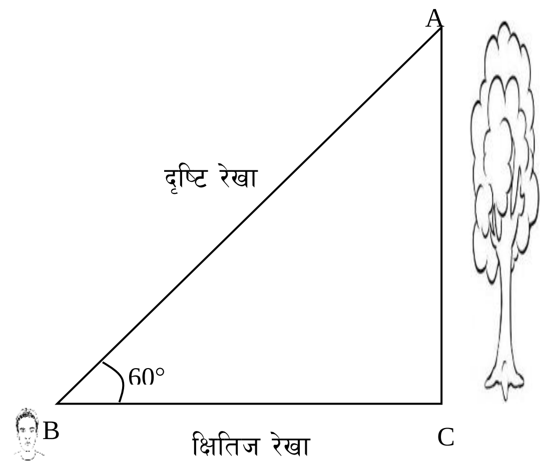
(ञ) $\cos 3\theta - \cos \theta = 0$ $(\theta = 0°, 90°, 180°, 360°)$

5.6 उचाइ र दुरी (Height and Distance)

यस पाठमा त्रिकोणमितीय अनुपातहरूको प्रयोगबाट उचाइ तथा दुरी सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरू समाधान गरिन्छ। उचाइ तथा दुरी सम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरूलाई समकोण त्रिभुज बनाई त्यसको एउटा भुजा र कोण मात्र मापन गरी बाँकी भुजाहरूको मापनलाई व्यावहारिक बनाइ हल गरिन्छ। उचाइ तथा दुरीसम्बन्धी शाब्दिक समस्याहरू समाधानमा विशेष गरी tangent (tan) को अनुपात प्रयोग गरिन्छ।

(क) उन्नतांश कोण (Angle of Elevation):

दायाँको चित्रमा एउटा अवलोकन कर्ताले रुखको टुप्पो हेर्दा दृष्टि रेखा (line of sight) ले क्षितिज रेखा (horizontal line) सँग 60° को कोण बनाएको छ। यसरी दृष्टि रेखाले क्षितिज रेखासँग बनाएको कोणलाई उन्नतांश कोण (Angle of Elevation) भनिन्छ।



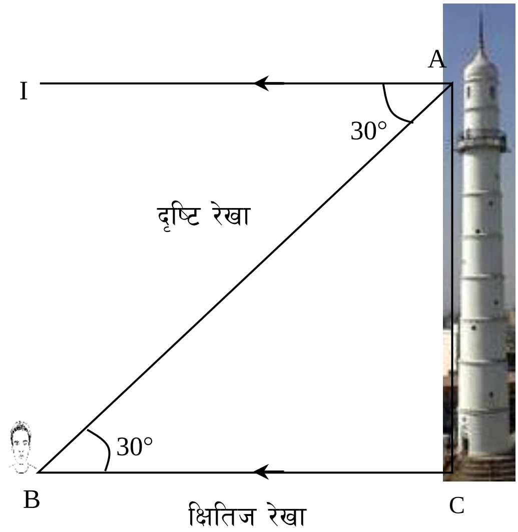
अतः अवलोकन कर्ताले होचो स्थानमा बसी अग्लो स्थानमा रहेको वस्तुको अवलोकन गर्दा दृष्टि रेखाले क्षितिज वा जमिनसँग समानान्तर रेखासँग बनाइएको कोणलाई उन्नतांश कोण भनिन्छ।

चित्रमा $\rightarrow$ABC = उन्नतांश कोण हो। जसको मान 60° छ। चित्रमा अवलोकन कर्ता र रुखको फेदबिचको दुरी थाहा भएमा रुखको उचाइ पत्ता लगाउन सकिन्छ।

यहाँ $\tan 60° = \dfrac{\text{रुखको उचाइ ९ब्म्र०}}{\text{क्षितिज रेखाको लम्बाइ ९द्यत्र्म०}}$

अथवा $AC = \sqrt{3}\,BC$ एकाइ हुन्छ।

(ख) अवनति कोण (Angle of Depression):



दायाँको चित्रमा जमिनमा मान्छेलाई हेर्दा दृष्टि रेखाले जमिनसँग समानान्तर हुने रेखासँग 30° को कोण बनाएको छ। यसरी दृष्टि रेखाले जमिन वा क्षितिजसँग समानान्तर हुने रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (Angle of Depression) भनिन्छ।

अतः कुनै अग्लो स्थानबाट होचो स्थानतिर कुनै वस्तुलाई हेर्दा दृष्टि रेखाले क्षितिजसँग समानान्तर हुने काल्पनिक रेखासँग बनाएको कोणलाई अवनति कोण (Angle of Depression) भनिन्छ।

चित्रमा $\rightarrow$IAB = 30° = अवनति कोण हो = $\rightarrow$ABC। चित्रमा अवलोकन विन्दु B र धरहराको फेद C बिचको दुरी थाहा भएमा धरहराको बार्दालीसम्मको उचाइ पत्ता लगाउन सकिन्छ।

यहाँ $\tan 30° = \dfrac{\text{धरहराको बार्दालीसम्मको उचाइ ९ब्क्षृ०}}{\text{अवलोकन विन्दु र धरहराको फेद बिचको दूरी ९द्यक्षृ०}}$

अथवा $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{AC}{BC}$ अथवा $AC = \dfrac{1}{\sqrt{3}} BC$ एकाइ

उदाहरणहरू

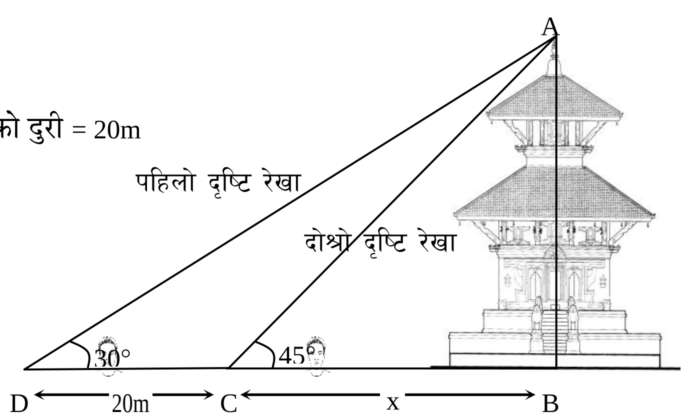
1. **कुनै एकजना पर्यटकले कुनै एउटा मन्दिरको टुप्पाको उन्नतांश कोण 30° पाएछ र मन्दिरतिर अरु 20m हिडेपछि सोही मन्दिरको टुप्पाको उन्नतांश कोण 45° पाएछ। मन्दिरको उचाइ र मन्दिरबाट पहिलो दृष्टि विन्दुको दुरी निकाल्नुहोस्।**

यहाँ

AB = मन्दिरको उचाइ

CD = पर्यटक उभिएको दुई विन्दुबिचको दुरी = 20m

BC = पर्यटक उभिएको दोस्रो विन्दु र मन्दिरबिचको दुरी = x मान्दा



अब समकोण fABC बाट

$$\tan 45° = \frac{\text{मन्दिरको उचाइ ९ब्द्य०}}{\text{पर्यटक उभिएको दोश्रो विन्दु र मन्दिर बिचको दूरी ९द्यऋ०}}$$

$1 = \frac{AB}{x}$ [≥ tan 45° = 1]

$\therefore$ AB = x = BC … … … (i)

फेरि समकोण fABD बाट

$\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{CD + BC}$

अथवा $CD + BC = \sqrt{3}\,x$

अथवा $20 + x = \sqrt{3}\,x$

अथवा $20 = \sqrt{3}\,x - x$

अथवा $20 = x(\sqrt{3} - 1)$

अथवा $20 = x\,(1.732 - 1)$

अथवा $20 = x\,(0.732)$

अथवा $x = \frac{20}{0.732}$

$\therefore$ x = 27.32m

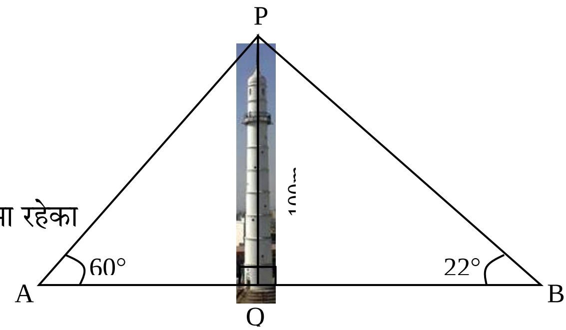
मन्दिरबाट पहिलो दृष्टि विन्दुसम्मको दुरी (BD) = BC + CD

= 27.32 + 20

= 47.32m

तसर्थ मन्दिरको उचाइ (AB) = 27.32m र मन्दिरबाट पहिलो दृष्टि विन्दुसम्मको दुरी (BD) = 47.32m

2. एउटा 100m अग्लो धरहराको टुप्पालाई सम्मुख पारेर धरहराको दुवैतिर रहेका एकै समतलका दुई विन्दुहरू क्रमशः A र B बाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 60° र 22° पाएछन् । ती दुई विन्दुहरूबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।



यहाँ, चित्रमा

PQ = 100m धरहराको उचाइ

P = धरहराको टुप्पो

धरहराको दुवैतिर रहेका एउटै समतल सतहमा रहेका

दुई विन्दुहरू क्रमशः A र B छन् ।

→ PAQ = 60°

= पहिलो विन्दु A बाट धरहराको टुप्पो P लाई हेर्दा बनेको उन्नतांश कोण

→PBQ = 22°

= दोस्रो विन्दु B बाट धरहराको टुप्पो P लाई हेर्दा बनेको दोस्रो उन्नतांश कोण

अब समकोण ƒPQA बाट

$\tan 60° = \frac{PQ}{AQ}$

$\sqrt{3} = \frac{100m}{AQ}$

अथवा $AQ = \frac{100m}{\sqrt{3}} = \frac{100m}{1.732} = 57.736m$

फेरी समकोण ƒPQB बाट

$\tan 22° = \frac{PQ}{QB}$

अथवा $0.404 = \frac{100m}{QB}$

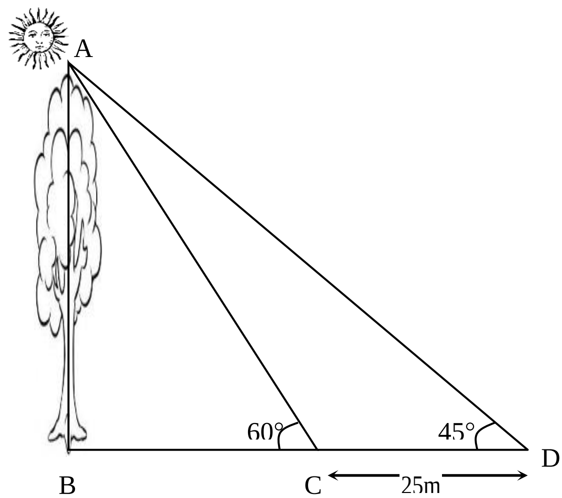
अथवा $QB = \frac{100m}{0.404} = 247.524m$

तसर्थ दुई विन्दुहरू A र B बीचको दुरी (AB) = (57.736 + 247.524)m

= 305.26m

3. **कुनै रूखको छायाको लम्बाइ सूर्यको उचाइ 45° भएको बेला सूर्यको उचाइ 60° भएको भन्दा 25m लामो छ। रुखको उचाइ निकाल्नुहोस्।**

यहाँ, चित्रमा



AB = रुखको उचाइ = x मान्दा

→ACB = 60°

→ADB = 45° सूर्यका उचाइहरू BC

र BD रुखको छायाका लम्बाइहरू

अब प्रश्नअनुसार

BD = BC + CD

= BC + 25m

समकोण ƒABC बाट

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

अथवा $\sqrt{3} = \frac{x}{BC}$

अथवा $BC = \frac{x}{\sqrt{3}}$ … … … (i)

फेरि समकोण ƒABD बाट

$\tan 45° = \frac{AB}{BD}$

अथवा $1 = \frac{x}{BC + CD}$ [≥ tan 45° = 1]

अथवा BC + 25m = x … … … (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$\frac{x}{\sqrt{3}} + 25m = x$

अथवा $25m = x - \frac{x}{\sqrt{3}}$

अथवा $25m = x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

अथवा $25m = x\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$

अथवा $x(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3} \times 25m$

अथवा $x = \frac{\sqrt{3} \times 25m}{\sqrt{3}-1}$

$= \frac{\sqrt{3} \times 25m(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$ [≥ अंश र हरलाई $(\sqrt{3}+1)$ ले गुणन गर्दा]

$= \frac{25(3+\sqrt{3})}{3-1}$ m

$= \frac{25(3+1.732)}{2}$ m $= (12.5 \times 4.732)$m $= 59.15$m

अतः रुखको उचाइ (AB) = 59.15m

4. एउटा 20m अग्लो घरको छतबाट दूर सञ्चारको टावरको टुप्पाको अन्नतांश कोण 45° र फेदको अवनति कोण 30° पाइएछ। उक्त टावरको उचाइ निकाल्नुहोस्।

यहाँ चित्रमा,

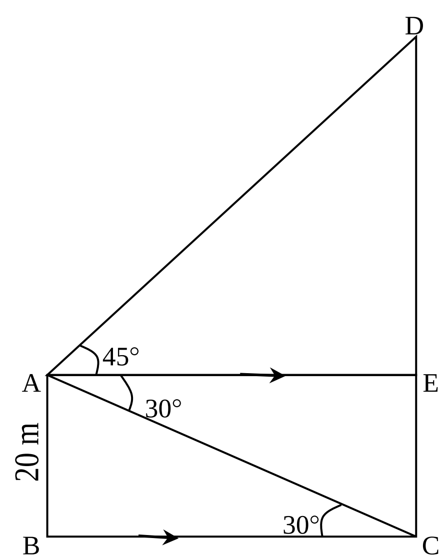
AB = 20m = घरको उचाइ

CD = दूर सञ्चारको टावरको उचाइ = x मानौँ

→DAE = 45° = घरको छत A बाट टावरको टुप्पो D लाई हेर्दा बनेको उन्नतांश कोण

→CAE = 30° = घरको छत A बाट टावरको फेद C लाई हेर्दा बनेको अवनति कोण

अब समकोण ƒAED बाट $\tan 45° = \frac{DE}{AE}$



अथवा $1 = \frac{DE}{AE}$

∴ DE = AE … … … (i)

फेरि समकोण ƒAEC बाट

$\tan 30° = \frac{EC}{AE}$

अथवा $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{EC}{AE}$

अथवा $AE = \sqrt{3}\,.\,EC$

$= \sqrt{3}\,.\,AB \quad [\geq\; AB = EC]$

$DE = \sqrt{3} \times 20m$ … … … समीकरण (i) बाट

तसर्थ दूर सञ्चार टावरको उचाइ (CD) $= DE + EC$

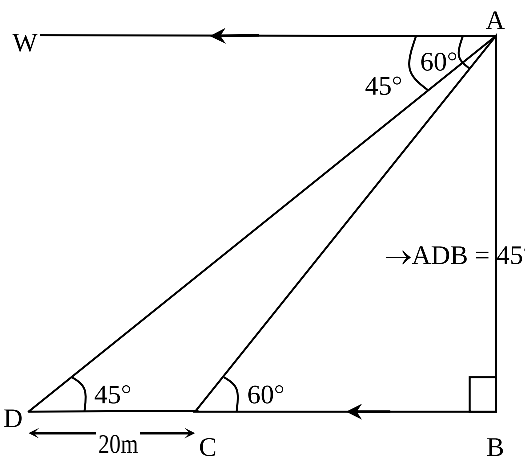
$= (20\sqrt{3} + 20)m$

$= 20(\sqrt{3} + 1)m$

$= 20(1.732 + 1)m$

$= 20(2.732)m \quad = 54.64m$

5. एउटा घरको छतबाट पश्चिमतिरका दुई विन्दुहरूलाई कुनै मानिसले अवलोकन गर्दा दृष्टि रेखाले बनाएका अवनति कोणहरू क्रमशः 60° र 45° पाएछन् । यदि दुई विन्दुहरूबिचको दुरी 20m भए उक्त घरको उचाइ कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् ।



यहाँ चित्रमा,

AB = घरको उचाइ = x मानौँ

C र D घरको पश्चिमतिरका दुई विन्दुहरू हुन् ।

$CD = 20m$

$\rightarrow ACB = 60°$ र $\rightarrow ADB = 45°$

$BC = y$ मान्दा

अब समकोण $f ABC$ बाट

$$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

अथवा $\sqrt{3} = \frac{x}{y}$

$\therefore\; x = \sqrt{3}\,y$ … … … (i)

फेरि समकोण $f ABD$ बाट

$$\tan 45° = \frac{AB}{BD}$$

अथवा $1 = \frac{x}{y + 20}$

$\therefore\; x = y + 20$ … … … (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

$$y + 20 = \sqrt{3}\, y$$

अथवा $20 = \sqrt{3}\, y - y$

अथवा $20 = y(\sqrt{3} - 1)$

अथवा $20 = y(1.732 - 1)$

अथवा $20 = y(0.732)$

अथवा $y = \frac{20}{0.732}$

$\therefore$ $y = 27.32m$

y को मान समीकरण (ii) मा राख्दा

घरको उचाइ, x $= (27.32 + 20)m = 47.32m$

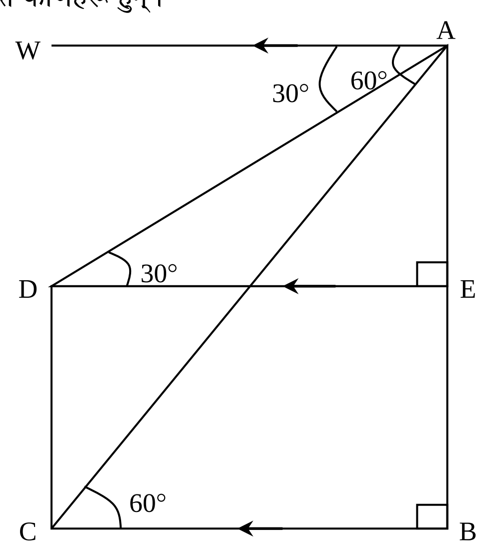
6. कुनै घरको छानाबाट घरको अगाडि रहेको एउटा खम्बालाई कुनै अवलोकन कर्ताले हेर्दा खम्बाको टुप्पा र फेदको अवनति कोण क्रमशः 30° र 60° पाएछन्। यदि घरको उचाइ 30m भए खम्बाको उचाइ निकाल्नुहोस्।

यहाँ चित्रमा

AB = 30m घरको उचाइ र CD = x खम्बाको उचाइ हुन्।

$\therefore$ CD = x = BE हुन्छ।

→ADE = 30° र →ACB = 60° दुई वटा अवनति कोणहरू हुन्।



अब समकोण ƒABC बाट

$$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$$

अथवा $AB = \tan 60° \times BC$

अथवा $30 = \sqrt{3}\,.\,BC$

$$\therefore\ BC = \frac{30}{\sqrt{3}} = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$$

तर $BC = DE = 10\sqrt{3}$ m

फेरि समकोण ƒAED बाट

$\tan 30° = \dfrac{AE}{DE}$

अथवा $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{AE}{10\sqrt{3}}$

अथवा $\sqrt{3}\ AE = 10\sqrt{3}$

$\therefore$ AE = 10m

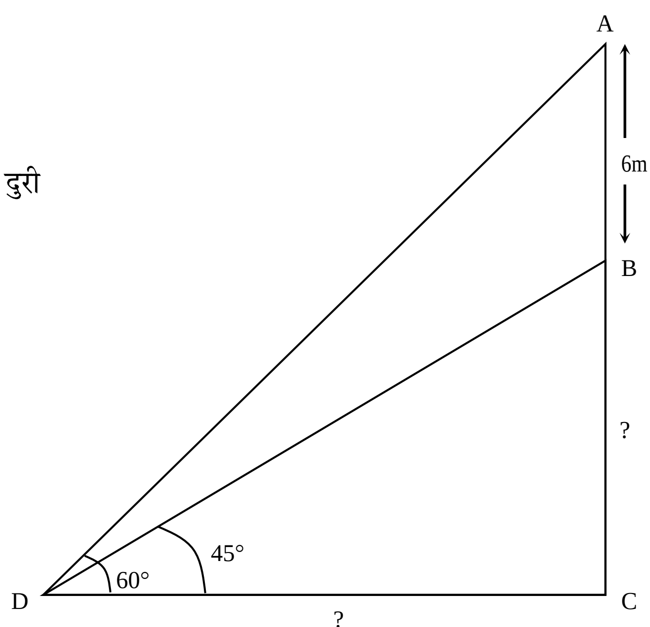
खम्बाको उचाइ CD = BE

= AB – AE = (30 – 10)m

= 20m.

7. कुनै एउटा भवनको पश्चिमपट्टिको एउटा निश्चित विन्दुबाट भवनको छत र भवनमाथि ठड्याइएको ध्वजदण्डको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 60° पाएछन् । यदि ध्वजदण्डको उचाइ 6m भए उक्त भवनको उचाइ र भवन तथा दृष्टि विन्दुबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

यहाँ चित्रमा



AB = 6m ध्वजदण्डको उचाइ

BC = भवनको उचाइ

CD = दृष्टि विन्दु र भवनबिचको दुरी

→BDC = 45° र →ADC = 60°

अब समकोण ƒBCD बाट

$\tan 45° = \dfrac{BC}{CD}$

अथवा $1 = \dfrac{BC}{CD}$

$\therefore$ BC = CD … … … (i)

त्यस्तै गरी समकोण ƒACD बाट

$\tan 60° = \dfrac{AC}{CD}$

अथवा $\sqrt{3} = \dfrac{AB + BC}{BC}$ [≥ BC = CD समीकरण (i) बाट]

अथवा $\sqrt{3}$ BC = 6m + BC [≥ AB = 6m]

अथवा BC – BC = 6m

अथवा $BC(\sqrt{3} - 1) = 6m$

अथवा $BC(1.732 - 1) = 6m$

अथवा $BC(0.732) = 6m$

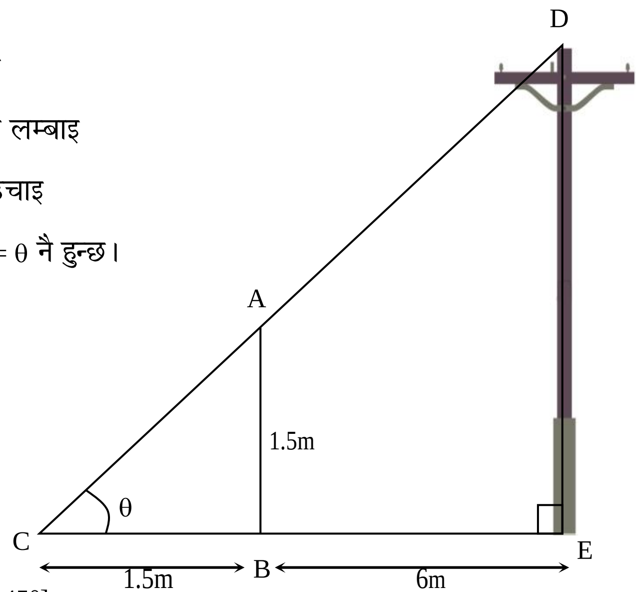
अथवा $BC = \dfrac{6}{0.732}$

अथवा $BC = 8.196$

तसर्थ भवनको उचाइ BC = 8.2m, दृष्टि विन्दु र भवन बिचको दुरी (CD) = 8.2m रहेछ।

8. कुनै एउटा 1.5m उचाइ भएको कुनै एक जना मानिस बिजुलीको खम्बाको 6m पर उभिएछ। यदि उक्त मानिसको छायाको लम्बाइ पनि 1.5m भए बिजुलीको खम्बाको उचाइ निकाल्नुहोस्।

यहाँ चित्रमा



AB = 1.5m मानिसको उचाइ

BC = 1.5 मानिसको छायाँको लम्बाइ

DE = बिजुलीको खम्बाको उचाइ

$\rightarrow ACB = \theta$ मान्दा $\rightarrow DCE = \theta$ नै हुन्छ।

अब समकोण ƒABC बाट

$\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$

अथवा $\tan\theta = \dfrac{1.5m}{1.5m}$

अथवा $\tan\theta = 1$

$\therefore$ $\tan\theta = \tan 45°$ [$\geq 1 = \tan 45°$]

$\therefore$ $\rightarrow ACB = \rightarrow DCE = \theta = 45°$ हुन्छ।

त्यस्तै गरी समकोण ƒDEC बाट

$\tan 45° = \dfrac{DE}{CE}$

अथवा $1 = \dfrac{DE}{(1.5 + 6)m}$

$\therefore$ $DE = 7.5m$

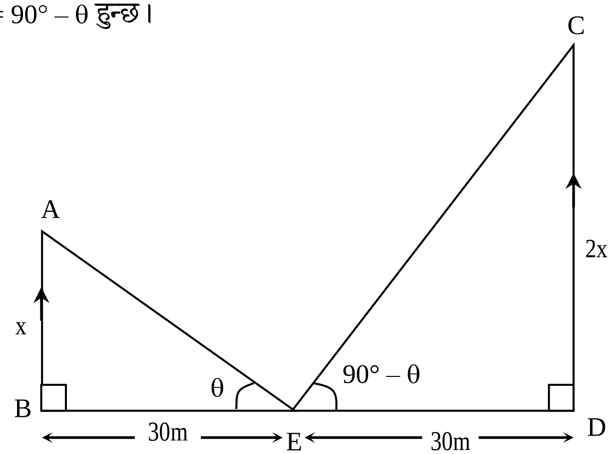
तसर्थ बिजुलीको खम्बाको उचाइ DE = 7.5m रहेछ।

9. अनुपात 1:2 भएका दुईओटा खम्बाहरू बीचको दुरी 60m छ । यदि खम्बाहरूको ठिकबिचमा पर्ने कुनै निश्चित विन्दुबाट खम्बाहरूको टुप्पोको उन्नतांश कोणहरू समपूरक पाइयो भने ती खम्बाहरूको उचाइ निकाल्नुहोस् ।

यहाँ चित्रमा

AB : CD = 1:2 दुई खम्बाहरूको अनुपात हो । तसर्थ AB = x भए CD = 2x हुन्छ ।

त्यसै गरी →AEB = θ भए →CED = 90° – θ हुन्छ ।



प्रश्नअनुसार BE = DE = 30m हुन्छ ।

अर्थात्   BD को मध्यविन्दु E छ ।

अब समकोण ƒABE बाट

$\tan\theta = \frac{AB}{BE} = \frac{x}{30} \dots \dots \dots$ (i)

त्यस्तै गरी समकोण ƒCDE बाट

$\tan(90° - \theta) = \frac{CD}{DE}$

अथवा $\cot\theta = \frac{2x}{30} = \frac{x}{15} \dots \dots \dots$ (ii)

समीकरण (i) र (ii) गुणन गर्दा

$\tan\theta \times \cot\theta = \frac{x}{30} \times \frac{x}{15}$

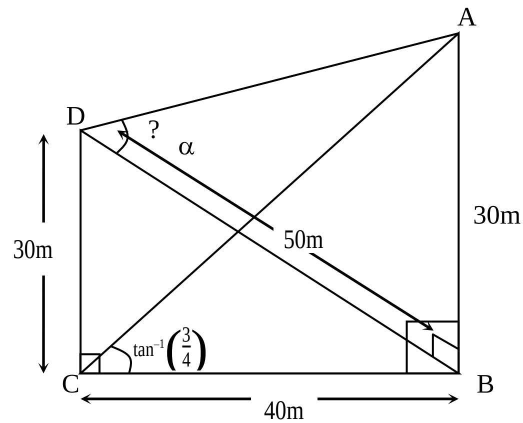
अथवा $1 = \frac{x^2}{450}$ [≥ $\tan\theta \cot\theta = 1$]

अथवा $x^2 = 450$

$\therefore\ x = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$ m

तसर्थ खम्बा (AB) को उचाइ (x) = $15\sqrt{2}$ m र खम्बा (CD) को उचाइ (2x) = $30\sqrt{2}$ m

10. परिश्चमतिरको कुनै निश्चित विन्दुबाट 30m अग्लो खम्बालाई हेर्दा उन्नतांश कोण $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ पाएछ। शुरुको विन्दुबाट 30m उत्तरतिर लम्ब रूपमा गई पुन उक्त खम्बालाई हेर्दा उन्नतांश कोण कति पाइएला ? पत्ता लगाउनुहोस्।



यहाँ चित्रमा

AB = 30m खम्बाको उचाइ

C = पहिलो दृष्टि विन्दु

CA = पहिलो दृष्टि रेखा

$\therefore \quad \rightarrow ACB = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{3}{4}$

D = दोस्रो दृष्टि विन्दु

$\therefore$ CD = 30m पहिलो दृष्टि विन्दुबाट दोस्रो दृष्टि विन्दुसम्मको दुरी

DA = दोस्रो दृष्टि रेखा

दोश्रो दृष्टि विन्दु र खम्बाको फेद B बिचको दुरी

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2}$ हुन्छ।

अब समकोण *f*ABC बाट

$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$

अथवा $\frac{3}{4} = \frac{30m}{BC}$

अथवा BC = 40m

$BD = \sqrt{BC^2 + DC^2}$

$= \sqrt{(40)^2 + (30)^2}$

$= \sqrt{1600 + 900}$

$= \sqrt{2500}$

$\therefore \quad BD = 50m$

फेरि समकोण ƒABD बाट

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BD} = \frac{30}{50}$$

$$\therefore \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

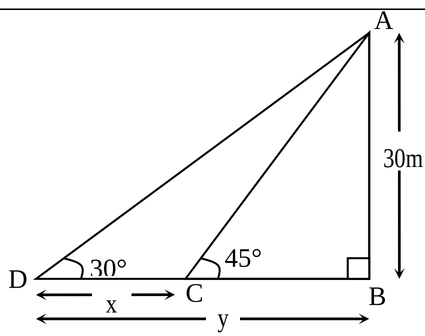
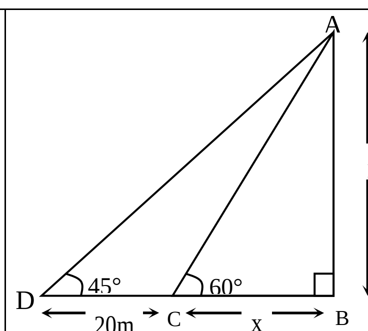
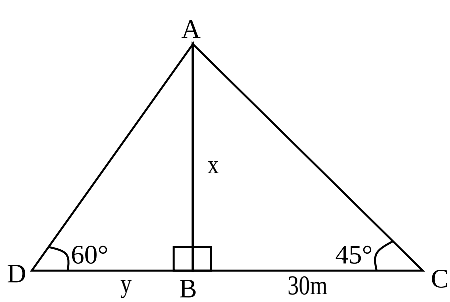
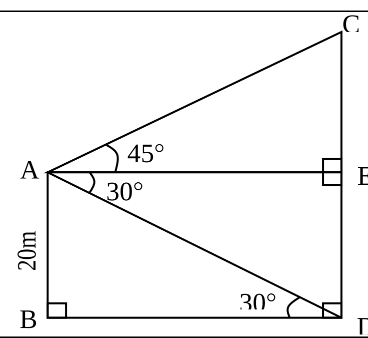
$$= 31° \text{ (लगभग)}$$

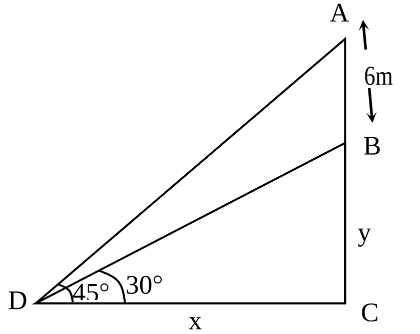
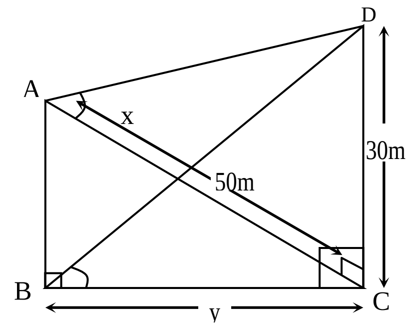
अभ्यास 5.6 (क)

1. (क) उन्नतांश कोण भनेको के हो ? चित्रसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।

   (ख) अवनति कोण भनेको के हो ? चित्रसहित प्रस्ट पार्नुहोस् ।

2. तल दिइएका चित्रबाट x र y का मानहरू निकाल्नुहोस् ।

क)		ख)	
	[उत्तरः x = 21.39m र y = 51.39m]		*[उत्तरः x = 27.32m र y = 47.32m]*
ग)		घ)	
	[उत्तरः x = 30m र y = 17.32m]		*[उत्तरः x = $20\sqrt{3}$ m र y = $20\sqrt{3}$ m]*

ङ)		च)	
	[उत्तरः x = 14.196m र y = 8.196m]		*[उत्तरः y = 30m र x = 31°]*

3\. (क) कुनै निश्चित स्थानबाट एउटा भवनको टुप्पोमा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° पाइयो । सोही ठाउँबाट 20m पर गएर उही भवनको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोण 45° पाएछ भने भवनको उचाइ र पहिलो विन्दु भवनबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

[उत्तरः भवनको उचाइ = 47.32m र भवन पहिलो विन्दु बिचको दुरी = 27.32m]

(ख) 36m अग्लो भवनको अगाडि रहेका दुई विन्दुहरूलाई हेर्दा अवनति कोणहरू 60° र 30° पाइएछ भने ती दुई विन्दुहरूबिचको दुरी कति छ ? निकाल्नुहोस् ।

[उत्तरः $24\sqrt{3}$ m]

(ग) 30m परबाट एउटा भवनको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोण 60° पाइयो । यदि केही निश्चित दुरीमा गएर पुनः उक्त भवनको टुप्पामा हेर्दा उन्नतांश कोण 30° पाएछ भन्ने ती दुई विन्दुबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

[उत्तरः 60m]

(घ) एउटा 60m अग्लो भवनको छतबाट भवन अगाडिका दुई विन्दुहरूलाई हेर्दा अवनति कोणहरू 45° र 30° पाएछन् भने ती दुई विन्दुहरूबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

[उत्तरः 43.92m]

4\. (क) एउटा 30m अग्लो खम्बाको टुप्पालाई दुई विपरीत स्थानबाट एउटै समतल सतहमा रहेर हेर्दा उन्नतांश कोणहरू 30° र 45° पाइएछ भने ती दुई विन्दुहरूबिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

[उत्तरः 81.96m]

(ख) एउटा 60m अग्लो स्तम्भको टुप्पोलाई एउटै समतल सतहमा रहेका र विपरीत दिशामा पर्ने विन्दुहरूबाट हेर्दा उन्नतांश कोणहरू 60° र 30° पाइएछ । ती दुई स्थानहरूबिचको दुरी कति होला ? निकाल्नुहोस् । *[उत्तरः 86.6m]*

(ग) एउटा 90m अग्लो चिम्निको टुप्पाबाट एउटै समतल सतहमा रहेका दुई विपरीत स्थानलाई हेर्दा अवनति कोणहरू 45° र 30° पाइयो भने ती दुई स्थानबिचको दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः 245.88m]

(घ) 40m अग्लो भवनको छतबाट पश्चिम र पूर्वतिर एउटै समतल सतहमा रहेका दुई स्थानहरूलाई हेर्दा अवनति कोणहरू 60° र 30° पाइयो भने ती दुई स्थानबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 92.38m]*

5. (क) 15m अग्लो चट्टानको टुप्पाबाट कुनै टावरको फेद र टुप्पालाई अवनति कोण र उन्नतांश कोणहरू क्रमशः 45° र 60° पाइयो । उक्त टावरको उचाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 40.98m]*

(ख) एउटा 15m अग्लो घरको छतबाट इँटा भट्टाको चिम्नीको फेद र टुप्पोलाई हेर्दा 30° र 60° अवनति कोण र उन्नतांश कोण पाइयो भने उक्त चिम्नीको उचाइ कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 70.98m]*

(ग) 1.75m अग्लो मानिसले एउटा भवनको छत र फेदलाई क्रमशः 60° उन्नतांश कोण र 15° अवनति कोण पाइयो भने उक्त भवनको उचाइ कति होला ? निकाल्नुहोस्।

[उत्तरः भवनको उचाइ = 11.30m]

(घ) 1.7m अग्लो मानिसले एउटा रुखको टुप्पो र फेदको उन्नतांश कोण र अवनति कोण क्रमशः 75° र 30° पाइयो भने उक्त रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः 10.97m]

6. (क) 27m अग्लो घरको छतबाट खम्बाको टुप्पो र फेदको अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 60° पाइयो भने उक्त खम्बाको उचाइ र घर बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः 18m र 15.58m]

(ख) कुनै घरको उचाइ 18m छ। उक्त घरको छतबाट बिजुली बत्तीको खम्बाको टुप्पो र फेदको अवनति कोणहरू क्रमशः 30° र 45° पाइयो भने खम्बाको उचाइ तथा घर र खम्बाबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः 10.39m र 18m]

(ग) 20m अग्लो घरको छतबाट एउटा स्तम्भको टुप्पो र फेदमा हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः 45° र 60° पाइयो भने स्तम्भको उचाइ तथा स्तम्भ र घरबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः 8.46m र 11.54m]

(घ) एउटा टावरको उचाइ 60m छ। यदि उक्त टावरको टुप्पाबाट एउटा भवनको छत र फेदलाई हेर्दा अवनति कोणहरू क्रमशः $30°$ र $60°$ पाइयो भने भवनको उचाइ र भवनबाट टावरसम्मको दुरी पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 40m र 34.64m]*

7. एउटा धरहराको उचाइ र यसमाथि रहेको ध्वजदण्डको उचाइको अनुपात 2:1 छ। यदि धरहराको टुप्पाको उन्नतांश कोण $45°$ छ भने ध्वजदण्डको टुप्पाको उन्नतांश कोण कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः $\theta = 56.30°$]*

8. एउटा फराकिलो सडकको चौडाइ 40m छ। उक्त सडकमा पर्ने कुनै निश्चित विन्दुबाट सडकको दुवै किनारामा रहेका दुई बराबर खम्बाहरूको उन्नतांश कोणहरू $30°$ र $60°$ छन् भने ती दुई खम्बाहरूको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः $10\sqrt{3}$ m]*

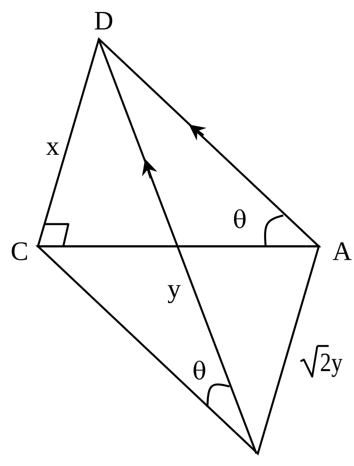
9. खम्बाको फेदबाट $7.25\sqrt{3}$ m परबाट उभिएर 1.75m अग्लो मानिसले खम्बाको टुप्पो हेर्दा उक्त मानिसको छायाको लम्बाइ $1.75\sqrt{3}$ m हुन्छ भने खम्बाको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 9m]*

10. कुनै एउटा रुखको ठिक पूर्वपट्टिको एउटा विन्दु A बाट रुखको टुप्पोलाई हेर्दा उन्नतांश कोण $45°$ पाएछ। विन्दु A बाट 6m लम्ब रुखले दक्षिणतिर गएर B विन्दुबाट पुनः रुखको टुप्पोलाई हेर्दा उन्नतांश कोण $\tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ पाइयो भने रुखको उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः 8m]*

11. एउटा स्तम्भको उचाइ x एकाइ छ। यदि उक्त स्तम्भको ठिक पूर्वपट्टि y एकाइ दुरी A बाट स्तम्भको टुप्पालाई हेर्दा उन्नतांश कोण $60°$ पाइयो भने A बाट $\sqrt{2}$ y एकाइ दक्षिण गई B विन्दुबाट स्तम्भको टुप्पा हेर्दा दृष्टि रेखाले क्षितिजसँग बनाएको उन्नतांश कोण पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तरः θ (आवश्यक उन्नतांश कोण) = $45°$]

Hints:



12. एउटा स्तम्भलाई फेदबाट 1:9 को अनुपातमा कुनै विन्दुले विभाजन गरिएको छ। यदि स्तम्भको ठिक 20m अगाडिको विन्दुबाट विभाजन विन्दु र स्तम्भको टुप्पो हेर्दा बराबर उन्नतांश कोण बनाउँछ भने स्तम्भको पूरा उचाइ पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः $80\sqrt{5}$ m]*

एकाइ
६

भेक्टर (Vector)

1.0 पुनरावलोकन (Review)

✍ नाप्न मिल्ने राशिलाई भौतिक राशी (Physical Quantity) भनिन्छ। जस्तैः तौल, बल, दुरी, पिण्ड, क्षेत्रफल, आयतन आदि। यी दुई प्रकारका छन्।

(क) स्केलर (Scalar) र

(ख) भेक्टर (Vector)

✍ क्षेत्रफल, पिण्ड, आयतन आदि स्केलर राशीका उदाहरणहरू हुन्। अतः मान र एकाइले पूर्ण रुपमा व्यक्त गर्न सकिने भौतिक राशिलाई स्केलर भनिन्छ।

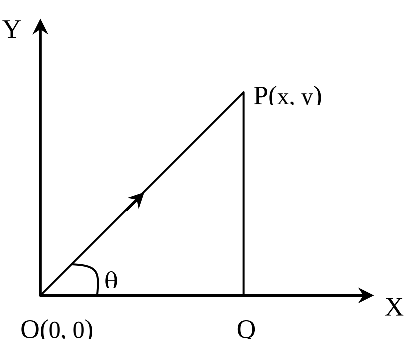
✍ गति, प्रवेग, बल आदि भेक्टर राशीका उदाहरणहरू हुन्। अतः मान (Magnitude) सँगसँगै दिशा (Direction) बाट व्यक्त गर्न सकिने भौतिक राशीलाई भेक्टर भनिन्छ।

1.1 भेक्टरको परिमाण (Magnitude of Vector)

कुनै लम्बाइलाई जनाउने निर्देशित रेखा खण्ड (Line Segment) को लम्बाइलाई भेक्टरको परिमाण भनिन्छ। जस्तैः चित्रमा $\overrightarrow{OP}$ भेक्टरको परिमाण

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ हुन्छ।

$|\overrightarrow{OP}|$ लाई निरपेक्ष मन (Modulus $\overrightarrow{OP}$) भनिन्छ।



भेक्टरको दिशा (Direction of a Vector):

माथि दिइएको चित्रमा रेखा खण्ड OP ले धनात्मक X-अक्षसँग बनाएको कोण θ भएकाले $\overrightarrow{OP}$ को दिशा $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{PQ}{OQ}\right)$ हुन्छ।

यहाँ $\tan\theta = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ हुन्छ।

भेक्टरका प्रकार (Types of Vector):

(क) लहर भेक्टर (Column Vector) :

कुनै भेक्टर $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ मा $\vec{a}$ का x- र y- खण्डहरू लहरमा लेखिएका छन् भने त्यस्तो भेक्टरलाई लहर भेक्टर (Column Vector) भनिन्छ। यहाँ दुई विन्दुहरू A(3, 2) र B(5, 3) छन् भने भेक्टर

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-3 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ लाई $\overrightarrow{AB}$ को लहर भेक्टर (Column Vector) भनिन्छ।

(ख) पङ्क्ति भेक्टर (Row Vector) :

यहाँ भेक्टर $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ पनि हुन्छ। यहाँ x- र y- खण्डहरू पङ्तिमा लेखेर अल्पविराम (Comma) ले छुट्याएर सानो कोष्ठले घेरिएका छन् । यसरी जनाइएको भेक्टरलाई पङ्ति भेक्टर (Yow Vector) भनिन्छ।

(ग) स्थिति भेक्टर (Position Vector) :

यदि कुनै विन्दु O(0, 0) लाई अर्को विन्दु P(x, y) मा विस्थापन गरिन्छ भने $\overrightarrow{OP}$ लाई P(x, y) को स्थिति भेक्टर (Position Vector) भनिन्छ। स्थिति भेक्टरको प्रारम्भिक विन्दु (Initial Point) जहिले पनि उद्‌गम विन्दु O(0, 0) हुन्छ।

भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition):

यदि $\overrightarrow{AB}$ ले विन्दु A लाई B मा $\overrightarrow{BC}$ ले विन्दु B लाई C मा विस्थापन गर्दछन् भने तिनीहरूको समग्र विस्थापन $\overrightarrow{AC}$ (विन्दु A बाट C सम्मको विस्थापन) ले दिन्छ। अर्थात $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{BC}$ को योगफल $\overrightarrow{AC}$ हुन्छ।

अर्थात $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

भेक्टरको यो जोड नियमलाई भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition) भनिन्छ।

6.1.1 दुईओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल (Scalar or Dot Product of Two Vectors)

यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ दुईओटा भेक्टरहरू भए तिनीहरूको स्केलर गुणनफललाई $\vec{a} . \vec{b}$ (भेक्टर a डट भेक्टर b) ले जनाइन्छ। यसलाई $\vec{a} . \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ को रुपमा परिभाषित गरिन्छ। दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ को बिचमा डटले जनाउने भएकाले दुई भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफललाई dot product पनि भनिन्छ।

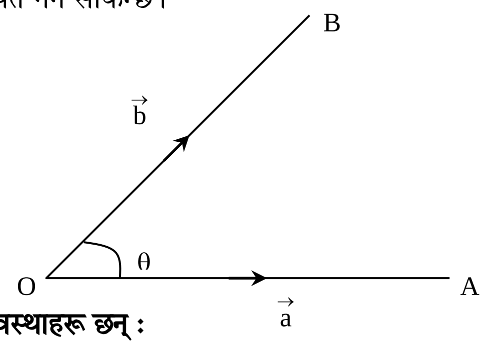
दुई भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफललाई यसरी पनि परिभाषित गर्न सकिन्छ।

$\vec{a} . \vec{b} = ab . \cos\theta$

जहाँ $a = |\vec{a}|$, भेक्टर a को मोडुलस

$b = |\vec{b}|$, भेक्टर b को मोडुलस

र θ = दुई भेक्टरहरू बिचको कोण



दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का स्केलर गुणन फलका दुईओटा अवस्थाहरू छन् :

(क) यदि दुई भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ का बिचको कोण $\theta = 0°$ भए $\cos 0° = 1$ हुन्छ।
तसर्थ $\vec{a} . \vec{b} = ab . \cos 0° = ab . 1 = ab$ हुन्छ।

अर्थात दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एक आसपमा समानान्तर (parallel) हुँदा $\theta = 0°$ हुन्छ र $\vec{a} . \vec{b} = ab$ हुन्छ।

(ख) यदि दुईओटा भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छन् भने तिनीहरू बिचको कोण $\theta = 90°$ हुन्छ। $\cos 90° = 0$ हुने भएकाले $\vec{a} . \vec{b} = ab . \cos 90° = ab . 0 = 0$ हुन्छ।

अर्थात् $\vec{a} . \vec{b} = 0$ हुन्छ।

तसर्थ $\vec{a} . \vec{b} = ab . \cos\theta$ (i) समानान्तर र लम्बबाहेक अन्य अवस्थामा

$\vec{a} . \vec{b} = ab$ (ii) समानान्तर अवस्थामा

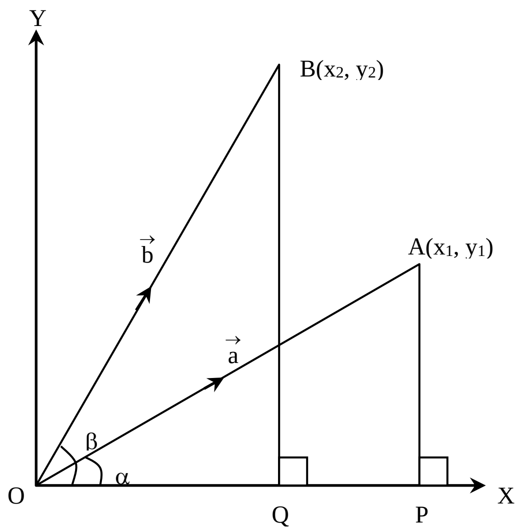
$\vec{a} . \vec{b} = 0$ (iii) लम्ब अवस्थामा

यहाँ $ab . \cos\theta$, ab र 0 सबै स्केलर (Scalar) राशि भएकाले दुई भेक्टरहरूको गुणन फललाई स्केलर गुणनफल (Scalar Product) भनिएको हो।

6.1.2 दुईओटा भेक्टरहरूको बिचको कोण (Angle Between two Vectors)

चित्रमा O उद्गम विन्दु (Origin Point) छ। तसर्थ A को स्थिति भेक्टर (Position Vector of A) = $\overrightarrow{OA}$ = $\vec{a}$ र B को स्थिति भेक्टर (Position Vector of B) = $\overrightarrow{OB}$ = $\vec{b}$ छ।

भेक्टर $\overrightarrow{OA}$ ले X- अक्षसँग बनाएको कोण, →AOP = α र भेक्टर $\overrightarrow{OB}$ ले X- अक्षसँग बनाएको कोण, →BOQ = β छ। तसर्थ भेक्टर $\vec{a}$ र भेक्टर $\vec{b}$ बिचको कोण →BOA = β – α = θ हुन्छ। AP⊥OX र BQ⊥OX खिचिएका छन्।



अब समकोण ΔOPA बाट

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OA}$$

$$= \frac{x_1}{|\overrightarrow{OA}|} \quad [\geq\ |\overrightarrow{OA}| = OA]$$

$$= \frac{x_1}{|\vec{a}|}$$

″ $x_1 = a\cos\theta$ … … … (i) [≥ $|\vec{a}| = a$]

अब समकोण ΔOQB बाट

$$\cos\beta = \frac{OQ}{OB}$$

$$= \frac{x_2}{|\overrightarrow{OB}|} \quad [\geq\ |\overrightarrow{OB}| = OB]$$

$$= \frac{x_2}{|\vec{b}|}$$

″ $x_2 = b\cos\beta$ [≥ $|\vec{b}| = b$]

त्यसै गरी समकोण ΔOPA र ΔOQB बाट क्रमशः

$$\sin\alpha = \frac{AP}{OA} = \frac{AP}{|\vec{a}|} = \frac{y_1}{a}$$

″ $y_1 = a\sin\alpha$

$$\sin \beta = \frac{BQ}{OB} = \frac{y_2}{|\vec{b}|} = \frac{y_2}{b}$$

″ $y_2 = b \sin \beta$

हामीलाई थाहा छ,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$= a \cos \alpha \cdot b \cos \beta + a \sin \alpha \cdot b \sin \beta$$

$$= ab(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= ab \cos(\beta - \alpha) \quad [\geq \cos(-\theta) = \cos \theta]$$

$$= ab \cos \theta \quad [\beta - \alpha = \theta]$$

तसर्थ $\cos \theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{ab}$

अथवा $\cos \theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

अथवा $\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)}$

6.1.3 दुईओटा भेक्टरहरूको स्केलर गुणनफल (Scalar Product of Unit Vectors)

चित्रमा X- अक्षको एकाइ भेक्टर $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ र Y- अक्षको एकाइ भेक्टर $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ छ।

जहाँ

$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ र $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

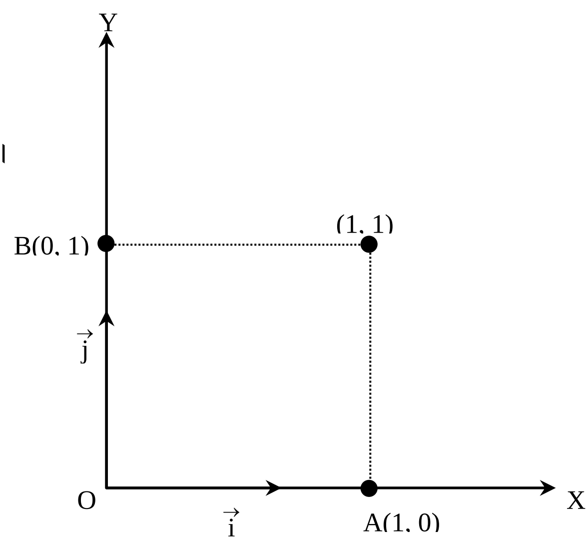
हामीलाई थाहा छ, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$ हुन्छ।

(क) $\vec{i} \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.0 + 0.1 = 0$

(ख) $\vec{j} \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$

(ग) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1$

(घ) $\vec{j} \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$



(तसर्थ $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = 0$ र

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = 1$ हुन्छ।

अथवा

(क) $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{i} = |\vec{i}|.|\vec{j}| \cos 90° = 1.1.0 = 0$

(ख) $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = |\vec{i}|.|\vec{i}| \cos 0° = |\vec{j}|.|\vec{j}| \cos 0° = 1.1.1 = 1$

उदाहरणहरू

1. **यदि $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ को मान निकाल्नुहोस् :**

यहाँ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

″ $\vec{a}.\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2.0 + 3.3 = 0 + 9 = 9$ एकाइ

अर्थात $\vec{a}.\vec{b} = 9$

2. **यदि $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ को मान निकाल्नुहोस् :**

यहाँ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र

$\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

″ $\vec{a}.\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= 2(-3) + 3.2 = -6 + 6 = 0$

″ $\vec{a}.\vec{b} = 0$

3. **यदि $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 9$ र ती दुई वटा भेक्टरहरू बिचको कोण $\theta = 60°$ भए $\vec{a}.\vec{b}$ को मान निकाल्नुहोस् :**

यहाँ,

$|\vec{a}| = a = 2\sqrt{3}$ र $|\vec{b}| = b = 9$ तथा $\theta = 60°$

हामीलाई थाहा छ,

$\vec{a}.\vec{b} = ab \cos\theta$

$= 2\sqrt{3}.9 \cos 60°$

$= 2\sqrt{3} \,.\, 9 \,.\, \frac{1}{2}$

$= 9\sqrt{3}$

4. **यदि $|\vec{a}| = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ र $|\vec{b}| = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ भए ती दुई भेक्टरहरू बिचको कोण θ पत्ता लगाउनुहोस् :**

यहाँ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ र

$\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\theta = ?$

हामीलाई थाहा छ,

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \,.\, \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

तर $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

$= \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

$''$ $\vec{a} \,.\, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2(-3) + 3.2 = -6 + 6 = 0$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \,.\, \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{13} \,.\, \sqrt{13}}$$

$$= 0 \quad \left[\geq \quad \frac{\text{zero}}{\text{something}} = 0 \right]$$

$$= \cos 90°$$

$''$ $\theta = 90°$

5. **यदि $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$ र $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ भए भेक्टर $\vec{a}$ र भेक्टर $\vec{b}$ एक आपसमा लम्ब हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :**

यहाँ $\vec{a} = -3\vec{i} + 6\vec{j} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\vec{a}.\vec{b} = 0$

हामीलाई थाहा छ,

$$\begin{aligned} \vec{a}.\vec{b} &= x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= (-3).(6) + (6).(3) \\ &= -18 + 18 = 0 \end{aligned}$$

तसर्थ दुईओटा भेक्टरहरू $\vec{a}$ र $\vec{b}$ एक आपसमा लम्ब हुन्छन् भनी प्रमाणित भयो ।

6. **यदि $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ र $\vec{b} = k\vec{i} + 3\vec{j}$ दुई भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब भए k को मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

यहाँ $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ र

$\vec{b} = k\vec{i} + 3\vec{j} = \begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix}$

हामीलाई थाहा छ, भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब हुँदा

$\vec{a}.\vec{b} = 0$ हुन्छ ।

अथवा $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} k \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

अथवा $3k - 12 = 0$

अथवा $3k = 12$

″ $k = 4$

7. **यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\vec{a} \perp \vec{b}$**

यहाँ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$ [≥ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

अथवा $(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ [≥ $|\vec{a}|^2 = a^2$]

अथवा $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{b}|^2$

अथवा $a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2 = a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

अथवा $2\vec{a}.\vec{b} + 2\vec{a}.\vec{b} = a^2 + b^2 - a^2 - b^2$

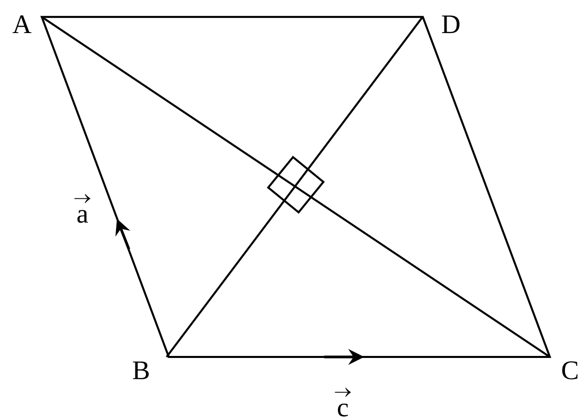
अथवा $4\vec{a}.\vec{b} = 0$

अथवा $\vec{a}.\vec{b} = 0 \quad \left[\geq \frac{0}{4} = 0 \right]$

तसर्थ $\vec{a} \perp \vec{b}$ हुन्छ, प्रमाणित भयो ।

8. समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

यहाँ चित्रमा, B लाई उद्‌गम विन्दु मान्दा



$\overrightarrow{BC} = \vec{c} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BA} = \vec{a} = \overrightarrow{CD}$ हुन्छ ।

प्रमाणित गर्नु पर्ने $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = 0$

ABCD एउटा समबाहु चतुर्भुज हो ।

″ $AB = BC = DC = AD$ हुन्छ ।

ΔABC बाट

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} + \vec{c} = -\vec{a} + \vec{c}$

ΔBCD बाट

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \vec{c} + \vec{a}$

″ $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = (\vec{c} - \vec{a}) . (\vec{c} + \vec{a})$

$= |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2$

$= c^2 - a^2$

$= BC^2 - AB^2 \quad [\geq AB^2 = (-BA)^2 = BA^2]$

$= 0 \quad [\geq AB = BC]$

तसर्थ समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छ भन्ने प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.1

1. तलका प्रत्येक विन्दुहरू जोड्ने भेक्टरलाई $x\vec{i} + y\vec{j}$ को रुपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) A(2, 3) र B(3, j) *[उत्तरः $\vec{i} + 2\vec{j}$]*

(ख) P(0, 3) र Q(4, 2) *[उत्तरः $4\vec{i} - \vec{j}$]*

(ग) C(2, 4) र D(5, 6) *[उत्तरः $3\vec{i} + 2\vec{j}$]*

(घ) R(3, 7) र S(5, 8) *[उत्तरः $2\vec{i} + \vec{j}$]*

2. तलका अवस्थाहरूमा $\vec{a}.\vec{b}$ का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\vec{a}.\vec{b} = 0$]*

(ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\vec{a}.\vec{b} = -\sqrt{3}$]*

(ग) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\vec{a}.\vec{b} = 25$]*

(घ) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\vec{a}.\vec{b} = 0$]*

3. तलका अवस्थाहरूमा $\vec{a}.\vec{b}$ का मानहरू निकाल्नुहोस् :

(क) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\theta = 30°$ *[उत्तरः $\frac{\sqrt{210}}{2}$]*

(ख) $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 9$ र $\theta = 90°$ *[उत्तरः 27]*

(ग) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ र $\vec{b} = 8\vec{i} + \vec{j}$ *[उत्तरः 24]*

(घ) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ र $\theta = 90°$ *[उत्तरः 0]*

4. तलका अवस्थामा दुई भेक्टरहरू बिचको कोण पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 7$ र $\vec{a}.\vec{b} = 21$ *[उत्तरः $\theta = 60°$]*

(ख) $|\vec{a}| = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\theta = 90°$]*

(ग) $(\vec{a} + 2\vec{b}).(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$ *[उत्तरः $\theta = 60°$]*

(ख) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः $\theta = 80°$]*

5. तलका अवस्थामा दुईओटा भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् :

(क) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$ र $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$

(ख) $|\vec{a}| = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\vec{b} = -3\vec{i} + 6\vec{j}$

(ग) $\vec{a} = \sqrt{3}\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ र $\vec{b} = 2\sqrt{3}\vec{i} - 3\sqrt{2}\vec{j}$

(ख) $\vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ र $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

6. दुईओटा भेक्टरहरू एकआपसमा लम्ब भएका अवस्थामा k को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2k \\ -5 \end{pmatrix}$ र $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \end{pmatrix}$ *[उत्तरः k = 5]*

(ख) $\vec{a} = (k+1)\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\vec{b} = 6\vec{i} - 3k\vec{j}$ *[उत्तरः k = 2*

(ग) $\vec{a} = k\vec{i} + 3\vec{j}$ र $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ *[उत्तरः k = 4.5]*

(ख) $\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ र $\vec{b} = 5\vec{i} + k\vec{j}$ *[उत्तरः k = 2]*

7. यदि कुनै त्रिभुजका शीर्षविन्दुहरू A(0, 0), B(4, 0) र C(0, 3) भए उक्त त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

8. यदि P(–1, 3), Q(3, 1) र R(1, 7) भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\rightarrow$RPQ = 2$\rightarrow$PRQ

6.2 भेक्टर ज्यामिति (Vector Geometry)

ज्यामितिका केही महत्वपूर्ण सम्बन्धहरू वा साध्यहरू भेक्टरको प्रयोगबाट सरल तथा सजिलो तरिकाले स्थापित र प्रमाणित गर्न सकिन्छ । त्यसकारण भेक्टर ज्यामितिको ज्ञान तथा सीपहरूको आवश्यकता पर्दछ । ती ज्ञान तथा सीपहरूको आवश्यकता बोध गर्न तथा गराउन यहाँ ज्यामितिका केही महत्वपूर्ण सम्बन्धहरू स्थापित गर्न भेक्टरको प्रयोग गरिएको छ ,।

6.2.1 मध्यविन्दु साध्य (Mid Point Theorem)

भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम (Triangle Law of Vector Addition) प्रयोग गरी कुनै रेखा खण्डको मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । (Find the position vector of mid point of a line segment by using triangle law of vector addition) :

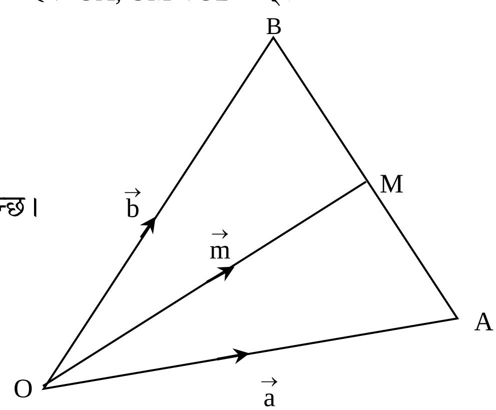
कथन (Statement) कुनै रेखा खण्डको मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर, $\boxed{\vec{m} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}}$ हुन्छ।

यहाँ रेखा खण्ड AB को मध्यविन्दु M छ।

A, M र B बाट उद्गम विन्दु O सम्म खिचिएका रेखा खण्डहरू OA, OM र OB छन्।

A, M र B का स्थिति भेक्टरहरू

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OM} = \vec{m}$ र $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ छन्।



AB रेखा खण्डको मध्यविन्दु M भएकोले $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ हुन्छ।

अब भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम अनुसार,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

अथवा $\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [≥ AM = MB र AB = MB]

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \quad [\geq \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OA}]$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \left[\geq \;\; 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \right]$

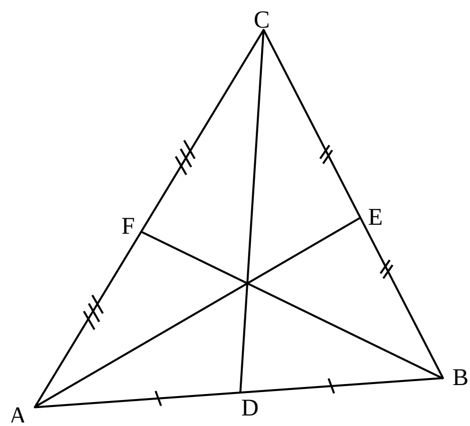
″ $\boxed{\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}}$

तसर्थ कुनै रेखा खण्डको मध्यविन्दुको स्थिति भेक्टर उक्त रेखा खण्डका दुई विन्दुहरूको स्थिति भेक्टरको योगको आधा हुन्छ।

के यो साध्यको प्रक्रियालाई त्रिभुजको प्रत्येक भुजाका मध्यविन्दुका स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउन प्रयोग गर्न सकिन्छ ? हेरौँ।

यहाँ ΔABC का भुजाहरू AB, BC र AC का मध्यविन्दुहरू क्रमशः D, E र F छन्।

भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार,



$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ ... ... (i)

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC}$ ... ... (ii) $\quad [\geq \; \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC}]$

समीकरण (i) र (ii) जोड्दा

$2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{EC}$

अथवा $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 0 \quad [\geq BE = EC]$

″ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

यहाँ $\overrightarrow{AE}$ भनेको भुजा BC को मध्यविन्दु E को स्थिति भेक्टर हो भने $\overrightarrow{AB}$ र $\overrightarrow{AC}$ भुजा AB का विन्दुहरू B र C का स्थिति भेक्टरहरू हुन्। त्यसै गरी

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

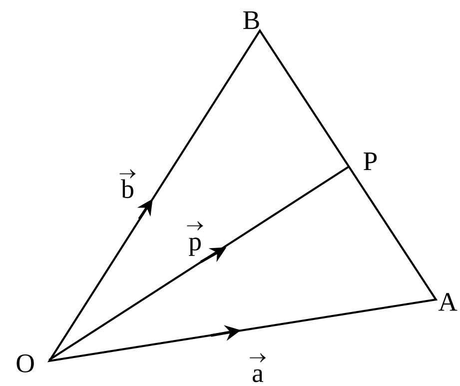
6.2.2 खण्ड सूत्र (Section Formula)

i. भित्री विभाजित सम्बन्धी साध्य (Internal Division Theorem)

कथन (Statement)

यदि विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ तथा रेखा खण्ड AB लाई कुनै विन्दु P ले m:n को अनुपातमा विभाजन गर्दछ भने उक्त विन्दु P को स्थिति भेक्टर $\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$ हुन्छ।

प्रमाण (Proof) :



यहाँ चित्रमा $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

AP : PB = m : n छ भने

$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = ?$

अब $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{m}{n}$

अथवा $n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}$

अथवा $n(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) = m(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$

अथवा $n(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}) = m(-\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB})$

अथवा $-n\vec{a} + n\vec{p} = -m\vec{p} + m\vec{b}$

अथवा $m\vec{p} + n\vec{p} = n\vec{a} + m\vec{b}$

अथवा $\vec{p}(m + n) = n\vec{a} + m\vec{b}$

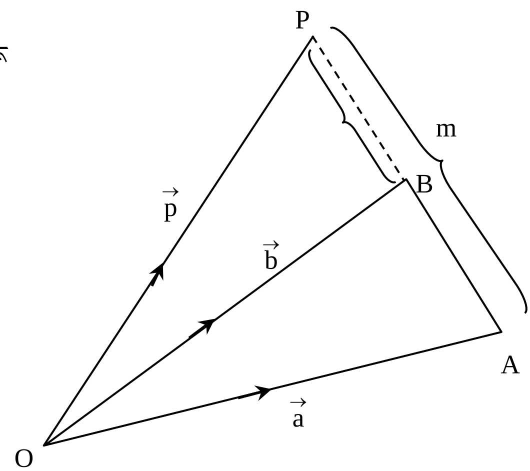
∴ $\boxed{\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}}$ प्रमाणित भयो।

ii. बाहिरी विभाजित सम्बन्धी साध्य (External Division Theorem)

कथन (Statement) :

यदि विन्दु P ले रेखा खण्ड AB लाई बाहिरीबाट m:n मा विभाजन गर्छ भने विभाजन गर्ने विन्दु P को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \dfrac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$ हुन्छ।

प्रमाण (Proof) :



यहाँ चित्रमा A, B र P का स्थिति भेक्टरहरू

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ र $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ छन्।

AP : PB = m : n

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{PB}} = \frac{m}{n}$$

अथवा $n\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PB}$

अथवा $n(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) = m(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$

अथवा $n(-\overrightarrow{OP} + \vec{a}) = m(-\overrightarrow{OP} + \vec{b})$

अथवा $-n\vec{p} + n\vec{a} = -m\vec{p} + m\vec{b}$

अथवा $m\vec{p} - n\vec{p} = m\vec{b} - n\vec{a}$

अथवा $\vec{p}(m - n) = m\vec{b} - n\vec{a}$

″ $\boxed{\vec{p} = \dfrac{m\vec{a} - n\vec{a}}{m - n}}$ प्रमाणित भयो।

उदाहरणहरू

1. यदि A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $3\vec{i} + 4\vec{j}$ र $-4\vec{i} + 2\vec{j}$ र रेखा खण्ड AB को मध्यविन्दु M भए M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{m} = ?$

मध्यविन्दुको साध्य अनुसार

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} + (-4\vec{i} + 2\vec{j})}{2}$$

$$= \frac{3\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{i} + 2\vec{j}}{2} = \frac{-\vec{i} + 6\vec{j}}{2} = -\frac{1}{2}\vec{i} + 3\vec{j}$$

2. **यदि A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $4\vec{i} + 3\vec{j}$ र $4\vec{i} + 3\vec{j}$, रेखा खण्ड AB लाई M विन्दुले 2:1 को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ A को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

B को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$

M को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OM} = \vec{m} = ?$

AM : MB = m:n = 2:1

M को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OM} = \dfrac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m + n}$

$$= \frac{1(4\vec{i} + 3\vec{j}) + 2(4\vec{i} + 3\vec{j})}{2 + 1}$$

$$= \frac{4\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{i} + 6\vec{j}}{3} = \frac{12\vec{i} + 6\vec{j}}{3}$$

$$= 4\vec{i} + 2\vec{j} \quad = 2(2\vec{i} + \vec{j}).$$

3. **यदि रेखा खण्डहरू AB को मध्यविन्दु M र विन्दु A का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $11\vec{i} + 15\vec{j}$ र $5\vec{i} + 3\vec{j}$ तथा AM:MB = 2:3 भए B को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ A को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$

M को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OM} = 11\vec{i} + 15\vec{j}$

B को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = ?$

AM : MB = m:n = 2:3

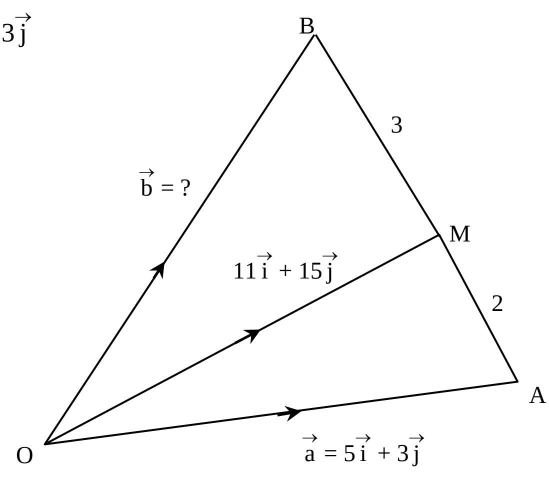
हामीलाई थाहा छ, $\overrightarrow{OM} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m + n}$

$$11\vec{i} + 15\vec{j} = \frac{3(5\vec{i} + 3\vec{j}) + 2.\vec{b}}{2 + 3}$$

अथवा $2\vec{b} + 15\vec{i} + 9\vec{j} = 5(11\vec{i} + 15\vec{j})$

अथवा $2\vec{b} = 55\vec{i} + 75\vec{j} - 15\vec{i} - 9\vec{j}$

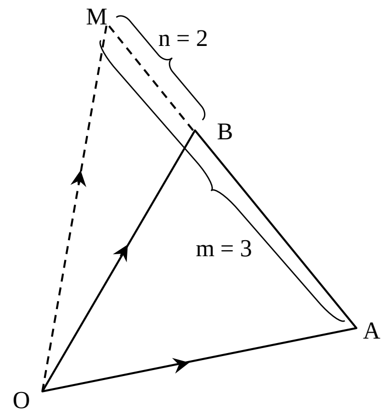
अथवा $2\vec{b} = 40\vec{i} + 66\vec{j}$



अथवा $\vec{b} = \dfrac{40\vec{i} + 66\vec{j}}{2}$

″ B को स्थिति भेक्टर = $20\vec{i} + 33\vec{j}$ हुन्छ।

4. यदि कुनै रेखा खण्ड AB का विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $2\vec{i} - 3\vec{j}$ र $5\vec{i} + 4\vec{j}$ छन् र रेखा खण्ड AB लाई बाह्य विन्दु M ले 3:2 को अनुपातमा विभाजन गर्छ भने M विन्दुको स्थिति भेक्टर कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस्।



यहाँ A को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

B को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$

M को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OM} = \vec{m} = ?$

AM : BM = 3:2 = m:n

यहाँ $\overrightarrow{OM} = \dfrac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m - n}$

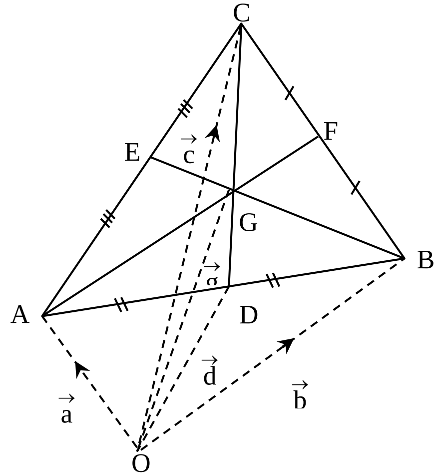
$= \dfrac{3(5\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(2\vec{i} - 3\vec{j})}{3 - 2}$

$= \dfrac{15\vec{i} + 12\vec{j} - 4\vec{i} + 6\vec{j}}{1}$

$= 11\vec{i} + 18\vec{j}$

6.2.3 त्रिभुजको भार केन्द्र (Centroid of Triangle)

कुनै पनि त्रिभुजका भुजाको मध्यविन्दु र त्यसको विपरित शीर्षविन्दु जोडेर बनेको रेखा खण्डलाई उक्त त्रिभुजको मध्यिका (Medium) भनिन्छ । त्रिभुजका तीन ओटा मध्यिकाहरू एकआपसमा काटिने साझा विन्दुलाई त्रिभुजको भार केन्द्र (Centroid of Triangle) भनिन्छ । यसलाई G ले जनाइन्छ । त्रिभुजको भार केन्द्रले मध्यिकालाई 2:1 को अनुपातमा काटिन्छ। त्रिभुजको भार केन्द्र G को स्थिति भेक्टर $\overrightarrow{OG} = \vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ हुन्छ।



जहाँ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ = A को स्थिति भेक्टर

$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ = B को स्थिति भेक्टर

$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ = C को स्थिति भेक्टर

$\vec{g} = \overrightarrow{OG}$ = G को स्थिति भेक्टरहरू हुन्।

चित्रमा D, E र F विन्दुहरू ΔABC का भुजाहरू क्रमशः AB, AC र BC का मध्यविन्दुहरू तथा CD, BE र AF मध्यिकाहरू हुन्। यी मध्यिकाहरू विन्दु G भएर गएका छन्।

यहाँ CG:GD = 2:1 हुन्छ।

″ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{2.\overrightarrow{OD} + 1.\ \overrightarrow{OC}}{2+1}$

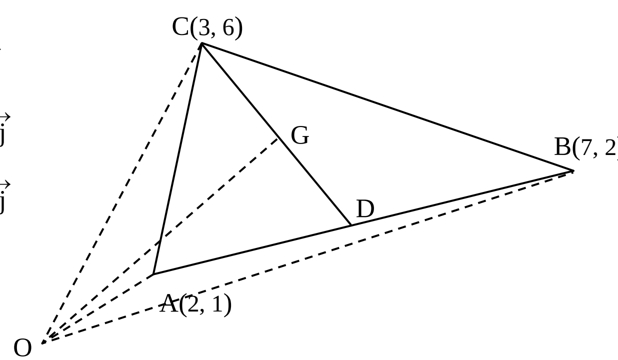
$= \dfrac{2\dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \overrightarrow{OC}}{3}$ [≥ Ad = DB]

$= \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$

अतः ΔABC को भार केन्द्र G को स्थिति भेक्टर

$$\boxed{\vec{g} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)}$$

5. यदि ΔABC को शीर्षविन्दुहरू A(2, 1), B(3, 6) र C(7, 2) छन भने उक्त त्रिभुजको भार केन्द्र (Centroid) पत्ता लगाउनुहोस्।



यहाँ, A को स्थिति भेक्टर = $2\vec{i} + \vec{j}$

B को स्थिति भेक्टर = $7\vec{i} + 2\vec{j}$

C को स्थिति भेक्टर = $3\vec{i} + 6\vec{j}$

G को स्थिति भेक्टर = ?

सूत्रअनुसार, $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$

$= \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} + 6\vec{j})$

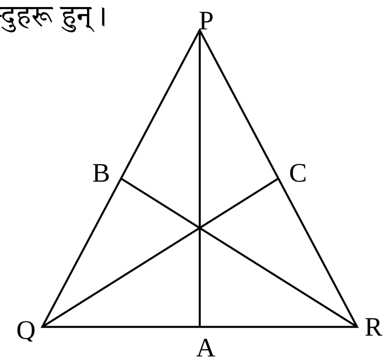
$= \frac{1}{3}(12\vec{i} + 9\vec{j})$

$= \frac{3}{3}(4\vec{i} + 3\vec{j})$

″ G को स्थिति भेक्टर $= 4\vec{i} + 3\vec{j}$

6. **दिइएको ΔPQR मा PA, RB र QC मध्यिका हुने भने प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{QC} = 0$.**

यहाँ, ΔPQR मा A, BC भुजाहरू QR. PQ र PR का मध्याविन्दुहरू हुन् ।



तसर्थ $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{QC}$

$= (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RP}) + (\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP})$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QR} - \overrightarrow{PQ}$

″ $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{QC} = 0$ प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.2

1. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(2, 1), B(–4, –1) र C(0, –4) भए भुजाहरू AB, BC र CA का मध्यविन्दुहरूको स्थिति भेक्टरहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तरः (–2, 0), (–4, –5) र (2, –3)]

2. यदि रेखा खण्ड AB का विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू $3\vec{i} - 2\vec{j}$ र $5\vec{i} - 6\vec{j}$ भए AB को मध्येविन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तरः (4, –4)]

3. यदि A र B का स्थिति भेक्टरहरू $3\vec{i} + 4\vec{j}$ र $5\vec{i} - 2\vec{j}$ भए रेखा खण्ड AB को मध्यविन्दु M को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तरः $2\vec{i} + \vec{j}$ वा (2, 1)]

4. रेखा खण्ड AB लाई विन्दु P ले समद्विभाजन गर्छ भने P को स्थिति भेक्टर $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

5. विन्दुहरू A(5, 7) र B(2, 1) जोडेर बनेको रेखा खण्ड AB लाई 3:4 को अनुपातमा विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । *[उत्तरः $\frac{26\vec{i} + 31\vec{j}}{7}$]*

6. रेखा खण्ड AB को विन्दुहरू A र B का स्थिति भेक्टरहरू क्रमशः $5\vec{i} + 2\vec{j}$ र $3\vec{i} + 6\vec{j}$ छन् भने

(क) AB लाई भित्रबाट 2:3 मा विभाजन गर्ने विन्दु P को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तरः $\frac{1}{5}(21\vec{i} + 18\vec{j})$]

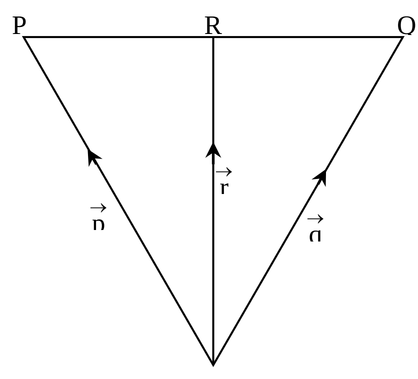
(ख) AB लाई बाहिरबाट 5:2 मा विभाजन गर्ने विन्दु Q को स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तरः $\frac{1}{3}(5\vec{i} + 26\vec{j})$]

7. रेखा खण्ड PQ लाई (क) भित्रबाट 1:2 मा (ख) बाहिरबाट 4:3 मा विभाजन गर्ने विन्दुको स्थिति भेक्टर पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ P र Q का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (–4, 8) र (3, 7) छन् ।

[उत्तरः (क) $\frac{1}{3}(-5\vec{i} + 23\vec{j})$ (ख) $4(6\vec{i} + \vec{j})$]

8. दिइएको चित्रमा $\overrightarrow{PR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PQ}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\vec{r} = \frac{1}{4}(3\vec{p} + \vec{q})$



9. ΔPQR का भुजाहरू PQ र PR का मध्यविन्दुहरू M र N भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $2\overrightarrow{QN} + 2\overrightarrow{MR} = 3\overrightarrow{QR}$

10. समानान्तर चतुर्भुज PQRS का भुजाहरू PQ र QR का मध्यविन्दुहरू क्रमशः M र N छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + 3\overrightarrow{QR}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + 3\overrightarrow{SR})$$

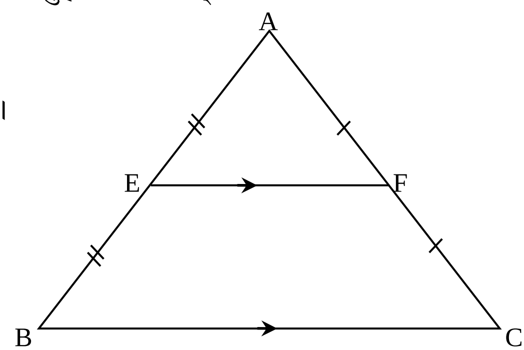
6.3 भेक्टर ज्यामिती सम्बन्धी साध्यहरू (Theorems Related to Vector Geometry)

हामीले ज्यामितिमा त्रिभुज, चतुर्भुज र वृत्तका थुप्रै साध्यहरू तथा ती साध्यहरूसँगसम्बन्धी ज्यामितीय समस्याहरू हल गरिसकेका छौँ । यहाँ ज्यामितिका (ती साध्यहरू तथा समस्याहरूमध्ये) केही महत्वपूर्ण साध्यहरू र तिनीहरूसँग सम्बन्धित समस्याहरू भेक्टरको स्केलर गुणन र भेक्टर जोडको त्रिभुजको नियम प्रयोग गरी हल गर्ने प्रयास गरिने छौँ ।

साध्य 1:

कथन (Statement) : त्रिभुजका दुईओटा भुजाको मध्यविन्दु जोड्ने रेखा तेस्रो भुजासँग समानान्तर भई त्यसको आधा हुन्छ ।

(क) यहाँ ΔABC मा भुजाहरू AB र AC का मध्यविन्दुहरू E र F छन् ।



(ख) EF रेखा भुजा BC सँग समानान्तर र त्यसको आधा हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुपर्ने छ ।

अर्थात $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ र $\overrightarrow{EF} // \overrightarrow{BC}$

(ग) प्रमाण (Proof) :

भेक्टर जोडको त्रिभुज नियम अनुसार,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$$

अथवा $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [≥ AB र AC का मध्यविन्दुहरू क्रमशः E र F भएकोले]

अथवा $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

अथवा $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

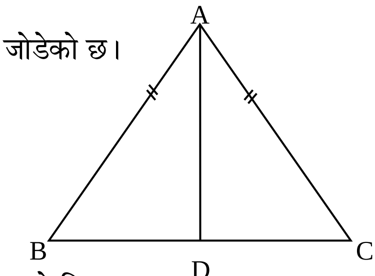
″ EF//BC र $EF = \frac{1}{2}BC$ [≥ $\frac{1}{2}$ = k स्केलर भएकाले]

परियोजना कार्य: *ग्राफ पेपर वा जियो बोर्डमा निश्चित नापका भुजाहरू भएको त्रिभुज खिचेर रबर ब्यान्डको मदतबाट माथिका कथनलाई प्रमाणित गरी हेर्नुहोला ।*

साध्य 2:

कथन (Statement) : समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षविन्दु र आधारको भुजाको मध्यविन्दु जोड्ने रेखा आधारमा लम्ब हुन्छ।

(क) यहाँ चित्रमा ABC एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको हो।
जसमा आधार भुजा BC को मध्यविन्दु D र शीर्षविन्दु A सँग जोडेको छ।
अथवा AB = AC छन्।



(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : AD⊥BC

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ [≥ मध्यविन्दुको साध्यको नियमअनुसार]

2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ [≥ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$]

3. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + AB).(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ [≥ (1) र (2) को भेक्टर गुणन गर्दा]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$

$= \frac{1}{2}(AC^2 - \overrightarrow{AB}^2)$ [≥ $(\vec{a})^2 = a^2$] $= \frac{1}{2}.0$ [≥ AB = AC]

″ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

″ AD⊥BC, भेक्टर $\overrightarrow{AD}$ र $\overrightarrow{BC}$ को भेक्टर गुणन फल शून्य भएकाले।

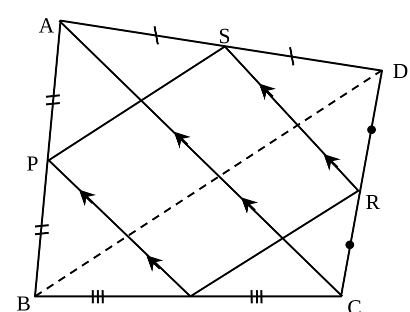
साध्य 3:

कथन (Statement) : चतुर्भुजको आसन्न भुजाहरूका मध्यविन्दुहरू क्रमशः जोड्दै जाँदा बन्ने चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ।

(क) यहाँ

1. ABCD एउटा चतुर्भुज हो। जसमा P, Q, R र S भुजाहरू AB, BC, CD र DA का मध्यविन्दुहरू जोडेर PQRS चतुर्भुज बनेको छ।

2. B र D शीर्षविन्दुहरू जोडेर बनेको विकर्ण BD छ।



(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= 2\overrightarrow{QC} + 2\overrightarrow{CR}$ [≥ Q र R भुजा BC र CD का मध्यविन्दु भएकोले]

$= 2(\overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR})$

$= 2\overrightarrow{QR}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

2. त्यसै गरी $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{PS}$

3. $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$ [≥ (1) र (2) बाट]

4. ″ $\overrightarrow{PS} // \overrightarrow{QR}$ र PS = QR [≥ बराबर भेक्टरहरू समानान्तर र बराबर हुने भएकोले]

5. ″ PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित भयो ।

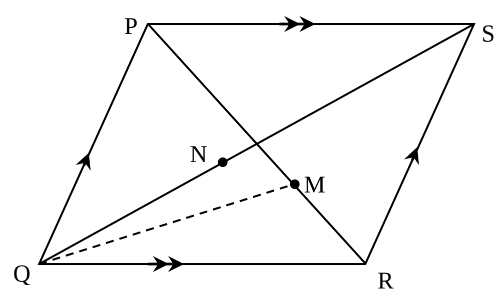
साध्य 4:

कथन (Statement) : समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजन हुन्छन् ।

(क) यहाँ PQRS समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू PR र QS विन्दु O मा काटिएका छन् ।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : PO = OR तथा QO = OS

(ग) जुक्ति : विकर्ण PR र QS का मध्यविन्दुहरू M र N छन् ।



(घ) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ [≥ ΔPQR मा मध्यविन्दुको साध्यअनुसार]

2. $\overrightarrow{QN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QS}$ [≥ QS को मध्यविन्दु N भएकोले]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PS})$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QR})$ [≥ समानान्तर चतुर्भुजका विपरीत भुजाहरू बराबर हुने भएकाले]

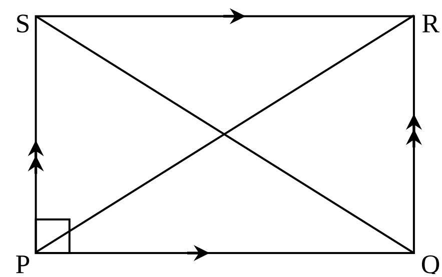
3. $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QN}$ [1 र 2 बाट]

4. M र N एउटै विन्दु O मा पर्दछ [≥ $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QN}$]

5. तसर्थ विकर्णहरू PR र QS एउटै विन्दुबाट समद्विभाजन हुन्छ ।

साध्य 5:

कथन (Statement) : आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।



(क) यहाँ आयत PQRS का विकर्णहरू PR र SQ छन् ।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : PR = SQ

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. ΔPQS मा

$\overrightarrow{SQ} = (\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ})$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$(\overrightarrow{SQ})^2 = (\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ})^2$ [≥ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

$SQ^2 = (\overrightarrow{SP})^2 + (\overrightarrow{PQ})^2 + 2.\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{PQ}$

$= SP^2 + PQ^2$ [≥ $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ} = 0$ हुने भएकाले]

2. ΔPQR मा त्यसै गरी

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

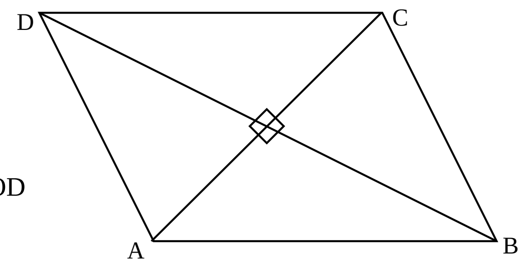
$= PQ^2 + SP^2$ [≥ QR = SP]

3. $PR^2 = SQ^2$ [(1) र (2) बाट]

अथवा PR = SQ प्रमाणित भयो ।

साध्य 6:

कथन (Statement) : समबाहु चतुर्भुज (Rhombus) का विकर्णहरू समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छन् ।



(क) यहाँ समबाहु चतुर्भुज ABCD मा

विकर्णहरू AC र BD छन् ।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : $AC \perp BD$, AO=OC, BO=OD

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

2. $\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$ [≥ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$]

$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ [≥ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ स.च.का विपरीत भुजाहरूको भेक्टर]

3. $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) . (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$ [≥ (1) र (2) बाट]

$= (\overrightarrow{BC})^2 - (\overrightarrow{AB})^2$

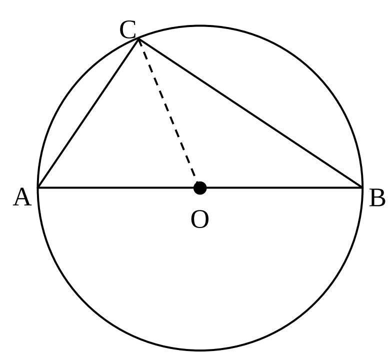
$= (BC)^2 - (AB)^2$

$= 0$ [≥ समबाहु चतुर्भुका आसन्न भुजाहरू बराबर हुने भएकाले]

4. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ [≥ $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{BD} = 0$] प्रमाणित भयो ।

साध्य 7:

कथन (Statement) : वृत्तार्ध (अर्धवृत्त) को काण एक समकोण हुन्छ ।



(क) यहाँ अर्धवृत्त ABC को केन्द्रविन्दु O छ ।

(ख) जुक्ति : C र O जोडौँ ।

(ग) प्रमाणित गर्नुपर्ने : →ACB = 90°

(घ) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$ [≥ एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू बराबर हुने भएकाले]

2. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

3. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ [≥ $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$]

$= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

4. $\overrightarrow{AC}.\ \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO})\ .\ (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$ [≥ भेक्टरको गुणनफल]

$= (\overrightarrow{OC})^2 - (\overrightarrow{OB})^2$

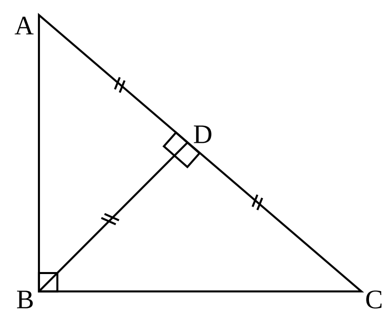
$= (OC)^2 - (OB)^2$ [≥ $\overrightarrow{OC}^2 = OC^2$]

$= 0$ [≥ OC = OB, एउटै वृत्तका अर्धव्यासहरू]

4. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ [≥ $\overrightarrow{AC}.\ \overrightarrow{BC} = 0$] प्रमाणित भयो ।

साध्य 8:

कथन (Statement) : समकोणी त्रिभुजको कर्णको मध्यविन्दु शीर्षविन्दुबाट समदुरी (समान दुरी) मा पर्छ ।



(क) यहाँ समकोण ΔABC मा $BD \perp AC$ छ । र कर्ण AC को मध्यविन्दु D छ ।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : BD = AD = DC

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{BC}.\ \overrightarrow{BA} = 0$ [≥ →ABC = 90° भएकोले]

2. $(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC})\ .\ (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) = 0$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

अथवा $(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD})\ .\ (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}) = 0$ [≥ AC को मध्यविन्दु D भएकोले

अथवा $(\overrightarrow{BD})^2 - (\overrightarrow{CD})^2 = 0$

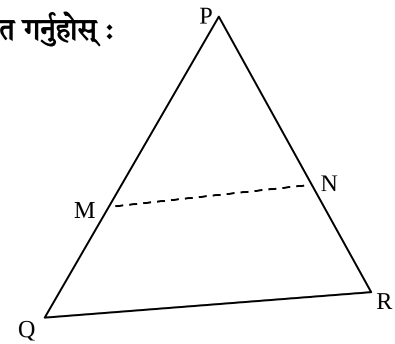
अथवा $(BD)^2 = (CD)^2$

अथवा BD = CD ... ... (i)

3. ≥ BD = AD = CD [≥ AD = CD भएकोले] प्रमाणित भयो ।

उदाहरणहरू

1. यदि ΔPQR मा PM = 2MQ र PN = 2NR भए प्रमाणित गर्नुहोस् :



$\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{QR}$ र $MN = \frac{2}{3} QR$

(क) यहाँ ΔPQR मा PM = 2MQ र PN = 2NR

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{QR}$ र $MN = \frac{2}{3} QR$

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= 2\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MQ}$

$= 3\overrightarrow{MQ}$

″ $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ... ... (i) अथवा $\overrightarrow{QM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QP}$

2. त्यसै गरी $\overrightarrow{NR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$ ... ... (ii)

3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

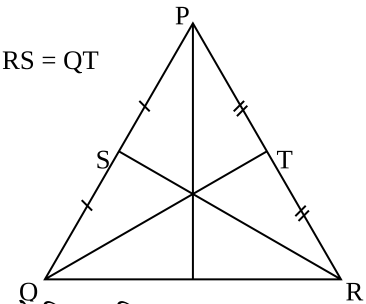
$= 2\overrightarrow{QM} + 2\overrightarrow{NR}$ [≥ PM = 2MQ र PN = 2NR]

$= 2.\frac{1}{3}\overrightarrow{QP} + 2.\frac{1}{3}\overrightarrow{PR}$ [≥ (1) र (2) बाट]

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR})$

″ $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{QR}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार] प्रमाणित भयो ।

2. यदि ΔPQR मा मध्यिका SR र TQ बराबर भए प्रमाणित गर्नुहोस् : ΔPQR एउटा समद्विबाहु त्रिभुज हो।



(क) यहाँ ΔPQR मा मध्यिका SR र TQ बराबर छन्। अर्थात RS = QT

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : ΔPQR एउटा समद्विबाहु त्रिभुज हो।

अर्थात् ΔPQR मा PQ = PR हुन्छ।

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \overrightarrow{RP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$ [≥ PS = SQ]

2. $\overrightarrow{QT} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PT}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

$= \overrightarrow{QP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ [≥ PT = TR]

3. RS = QT

अथवा $|\overrightarrow{RS}| = |\overrightarrow{QT}|$

4. $|\overrightarrow{RS}|^2 = |\overrightarrow{QT}|^2$ [≥ दुवैतर्फ वर्ग गर्दा]

5. $(\overrightarrow{RP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ})^2 = (\overrightarrow{QP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PR})^2$ [≥ (1), (2) र (4) बाट]

अथवा $(\overrightarrow{RP})^2 + 2 \,.\, \overrightarrow{RP} \,.\, \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{PQ})^2 = (\overrightarrow{QP})^2 + 2 \,.\, \overrightarrow{QP} \,.\, \frac{1}{2}\overrightarrow{PR} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{PR})^2$

अथवा $RP^2 + \overrightarrow{RP} \,.\, \overrightarrow{PQ} + \frac{1}{4}PQ^2 = QP^2 + \overrightarrow{QP} \,.\, \overrightarrow{PR} + \frac{1}{4}PR^2$

अथवा $RP^2 + \overrightarrow{RP} \,.\, \overrightarrow{PQ} - \frac{1}{4}PR^2 = QP^2 + \overrightarrow{QP} \,.\, \overrightarrow{PR} - \frac{1}{4}PQ^2$

अथवा $(RP^2 - \frac{1}{4}PR^2) = PQ^2 - \frac{1}{4}PQ^2$

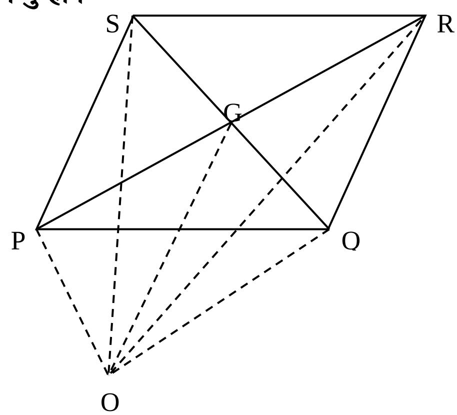
अथवा $\frac{3}{4}RP^2 = \frac{3}{4}PQ^2$

अथवा $RP^2 = PQ^2$

″ PR = PQ [≥ दुवैतर्फ वर्ग हटाउँदा] प्रमाणित भयो।

3. **समानान्तर चतुर्भुज PQRS का विकर्णहरू G विन्दुमा एक आपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :**

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG}$ जहाँ O एउटा कुनै विन्दु हो।



(क) यहाँ PQRS समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू SQ र PR विन्दु G मा समिद्वभाजन भएका छन् र कुनै O विन्दुबाट P, Q, R, S र G सँग जोडिएका छन्।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG}$

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}}{2}$ [≥ PR को मध्यविन्दु G भएकाले]

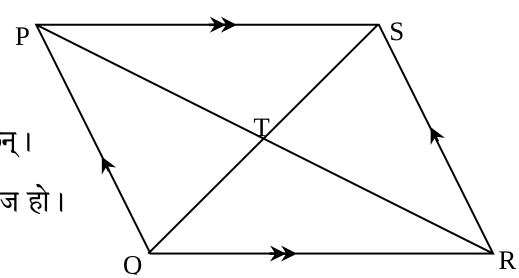
″ $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OG}$ [≥ छड्के गुणन गर्दा]

2. $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ}}{2}$ [≥ SQ को मध्यविन्दु G भएकाले]

″ $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OG}$ [≥ छड्के गुणन गर्दा]

3. $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG}$ [≥ 1 र 2 जोड्दा] प्रमाणित भयो।

4. **समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू समकोण हुने गरी समद्विभाजन हुन्छ भने उक्त स.च. समबाहु (Rhombus) चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।**



(क) यहाँ चित्रमा PQRS एउटा चतुर्भुज हो। जसका विकर्णहरू PR र QS विन्दु T मा समकोण हुने गरी समिद्वभाजन भएका छन्।

(ख) प्रमाणित गर्नुपर्ने : PQRS एउटा समबाहु चतुर्भुज हो।

(ग) प्रमाण (Proof) :

1. $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

2. $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$ [≥ भेक्टर जोडको त्रिभुज नियमअनुसार]

3. $\overrightarrow{PR} . \overrightarrow{QS}$ [≥ PR⊥QS]

4 $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}) . (\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{PQ}) = 0$ [≥ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = - \overrightarrow{SR}$]

अथवा $(|\overrightarrow{QR}|)^2 - |\overrightarrow{PQ}|^2 = 0$ [≥ 1, 2 र 3 बाट]

अथवा $|\overrightarrow{QR}|^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2$

अथवा $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}$

″ QR = PQ [समानान्तर चतुर्भुजका आसन्न भुजाहरू]

तसर्थ PQRS एउटा समबाहु चतुर्भुज हो भन्ने प्रमाणित भयो ।

अभ्यास 6.3

1. (क) कुनै त्रिभुजका दुईओटा भुजाहरूको मध्यविन्दु जोड्ने रेखा खण्ड र बाँकी भुजाको सम्बन्ध देखाउनुहोस् ।

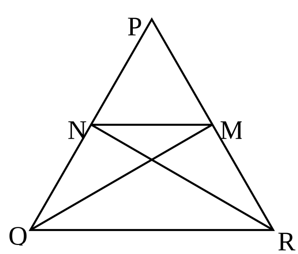
   (ख) समद्विबाहु त्रिभुज ABC मा AB = AC भए शीर्षविन्दु A बाट आधार भुजासम्म खिचिएको लम्ब र आधार भुजाको भेक्टर गुणनको गुणन फल कति हुन्छ ? लेख्नुहोस् ।

2. (क) कुनै ΔPQR मा PQ = PR र PQ⊥QR भए QR को मध्यविन्दु A हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

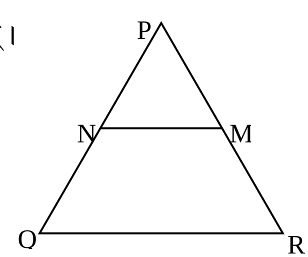
   (ख) कुनै ΔABC मा $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ र $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{PQ}$ भए $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

3. (क) कुनै ΔPQR मा भुजाहरू PR र PQ का मध्यविन्दुहरू M र M भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

   $\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{NR} = \frac{3}{2}\overrightarrow{QR}$



   (ख) दिइएको ΔPQR का भुजाहरू PQ र PR लाई M र N ले 1:2 को अनुपातमा काट्दा MN//QR र $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QR}$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



4. (क) ΔABC मा $AB = AC$ तथा BC को मध्यविन्दु D भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $AD \perp BC$

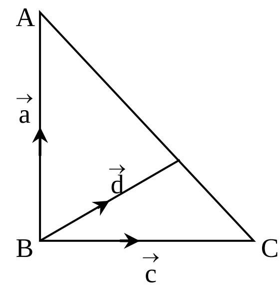
(ख) समकोण ΔABC मा AC को मध्यविन्दु M भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $BM = AM = MC$

5. (क) ΔABC मा मध्यिकाहरू BQ र CP बराबर छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् : ΔABC एउटा समद्विबाहु त्रिभुज हो।

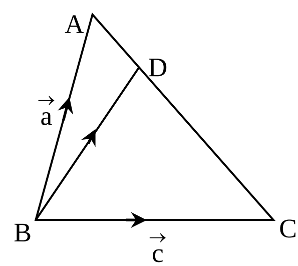
(ख) ΔABC मा $\rightarrow ABC = 90°$ भए $AC^2 = AB^2 + BC^2$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

6. (क) दिइएको चित्रमा $CD = \frac{1}{4} CA$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\vec{d} = \frac{1}{4}(3\vec{c} + \vec{a})$



(ख) दिइएको चित्रमा $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ र $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$ भए प्रमाणित गर्नुहोस् : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{a})$



7. कुनै पनि चतुर्भुजमा मध्यविन्दुहरू जोडेर बन्ने चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस्।

8. समानान्तर चतुर्भुजका विकरणहरू आपसमा समद्विभाजन हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस्।

9. आयतका विकरणहरू बराबर हुन्छन् भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस्।

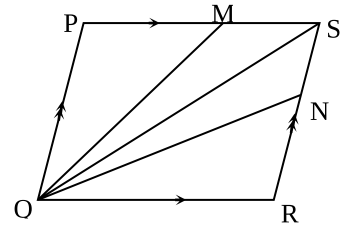
10. समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा समकोणी समद्विभाजन हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस्।

11. अर्धवृत्तमा बनेको त्रिभुज समकोण त्रिभुज हुन्छ भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस्।

12. वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् भनी भेक्टर विधिद्वारा प्रमाणित गर्नुहोस् ।

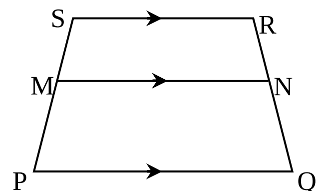
13. दिइएको चित्रमा समानान्तर चतुर्भुज PQRS का भुजाहरू PS र RS का मध्यविन्दुहरू M र N भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$3\overrightarrow{QS} = 2\overrightarrow{QN} + 2\overrightarrow{QM}$



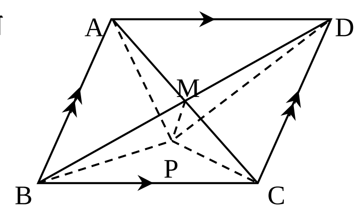
14. चित्रमा PQRS एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो । जहाँ PS र QR का मध्यविन्दुहरू क्रमशः M र N छन् भने प्रमाणित गर्नुहोस् :

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{SR})$



15. दिइएको चित्रमा ABCD एउटा समलम्ब चतुर्भुज हो । जहाँ विकर्णहरू AC र BD विन्दु M मा समद्विभाजन भएका छन् । यदि P एउटा कुनै विन्दु भए प्रमाणित गर्नुहोस् :

$4\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PD}$



एकाइ 7

स्थानान्तरण (Transformation)

7.0 पुनरावलोकन (Review)

स्थानान्तरणले कुनै निश्चित गुणका आधारमा कुनै ज्यामितीय आकृतिको स्थिति वा नापमा परिवर्तन ल्याउँछ। स्थानान्तरणका चार ओटा आधारभूत स्थानान्तरणहरू छन्। ती परावर्तन (Reflection), परिक्रमण (Rotation), विस्थापन (Translation) र विस्तारीकण (Enlargemetn) हुन्।

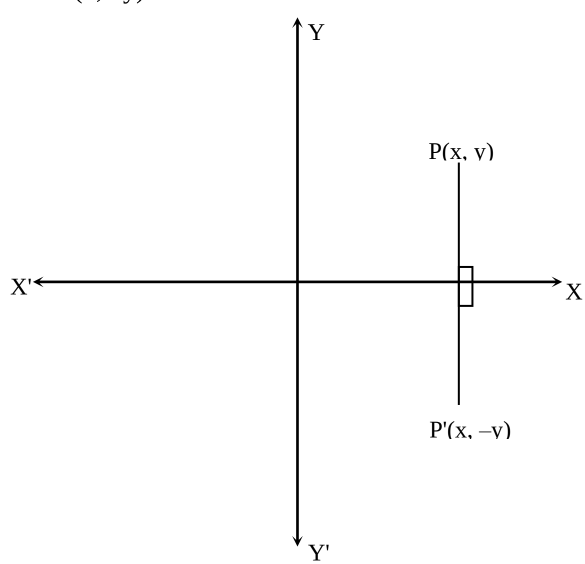
(क) परावर्तन (Refleciton)

✍ **X- अक्षमा परावर्तन :**

X- अक्षमा हुने परावर्तनलाई R_x ले जनाइन्छ। कुनै विन्दु P(x, y) X- अक्षमा परावर्तन हुँदा Y- निर्देशाङ्कमा परिवर्तन हुन्छ।

O

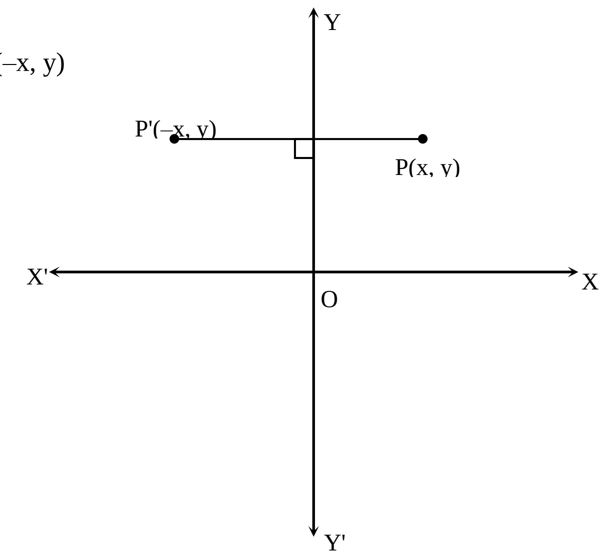
″ $P(x, y) \xrightarrow{R_x} P'(x, -y)$



✍ **Y- अक्षमा परावर्तन :**

Y- अक्षमा हुने परावर्तनलाई R_y ले जनाइन्छ। कुनै विन्दु P(x, y) y- अक्षमा परावर्तन हुँदा X- निर्देशाङ्कमा परिवर्तन हुन्छ।

″ $P(x, y) \xrightarrow{R_y} P'(-x, y)$



✍ **y = x रेखामा परावर्तन :**

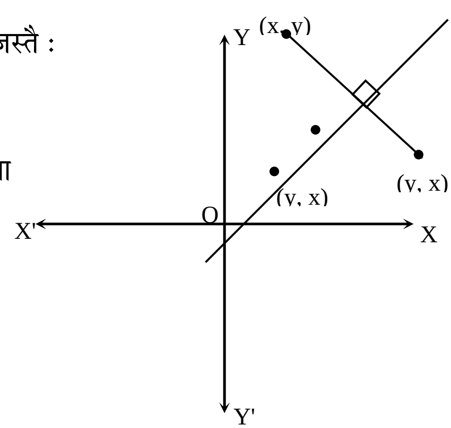
y = x रेखामा हुने परावर्तनलाई $R_{x = y}$ ले जनाइन्छ। जस्तै :

″ $P(x, y) \xrightarrow{R_{x = y}} P''(y, x)$

यहाँ x निर्देशाङ्ग र y निर्देशाङ्क एकआपसमा

साटासाट मात्र हुन्छ।

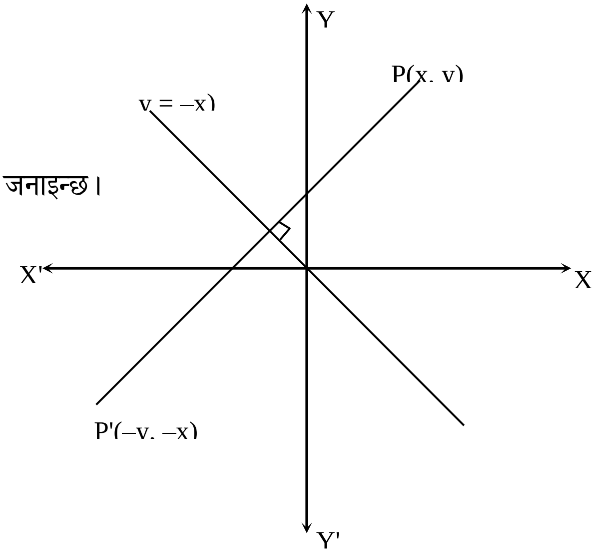
″ $P(x, y) \xrightarrow{R_{x = y}} P'(y, x)$



✍ **$y = -x$ को रेखामा परावर्तन :**

$y = -x$ को रेखामा हुने परावर्तनलाई $R_{y=-x}$ ले जनाइन्छ।

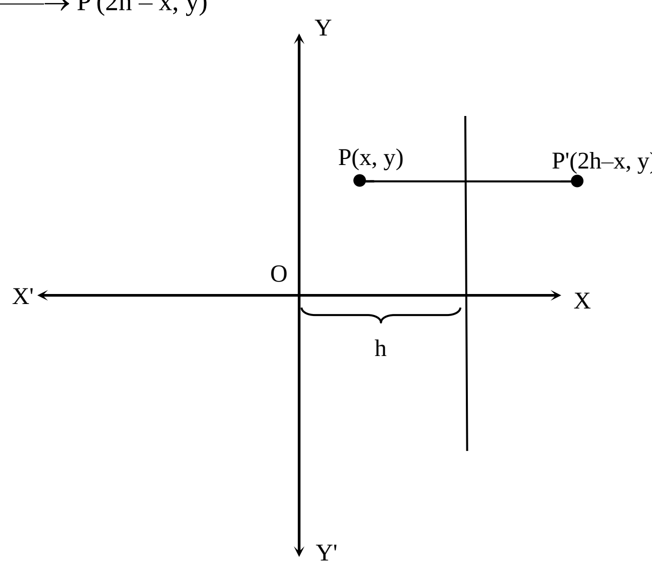
″ $P(x, y) \xrightarrow{R_{y=-x}} P'(-y, -x)$



✍ **$x = h$ रेखामा परावर्तन :**

$x = h$ रेखामा हुने परावर्तनलाई $R_{x=h}$ ले जनाइन्छ। h लाई 2 ले गुणन गरी आउने गुणन फलमा X- निर्देशाङ्क घटाउँदा आकृतिको निर्देशाङ्कपत्ता लाग्छ।

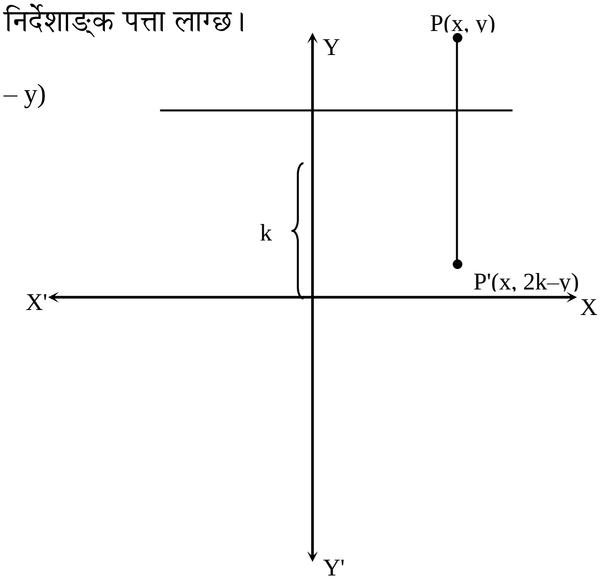
″ $P(x, y) \xrightarrow{R_{x=h}} P'(2h - x, y)$



y = k रेखामा हुने परावर्तन :

y = k रेखामा हुने परावर्तनलाई $R_{y = k}$ ले जनाइन्छ। यहाँ k लाई 2 ले गुणन गरी आएको गुणन फलबाट Y- निर्देशाङ्क घटाउँदा नयाँ बन्ने आकृतिको निर्देशाङ्क पत्ता लाग्छ।

$$\therefore \quad P(x, y) \xrightarrow{R_{y = k}} P'(x, 2k - y)$$



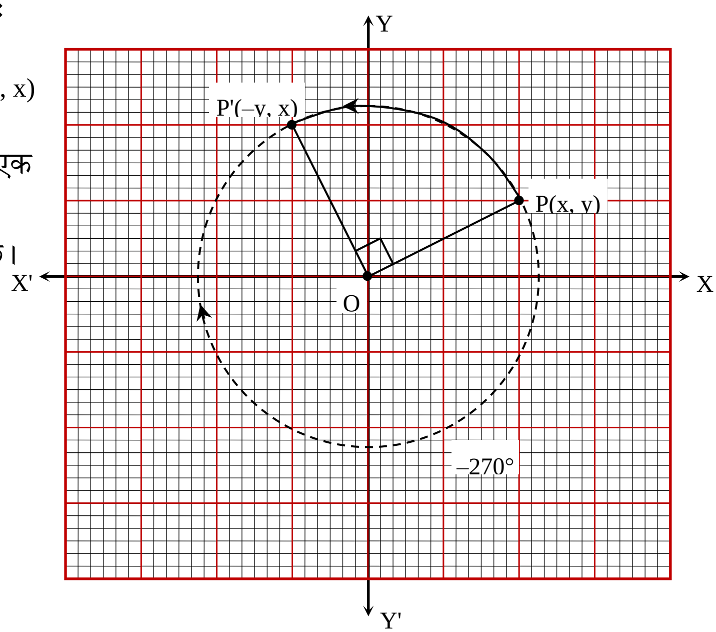
(ख) परिक्रमण (Rotation)

✍ **धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण (Positive Quarter Turn) :**

उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट कुनै निश्चित दुरीमा रही घडीको सुई घुम्ने दिशाको उल्टो दिशामा 90° को परिक्रमणलाई +90° को परिक्रमण भनिन्छ। यसलाई Q^+ ले जनाइन्छ। +90° र –270° को परिक्रमणले एउटै/उही आकृति जनाउँछ। जस्तै :

$$P(x, y) \xrightarrow[Q\ -270^\circ]{Q\ +90^\circ} P'(-y, x)$$

अतः विन्दु P(2, 1) लाई धनात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा त्यसको आकृतिको निर्देशाङ्क P'(–1, 2) हुन्छ। त्यसै गरी विन्दु P(2, 1) लाई ऋणात्मक तीन चौथाइ परिक्रमण गराउँदा त्यसको आकृतिको निर्देशाङ्क P'(–1, 2) नै हुन्छ।

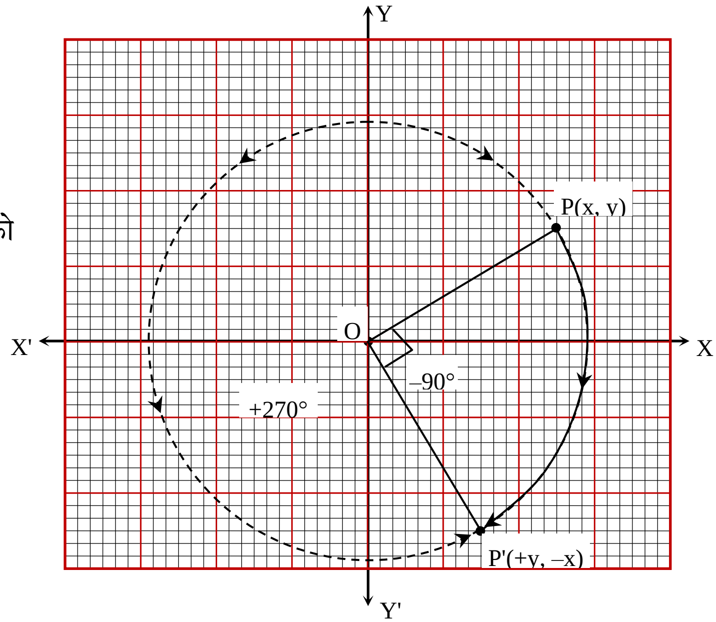


✍ ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण (Negative Quarter Turn) :

उद्गम विन्दु O(0, 0) बाट कुनै निश्चित दुरीमा रही घडीको सुई घुम्ने दिशामा 90° को परिक्रमणलाई ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण भनिन्छ। यसलाई Q^- ले जनाइन्छ। +270° र –90° को परिक्रमणले उही आकृति जनाउँछ। जस्तै :

$$P(x, y) \xrightarrow[Q\ +270^\circ]{Q\ -90^\circ} P'(y, -x)$$

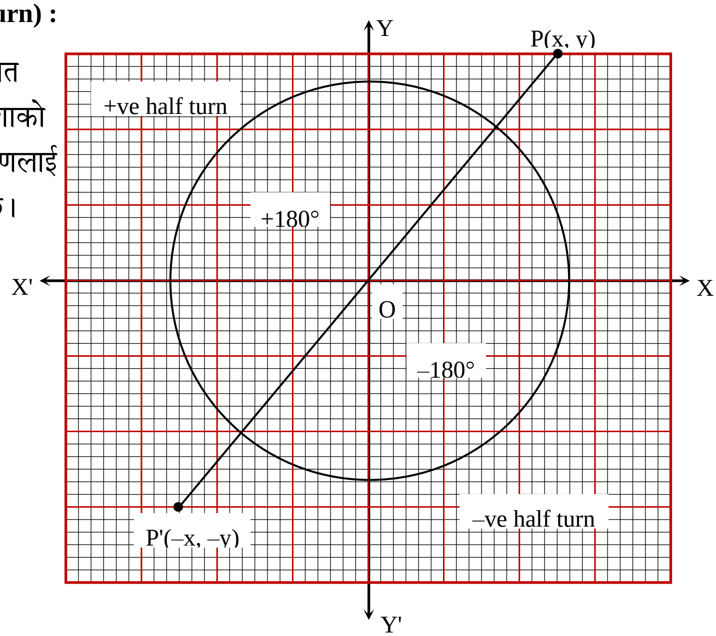
अत: विन्दु P(3, 2) लाई ऋणात्मक एक चौथाइ परिक्रमण गराउँदा त्यसको आकृति बिन्दु P'(2, –3) मा बन्छ।



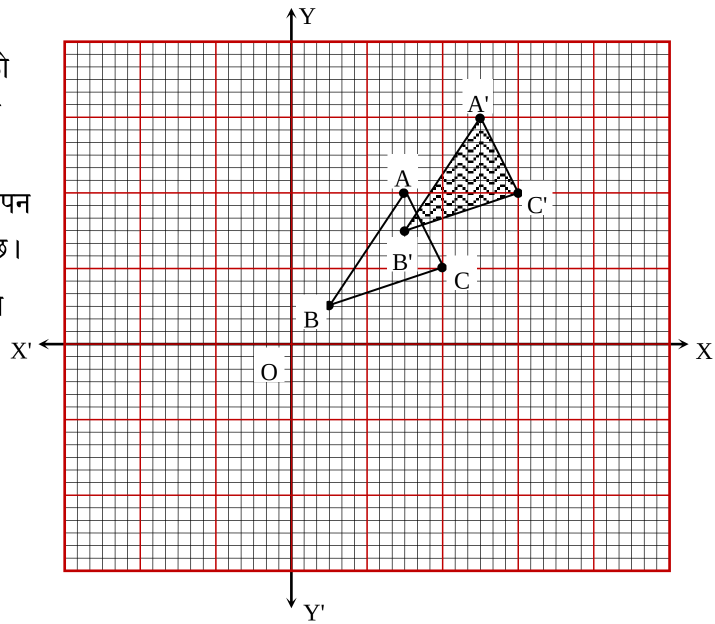
✍ अर्ध परिक्रमण (Half Turn) :

उद्गम विन्दु P(0, 0) बाट निश्चित दुरीमा रही घडीको सुई घुम्ने दिशाको उल्टो दिशामा 180° को परिक्रमणलाई धनात्मक अर्ध परिक्रमण भनिन्छ। यहाँ धनात्मक र ऋणात्मक दुवै प्रकारको परिक्रमणमा आकृति एकै ठाउँमा देखा पर्छ। जस्तै :

$$P(x, y) \xrightarrow[H\ -\ 180^\circ]{H\ +\ 180^\circ} P'(-x, -y)$$



(ग) विस्थापन (Translation)



कुनै पनि विन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा स्थानान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई विस्थापन भनिन्छ।
कुनै पनि विन्दु वा वस्तुलाई विस्थापन गर्न विस्थापन भेक्टर आवश्यक हुन्छ। विस्थापन भेक्टर T$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ ले जनाउने गरिन्छ। तसर्थ

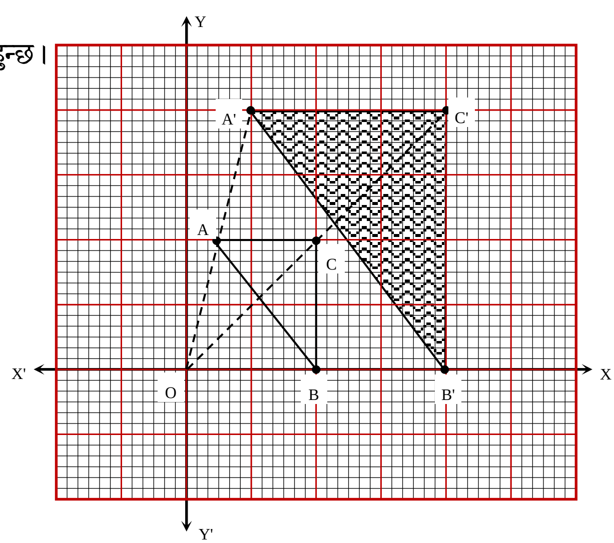
$$P(x, y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}} P'\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$$

माथि दिइएको चित्रमा विस्थापन भेक्टर T$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ पत्ता लगाउनुहोस्।

(घ) विस्तारीकण (Enlargement)

ज्यामितीय आकृतिको आकार निश्चित विस्तारीकरणको केन्द्र र विस्तारको नापोका आधारमा हुने परिवर्तनलाई विस्तारीकण भनिन्छ। विस्तारीकणको केन्द्र O(0, 0) हुँदा नापो k भएको अवस्थामा

$P(x, y) \xrightarrow{E[(a, b), k]} P'(kx, ky)$ हुन्छ।



विस्तारीकणको केन्द्र C(a, b) र नापो (Scale Factor) k हुँदा

$P(x, y) \xrightarrow{E[(a, b), k]} P'[k(x - a) + a, k(y - b) + b]$ हुन्छ।

अत: $P(4, 2) \xrightarrow{E[(2, 1), 2]} P'[2(4 - 2) + 2, 2(2 - 2) + 2] = P'(6, 2)$

7.1 संयुक्त स्थानान्तरण (Combination of Transformations)

एउटा स्थानान्तरणपछि फेरी अर्को स्थानान्तरण हुने स्थानान्तरणलाई संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ। यहाँ परावर्तन, परिक्रमण, विस्थापन र विस्तारीकरण मध्ये कुनै दुईओटा स्थानान्तरणहरूको संयुक्त स्थानान्तरण बारे छलफल तथा अभ्यास गरिनेछ।

7.1.1 संयुक्त परावर्तन (Combination of Reflection)

कुनै विन्दु वा वस्तुलाई एउटा परावर्तनपछि अर्को परावर्तन हुने स्थानान्तरणलाई संयुक्त परावर्तन भनिन्छ।

उदाहरणहरू

1. रेखा $x = 4$ मा कुनै विन्दु A(3, 2) लाई परावर्तनपछि Y-अक्षमा परावर्तन गरिन्छ भने अन्तिम अवस्थाको आकृतिको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ $P(x, y) \xrightarrow{x = h} P'(2h - x, y)$

$A(3, 2) \xrightarrow{x = 4} A'(2 \times 4 - 3, 2) = A'(5, 2)$

$A'(5, 2) \xrightarrow{\text{y अक्षमा परावर्तन}} A''(-5, +2)$ हुन्छ।

2. शीर्षविन्दुहरू A(1, 2) B(4, –1) र C(2, J) भएको त्रिभुजलाई रेखाहरू $x = -1$ र $y = 2$ मा लगातार परावर्तन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क लेखेर लेखा चित्रमा देखाउनुहोस्।

यहाँ $P(x, y) \xrightarrow{x = h} P'(2h - x, y)$

$A1, 2) \xrightarrow{x = -1} A'(-2 - 1, 2)$

$= A'(-3, 2)$

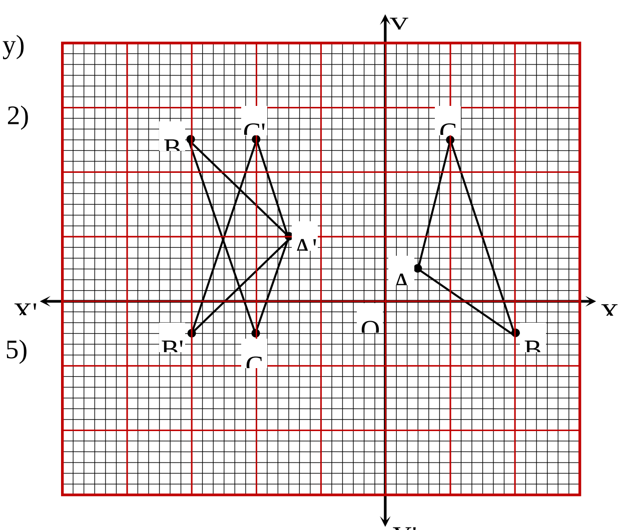
$B(4, -1) \xrightarrow{x = -1} B'(-2 - 4, -1)$

$= B'(-6, -1)$

$C(2, 5) \xrightarrow{x = -1} C'(-2 - 2, 5)$

$= C'(-4, 5)$

$P(x, y) \xrightarrow{y = k} P'(x, 2k - y)$



″ $A'(-3, 2) \xrightarrow{y = 2} A''(-3, 2\times2 - 2) = A''(-3, 2)$

$B'(-6, -1) \xrightarrow{y = 2} B''(-6, 2\times2 + 1) = B''(-6, 5)$

$C'(-4, 5) \xrightarrow{y = 2} C''(-4, 2\times2 - 5) = C''(-4, -1)$

7.1.2 संयुक्त परिक्रमण (Combination of Rotation)

एकपछि अर्को हुने परिक्रमणलाई संयुक्त परिक्रमण भनिन्छ। जस्तै :

3. **उद्गम विन्दु O(0, 0) को वरिपरि +90° र –270° लगातार परिक्रमण गरी शीर्षविन्दुहरू P(–4, 0), Q(–6, 2), R(–4, 3) र S(2, 5) भएको चतुर्भुजलाई स्थानान्तरण गर्नुहोस्। प्राप्त प्रतिविम्ब र वस्तुलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।**

यहाँ $R_1 = [(0, 0) + 90°]$ र $R_2 = [(0, 0) – 270°]$ मान्दा

$R_2oR_1 = [(0, 0) + 90° – 270°] = [(0, 0) – 180°]$

अतः संयुक्त परिक्रमणले उद्गम (0, 0) बाट घडीको सुई घुम्ने दिशाको सुल्टो दिशामा हुने अर्ध परिक्रमण जनाउँछ।

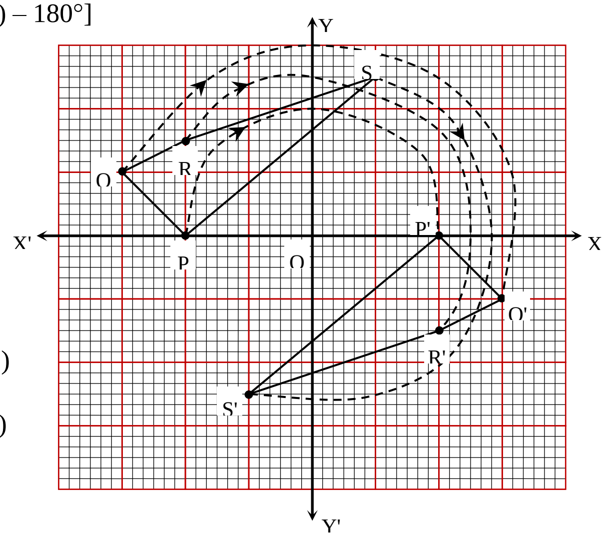
″ $P(x, y) \xrightarrow{R_2oR_1 – 180°} P'(–x, –y)$

$P(–4, 0) \xrightarrow{– 180°} P'(4, 0)$

$Q(–6, 2) \xrightarrow{– 180°} Q'(6, –2)$

$R(–4, 3) \xrightarrow{– 180°} R'(4, –3)$

$S(2, 5) \xrightarrow{– 180°} S'(–2, –5)$



7.1.3 संयुक्त विस्थान (Combination of Translation)

एकपछि अर्को लगातार विस्थापन हुने स्थानान्तरणलाई संयुक्त विस्थापन भनिन्छ। $T_1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ र $T_2\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ दुई वटा विस्थापन भेक्टर भए $T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$ हुन्छ।

4. **यदि $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ दुईओटा विस्थापन भेक्टरहरू भए विन्दु A(7, 3) को संयुक्त विस्थापन पछिको प्रतिविम्ब पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ $T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

″ $T_2oT_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 3 + 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

″ $A\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2 o T_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} 7+3 \\ 3+5 \end{pmatrix} = A'\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

7.1.4 परावर्तन र विस्थापनको संयुक्त स्थानान्तरण (Transformation of Combined Reflection and Translation)

एउटा परावर्तनपछि अर्को विस्थापन हुने स्थानान्तरणलाई परावर्तन र विस्थापनको संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ। जस्तै

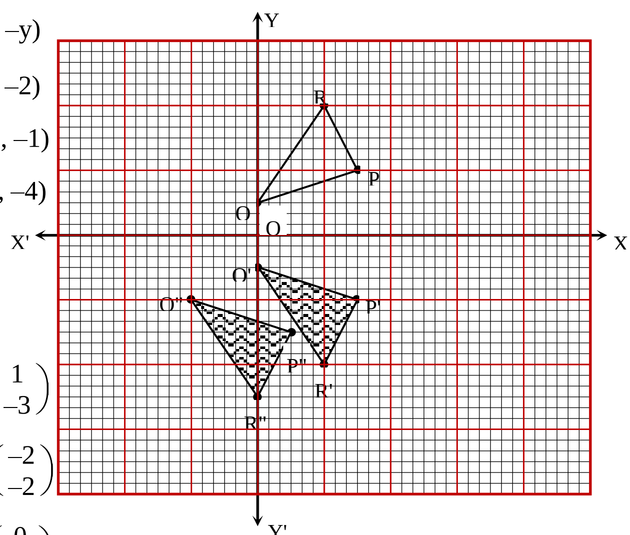
5. शीर्षविन्दुहरू P(3, 2), Q(0, 1) र R(2, 4) भएको त्रिभुजलाई X- अक्षमा परावर्तन गरी विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्नुहोस्। साथै तीनओटै त्रिभुजहरूलाई एउटैले रेखाचित्रमा देखाउनुहोस्।

यहाँ $P(x, y) \xrightarrow{\text{X- cIf}} P'(x, -y)$

″ $P(3, 2) \longrightarrow P'(–, –2)$

$Q(0, 1) \longrightarrow Q'(0, –1)$

$R(2, 4) \longrightarrow R'(2, –4)$



फेरि $P(x, y) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$

″ $P'(3, –2) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}} P''\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$Q'(0, –1) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}} Q''\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$R'(2, –4) \xrightarrow{T = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}} R''\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

7.1.5 विपरीत र परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण (Combined of Enlargement and Reflection)

विस्तारीकण लगतै परावर्तन गरिने स्थानान्तरणलाई विस्तारीकण र परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरण भनिन्छ। जस्तै

6. **शीर्षविन्दुहरू A(1, 1), B(3, 3) र C(4, 2) भएको त्रिभुजलाई E[0, 2] द्वारा विस्तारीकरण गर्नुहोस्। प्राप्त प्रतिविम्बलाई पुनः X- अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस्। प्रत्येक स्थानान्तरणको निर्देशाङ्क पत्ता लगाइ एउटैले रेखाचित्रमा देखाउनुहोस्।**

यहाँ $P(x, y) \xrightarrow{E[0,\ k]} P'(kx, ky)$

" $A(1, 1) \xrightarrow{E[0,\ 2]} A'(2, 2)$

$B(3, 3) \xrightarrow{E[0,\ 2]} B'(6, 6)$

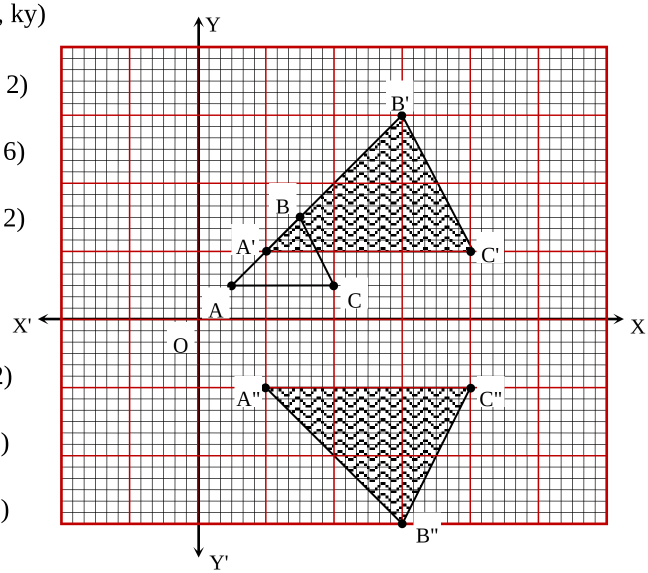
$C(4, 1) \xrightarrow{E[0,\ 2]} C'(8, 2)$

र $P(x, y) \xrightarrow[\text{परावर्तन}]{\text{ह(अक्षमा}} P'(x, -y)$

" $A'(2, 2) \xrightarrow{R_x} A''(2, -2)$

$B'(6, 6) \xrightarrow{R_x} B''(6, -6)$

$C'(8, 2) \xrightarrow{R_x} C''(8, -2)$



अभ्यास 7.1

1. (क) कुनै विन्दु P(x, y) लाई लगातार X-अक्ष र Y-अक्षमा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरणले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? *[उत्तरः R ± 180° को परिक्रमण]*

(ख) रेखाहरू x = 3 र x = 5 मा परावर्तनको संयुक्त स्थानान्तरणले कुन स्थानान्तरण दिन्छ ?

[उत्तरः विस्थापन भेक्टर $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *द्वारा हुने स्थानान्तरणलाई जनाउँछ]*

(ग) परिक्रमण $R_1[(0, 0)\ 90°]$ र $R_2[(0, 0)\ -180°]$ ले दिने संयुक्त स्थानान्तरण R_2oR_1 ले कुन एकल स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? *[उत्तरः परिक्रमण R[(0, 0) –90°] वा R[(0, 0) 270°]]*

(घ) कुनै विन्दु $P(3, 2)$ लाई $E[0, 3]$ र $E(0, 2)$ द्वारा लगातार विस्तारीकरण गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरणको प्रतिविम्ब कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः $P''(18, 12)$]*

(ङ) कुनै विन्दु $P(4, -3)$ लाई क्रमशः $x = 0$ र $y = k$ रेखामा परावर्तन गर्दा संयुक्त स्थानान्तरणपछि प्राप्त प्रतिविम्ब $P''(-4, 9)$ हुन्छ भने k को मान पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तरः $k = 3$]*

2. (क) यदि r_1 र r_2 ले क्रमशः X- अक्ष र Y- अक्षलाई जनाउँछ भने विन्दु $P(4, -5)$ लाई तल दिइएका अवस्थामा परावर्तन गर्नुहोस् :

i. $r_1 o r_2$ ii. $r_2 o r_1$

[उत्तरः (i) $(-4, 5)$ र (ii) $(-4, 5)$]

(ख) यदि $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ र $T_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ दुईओटा विस्थापन भेक्टरहरू हुन् भने विन्दु $P(3, 4)$ र $Q(-2, 3)$ जोडेर बन्ने रेखा खण्डलाई $T_2 o T_1$ को संयुक्त विस्थापन गर्नुहोस्। प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पनि उल्लेख गर्नुहोस्।

[उत्तरः $P''(9, 12)$ र $Q''(4, 11)$]

(ग) विन्दुहरू $P(4, 2)$ र $Q(2, 4)$ जोडेर बन्ने रेखा खण्डलाई उद्गम विन्दुको वरिपरि $+180°$ मा परिक्रमणपछि बन्ने प्रतिविम्बलाई पुनः उद्गम विन्दुको वरिपरि $90°$ परिक्रमण गर्नुहोस्। संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा प्राप्त प्रतिविम्ब र सुरुको रेखा खण्डलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(घ) विन्दुहरू $P(3, 1)$ र $Q(5, 2)$ लाई $E_1[(0, 0), 2]$ र $E_2[(0, 0), 3]$ द्वारा संयुक्त स्थानान्तरण गर्नुहोस्। वस्तु र प्रतिविम्बलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

[उत्तरः $P'(6, 2)$, $P''(28, 6)$ र $Q'(10, 4)$, $Q''(30, 12)$]

3. (क) शीर्षविन्दुहरू $P(3, 1)$, $Q(5, 2)$ र $R(6, 7)$ बाट बनेको एउटा त्रिभुज PQR छ। उक्त ΔPQR लाई $E_1 = [(0, 0), 2]$ र $E_2 = [(0, 0), 2]$ द्वारा एकपछि अर्को गरी विस्तारीकरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्ब र वस्तुलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

[उत्तरः $P'(6, 2)$, $P''(12, 4)$, $Q'(10, 4)$, $Q''(20, 8)$ र $R'(12, 14)$, $R''(24, 28)$]

(ख) शीर्षविन्दुहरू $P(1, 4)$, $Q(5, 1)$ र $R(6, 3)$ भएको ΔPQR लाई विस्थापन भेक्टर $T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ द्वारा विस्थापन गरी पुनः उक्त प्रतिविम्वलाई $x = -1$ रेखामा परावर्तन गर्नुहोस् । प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाइ सबैलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

[उत्तरः $P'(3, 5)$, $Q'(7, 2)$, $R'(8, 4)$, $P''(-5, 5)$, $Q''(-9, 2)$ र $R''(-10, 4)$]

(ग) एउटा त्रिभजका शीर्षविन्दुहरू P(–7, 6), Q(–10, 7) र R(–9, 5) छन् । ΔPQR लाई विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ द्वारा विस्थापनपछि पुनः उक्त प्रतिविम्बलाई X- अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् । संयुक्त स्थानान्तरणद्वारा बन्ने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस्। ΔPQR, ΔP'Q'R' र ΔP"Q"R" लाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(घ) शीर्षविन्दुहरू A(1, 1), B(3, 1) र C(2, 3) को प्रतिविम्ब उद्गम विन्दु O(0, 0) को वरिपरि +90° मा परिक्रमण गर्नुहोस्। प्राप्त प्रतिविम्बलाई पुनः (–1, 2) केन्द्र र नापो 2 भएको अवस्थामा विस्तारीकरण गर्नुहोस्। प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' र ΔP"Q"R" तथा ΔPQR सबैलाई एउटै लेखा चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

(ङ) शीर्षविन्दुहरू A(–1, 1), B(1, 4) र C(3, 2) भएको ΔABC लाई रेखा y = –2 मा परावर्तन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्बलाई पुनः विस्थापन भेक्टर $T = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ले विस्थापन गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्बको शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् । ΔABC र प्रतिविम्ब ΔA"B"C" लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्। *[उत्तरः A"(–2, –8), B"(0, –11) र C"(2, –9)]*

4. A(3, 1), B(4, 3) र C(5, –2) शीर्षविन्दुहरूबाट बनेको ΔABC लाई विन्दु O(1, 1) को वरिपरि 180° मा परिक्रमण गरी प्राप्त प्रतिविम्बलाई पुनः केन्द्रविन्दु O(1, 1) को वरिपरि –90° मा परिक्रमण गरिएको छ। वस्तु र अन्तिम प्रतिविम्बलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

[उत्तरः A"(1, 3), B"(–1, 4) र C"(4, 5)]

7.2 विपरीत स्थानान्तरण र विपरीत वृत्त (Inversion Transformation and Inversion Circle)

स्थानान्तरण ज्यामितिले एउटा समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिमा प्रत्येक विन्दुलाई सो आकृतिको प्रतिविम्वमा रहेका विन्दुहरूमा एक एक सङ्गीता (One to one correspondence) का आधारमा मापन गर्दछ। त्यस्तै गरी उत्क्रम (Inversion) ले वृत्तको अबधारणाका आधारमा वस्तु 'P' लाई प्रतिविम्व P' मा स्थानान्तरण गर्छ। O केन्द्रविन्दु भएका वृत्तका अर्धव्यास r छन् भने तलका वृत्तहरूको अवस्थामा OP × OP' = r^2 शर्त मान्य हुन्छ।

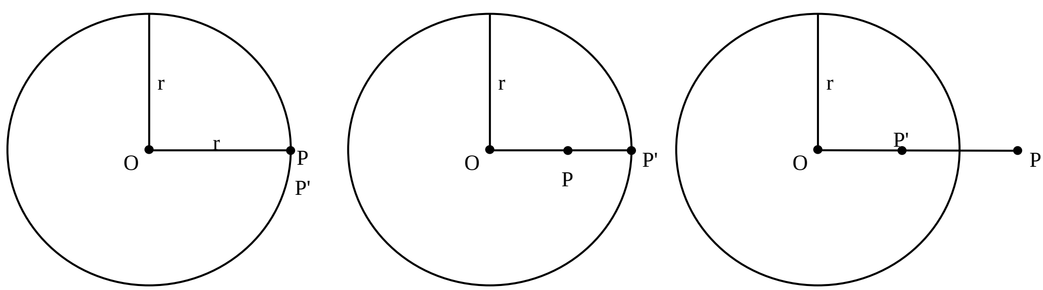


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

यहाँ P → P' वा P' → P मा P र P' लाई वृत्तका सापेक्ष उत्क्रम (Inversion) विन्दुहरू भनिन्छ। यदि विपरीत वृत्तका अर्धव्यास एकाइ (unity) भए

OP . OP' = 1

अथवा $\boxed{OP = \frac{1}{OP'}}$ अथवा $\boxed{OP' = \frac{1}{OP}}$

अतः वृत्त ABC मा केन्द्रविन्दु O(0, 0) र अर्धव्यास 'r' एकाइ भएको अवस्थामा विन्दु P (केन्द्र बाहेक) का लागि एक समान विन्दु P' वृत्तको केन्द्रविन्दु जोड्ने रेखामा पर्दछ।

यहाँ O, P र P' ले

$\boxed{OP \times OP' = r^2}$

अथवा $OP = \frac{r^2}{OP'}$

अथवा $OP' = \frac{r^2}{OP}$

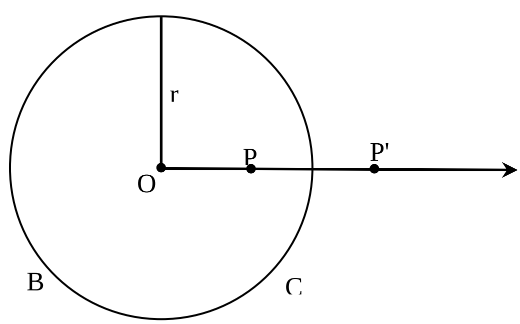


Fig. 4

अर्धब्यास r = 1 एकाइ भएको अवस्थामा

OP × OP' = 1

अथवा $OP = \frac{1}{OP'}$

अथवा $OP' = \frac{1}{OP}$ हुन्छ । विन्दु P' लाई वृत्तका सापेक्ष विन्दु P को उत्क्रम (Inversion) विन्दु भन्दछन् । यदि P वृत्तको भित्र पर्छ भने P' वृत्तको बाहिर हुन्छ । यदि विन्दु P' वृत्तको भित्र पर्छ भने P वृत्तको बाहिर हुन्छ ।

दायाँको चित्रमा AP' र BP' दुवै स्पर्श रेखाहरू स्पर्शविन्दुहरू

A र B बाट गएका छन् । $AB \perp OP$

$$\frac{OA}{OP'} = \frac{OP}{OA}$$

अथवा $OP \times OP' = (OA)^2$

अथवा $OP \times OP' = r^2$

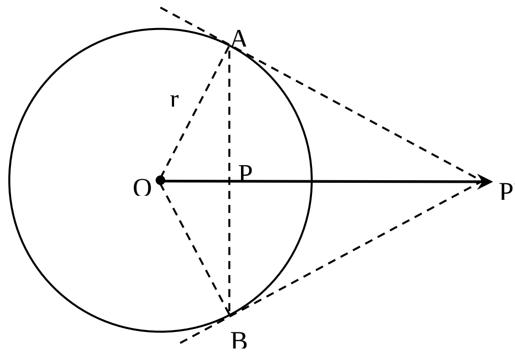


Fig. 5

चित्र नं. 6 मा P' र Q' दुवै विन्दुहरू P र Q का विपरीत विन्दुहरू हुन् । केन्द्र O र अर्धव्यास r एकाइ भएको वृत्त ABC छ । PQ जोडिएको छ । ΔOPQ र $\Delta OP'Q$ बाट

$$\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'}$$

$$OP \times OP' = OQ \times OQ'$$

$$= r^2$$

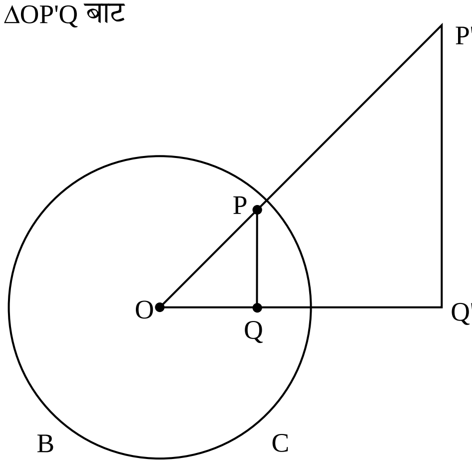
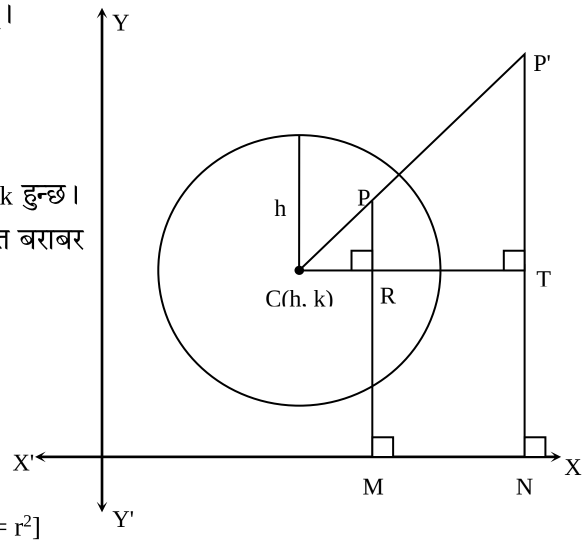


Fig. 6

दिइएको विन्दुको उत्क्रम विन्दु पत्ता लगाउने तरिका

यहाँ वृत्तको केन्द्र C(h, k) र अर्धव्यास r एकाइ छ। केन्द्र C(h, k) बाहेक कुनै विन्दु P को उत्क्रम विन्दु (Inversion Point) P' छ। P र P' का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (x, y) र (x', y') छन्। C, P र P' समरेखीय विन्दुहरू हुन्। PM⊥OX र P'N⊥OX खिचिएको छ। त्यसै गरी CR⊥PM र CT⊥P'N खिचिएको छ।



ΔCRP र ΔCTP' समरुप त्रिभुजहरू हुन्।

यहाँ, ΔCRP मा CR = x – h, PR = y – k

$CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ हुन्छन्।

त्यसै गरी ΔCTP' मा CT = x' – h र P'T = y' – k हुन्छ। समरूप त्रिभुजहरू सङ्गति भुजाहरूको अनुपात बराबर हुन्छन्।

$$\frac{CT}{CR} = \frac{P'T}{PR} = \frac{CP'}{CP}$$

अथवा $\frac{CT}{CR} = \frac{P'T}{PR} = \frac{CP'}{CP} \times \frac{CP}{CP}$

अथवा $\frac{CT}{CR} = \frac{P'T}{PR} = \frac{CP' \times CP}{CP^2}$ [≥ CP' × CP = r^2]

अथवा $\frac{x'-h}{x-h} = \frac{y'-k}{y-k} = \frac{r^2}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

अथवा $\frac{x'-h}{x-h} = \frac{r^2}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ र $\frac{y'-k}{y-k} = \frac{r^2}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

[पहिलो र दोस्रो अनुपातलाई क्रमशः तेस्रो अनुपातसँग बराबर गर्दा]

$x' - h = \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ र

अथवा $y' - k = \frac{r^2(y-k)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

″ $\boxed{x' = \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2 + (y-k)^2} + h}$ र

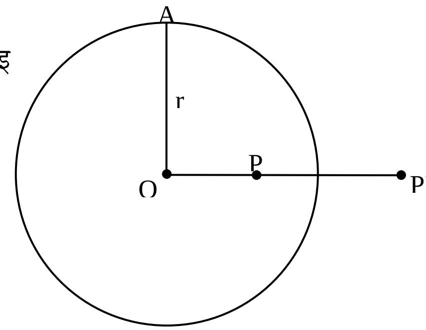
$\boxed{y' = \frac{r^2(x-k)}{(x-h)^2 + (y-k)^2} + k}$

यदि वृत्तको केन्द्र उद्गम विन्दुमा पर्छ भने (h, k) = (0, 0) हुन्छ।

″ $x' = \boxed{\frac{r^2(x)}{x^2 + y^2}}$ र $y' = \boxed{\frac{r^2 y}{x^2 + y^2}}$

उदाहरणहरू :

1. **चित्रमा विपरीत वृत्तको केन्द्र O र अर्धव्यास r = 4 एकाइ छ । यदि OP = $2\sqrt{2}$ एकाइ छ भने OP' = ?**



यहाँ विपरीत वृत्तको अर्धव्यास, OA = r = 4 एकाइ

हामीलाई थाहा छ,

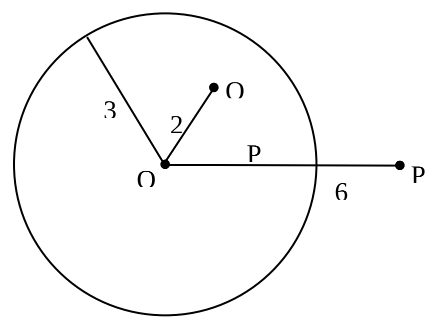
$OP \times OP' = r^2$

$2\sqrt{2} \times OP' = 4^2$

अथवा $OP' = \dfrac{16}{2\sqrt{2}}$

अथवा $OP' = 4\sqrt{2}$ एकाइ हुन्छ ।

2. **दिइएको चित्रमा OQ = 2 एकाइ, OP = 6 एकाइ र अर्धव्यास r = 3 एकाइ छन् भने OP' र OQ' को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।**



यहाँ OP = 5, OP' = ?

r = 3

OQ = 2 OQ' = ?

हामीलाई थाहा छ,

$OP \times OP' = r^2$

$6 \times OP' = 3^2$ [≥ $OP' = \dfrac{9}{6} = 1.5$]

तसर्थ P विपरीत वृत्तको बाहिर र P' भित्र पर्दछ । त्यसैगरी

$OQ \times OQ' = r^2$

अथवा $2 \times OQ' = 3^2$

अथवा $OQ' = \dfrac{9}{2} = 4.5$

यसमा OQ' > OQ, ″ Q विपरीत वृत्तको बाहिर पर्छ ।

3. **यदि विपरीत वृत्तको केन्द्र C(h, k) = (2, 1), (x, y) = (2, 2) र अर्धव्यास r = 3 एकाइ छ भने विपरीत विन्दुको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।**

यहाँ C(h, k) = C(2, 1) ″ h = 2 र k = 1

P(x, y) = P(2, 2) ″ x = 2, y = 2

अर्धव्यास r = 3

यदि (x', y') विपरीत वृत्तका उत्क्रम विन्दु भए हामीलाई थाहा छ,

$$x' = h + \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$= 2 + \frac{3^2(2-2)}{(2-2)^2 + (2-1)^2} = 2$$

$$y' = k + \frac{r^2(y-k)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$= 1 + \frac{(2-1)\,3^2}{(2-2)^2 + (2-1)^2} = 1 + 9 = 10$$

$\therefore$ (x', y') = (2, 10) उत्क्रम विन्दुको निर्देशाङ्क हुन् ।

4. उत्क्रम विन्दु पत्ता लगाउनुहोस् । जहाँ वृत्तको सापेक्ष विन्दु (–1, –3) र वृत्तको समीकरण $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ छन् ।

यहाँ, वृत्तको समीकरण : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$

वृत्तको केन्द्र C(h, k) = (1, –1)

वृत्तको अर्धव्यास r = 3 एकाइ

वृत्तको सापेक्ष विन्दु (x, y) = (–1, –3)

मानौँ उत्क्रम विन्दु = (x', y') = ?

हामीलाई थाहा छ,

$$x' = h + \frac{r^2(x-h)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$= 1 + \frac{9(-1-1)}{(-1-1)^2 + (-3+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{9(-2)}{4+4}$$

$$= 1 - \frac{18}{8}$$

$$= \frac{8-18}{8}$$

$$= \frac{-10}{8} = -\frac{5}{4}$$

$$y' = k + \frac{r^2(y-k)}{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$= -1 + \frac{9(-3+1)}{(-1-1)^2 + (-3+1)^2}$$

$$= -1 - \frac{18}{4+4}$$

$$= \frac{-16-18}{8}$$

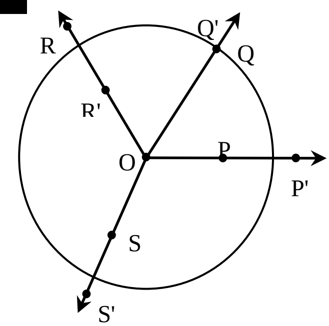
$$= -\frac{34}{8}$$

$$= -\frac{17}{4}$$

$\therefore$ $(x', y') = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{17}{4}\right)$

अभ्यास 7.2

1. दिइएको चित्रमा वृत्तको केन्द्र O(0, 0) र अर्धव्यास 5 एकाइ छ भने सापेक्ष विन्दुहरू P, Q, R र S का दुरीहरू 2.5, 5, 10 र 4 एकाइ भएको अवस्थामा तिनीहरूको उत्क्रम विन्दुहरू पत्ता लगाउनुहोस्।



[उत्तरः OP' = 10, OQ = 5, OR' = 2.5 र OS' = 6.25]

2. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ का सापेक्ष विन्दुहरू दिइएको अवस्थामा उत्क्रम विन्दु (Inversion Point) पत्ता लगाउनुहोस्।

   a. (2, 0) b. (0, 2) c. (1, 2)

   d. (2, 1) e. 4, 2)

[उत्तरः a. (2, 0) b. (0, 2) c. (0.8, 1.6) d. (1.6, 0.8) e. $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$ *]*

3. केन्द्रविन्दु (0, 0) भएको अवस्थामा तलका जानकारीको आधारमा उत्क्रम विन्दु (Inversion Point) पत्ता लगाउनुहोस् :

सापेक्ष विन्दु	अर्धव्यास	उत्क्रम विन्दु	उत्तर
A(2, 1)	5	?	*A'(10, 5)*
B(1, 2)	5	?	*B'(5, 10)*
C(4, 2)	10	?	*C'(20, 10)*
D(2, 4)	10	?	*D'(10, 20)*
E(3, 6)	3	?	$E'\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$
F(5, 10)	5	?	*F'(1, 2)*
G(6, 3)	6	?	$G'\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$
H(5, 0)	4	?	$H'\left(\frac{16}{5}, 0\right)$

4. तल दिइएको अवस्थामा प्रत्येक विन्दुको उत्क्रम विन्दु पत्ता लगाउनुहोस् :

विन्दु (Point)	उत्क्रम वृत्त (Inversion Circle)	उत्क्रम विन्दु	उत्तर
P(4, 0)	$x^2 + y^2 = 16$	?	*P'(4, 0)*
Q(0, 4)	$x^2 + y^2 = 16$	?	*Q'(0, 4)*
R(4, 3)	$x^2 + y^2 = 25$	?	*R'(4, 3)*
S(3, 4)	$x^2 + y^2 = 25$	?	*S'(3, 4)*
T(1, 2)	$(x – 2)^2 + (y – 4)^2 = 5$	?	*T'(–2, –2)*
U(3, 4)	$(x + 2)^2 + (y – 5)^2 = \sqrt{13}$	?	$U'\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$
V(2, 3)	$(x – 1)^2 + (9 – 2)^2 = \sqrt{2}$	?	*V'(2, 3)*

5. तल दिइएको अवस्थामा प्रत्येक उत्क्रम वृत्त (Inversion Circle) को अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् :

विन्दु (Point)	उत्क्रम वृत्त (Inversion Circle)	उत्क्रम वृत्तको केन्द्र (Centre of Inversion Circle)	अर्धव्यास (Radius)	उत्तर *(r)*
A(2, 3)	A'(6, 3)	C(h, k) = C(2, 3)	?	*2*
B(4, 3)	B'(4, 3)	C(0, 0)	?	*5*
C(4, 5)	C'(6, 7)	C(2, 3)	?	*4*
D(1, 5)	D'(1, 5)	C(1, 2)	?	*0*
E(3, 2)	E'(4, 1)	C(2, 3)	?	*2*
F(–1, 2)	F'(–8, –5)	C(0, 3)	?	*4*
G(–3, –1)	G'(–3, –1)	C(1, 2)	?	*5*

7.3 मेट्रिक्सको प्रयोगद्वारा स्थानान्तरण (Transformation by using Matrix)

स्थानान्तरणका बारेमा अघिल्लो पाठमा छलफल गरिसकेका छौँ । यहाँ स्थानान्तरणलाई 2×1 र 2×2 मेट्रिक्सको प्रयोगबाट कसरी छोटो र सजिलो तरिकाले हल गर्न सकिन्छ भने त्यसबारे छलफल गरिनेछ।

एउटा 2×1 को मेट्रिक्स प्रयोग कुनै विन्दु P(x, y) लाई मेट्रिक्सको रूपमा लेख्दा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ हुन्छ । जुन 2×1 क्रममा छ । विन्दु P(x, y) लाई विस्थापन भेक्टर T $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा त्यसको प्रतिविम्ब (x + a, y + b) हुन्छ। यसलाई मेट्रिक्सको जोडको रूपमा प्रस्तुत गर्दा $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}$ हुन्छ। यस प्रकारको स्थानान्तरणलाई 2×1 क्रमको मेट्रिक्स प्रयोग गरी स्थानान्तरण गरेको भनिन्छ।

2×2 क्रमको मेट्रिक्सको प्रयोगद्वारा स्थानान्तरण

कुनै विन्दु P(x, y) लाई लहर मेट्रिक्स (Column Matrix) को रुपमा प्रस्तुत गर्दा $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ हुन्छ । यहाँ विन्दु P(x, y) लाई x- अक्षमा परावर्तन गर्दा त्यसको प्रतिविम्व P'(x, –y) हुन्छ। अतः

$x' = x = 1.x + 0.x \; \ldots \ldots \ldots \text{(i)}$

र $\quad y' = -y = 0.y - 1.y \; \ldots \ldots \ldots \text{(ii)}$

समीकरण (i) र (ii) लाई मेट्रिक्सको रूपमा प्रस्तुत गर्दा

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ हुन्छ।}$$

यहाँ, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ लाई प्रतिविम्ब मेट्रिक्स (Image Matrix) भनिन्छ भने $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ लाई स्थानान्तरण मेट्रिक्स (Transformation Matrix) भनिन्छ।

त्यसै गरी $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ लाई वस्तु मेट्रिक्स (Object Matrix) भनिन्छ।

तसर्थ, **प्रतिविम्व मेट्रिक्स . स्थानान्तरण मेट्रिक्स वस्तु मेट्रिक्स**

अथवा $\boxed{(I)_{2\times n} = (M)_{2\times 2} \times (O)_{2\times n}}$

यहाँ n ले वस्तु र प्रतिविम्बमा भएका शीर्षविन्दुहरूको सङ्ख्यालाई जनाउँछ । n को मान रेखा खण्ड, त्रिभुज र चतुर्भुजका लागि क्रमशः 2, 3 र 4 हन्छ। फरक फरक स्थानान्तरणमा प्रयोग गरिने 2×2 क्रमको मेट्रिक्सहरूको विवरण फरक फरक हुने भएकोले सम्झिन सजिलो होस् भनी तल तालिकामा दिइएको छ।

क्र.सं.	स्थानान्तरण	वस्तु विन्दु	प्रतिविम्व विन्दु	2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स
1	x- अक्षमा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(x, –y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	y- अक्षमा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(–x, y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	x = y रेखामा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	y = –x रेखामा हुने परावर्तन	P(x, y)	P'(–y, –x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	[(0, 0) + 90° र (0, 0) – 270°]	P(x, y)	P'(–y, x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	[(0, 0) – 90° र (0, 0) + 270°]	P(x, y)	P'(y, –x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
7	[(0, 0) ± 180°]	P(x, y)	P'(–x, –y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
8	[(0, 0), k] द्वारा विस्तार	P(x, y)	P'(kx, ky)	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
9	एकल स्थानान्तरण	P(x, y)	P'(x, y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

स्थानान्तरणको सुरूमा यसबारे विस्तृत रुपमा छलफल भइसकेको हुँदा यहाँ तालिकामा मात्र दिइएको छ।

उदाहरणहरू

1. कुनै विन्दु P(x, y) लाई स्थानान्तरण मेट्रिक्स M = $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ द्वारा स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिबिम्वको मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।

यहाँ $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times2}$ $O = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times1}$ र $I_{2\times1} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = ?$

$$I_{2\times1} = M_{2\times2} \times O_{2\times1}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

अथवा $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

2. **कुनै विन्दु P(x, y) लाई मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ बाट स्थानान्तरण गर्दा हुने स्थानान्तरणले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ?**

यहाँ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.x + 1.y \\ 1.x + 0.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = P'(y,x)$

तसर्थ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ बाट हुने स्थानान्तरणले $y = x$ रेखामा हुने परावर्तनलाई जनाउँछ।

3. **कुनै विन्दु P(3, 4) लाई विस्थापन भेक्टर T $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा हुने प्रतिविम्ब पत्ता लगाउनुहोस् :**

यहाँ, वस्तु विन्दु = $O\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, विस्थापन भेक्टर = $T\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ र प्रतिविम्व विन्दु = $I\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ = ?

हामीलाई थाहा छ,

प्रतिविम्व मेट्रिक्स = वस्तु मेट्रिक्स + विस्थापन भेक्टर

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 + 5 \\ 4 + 2 \end{pmatrix}$$

″ प्रतिविम्व मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. **शीर्षविन्दुहरू P(1, 3), Q(4, 3) र R(3, 0) भएका ΔPQR लाई स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्व ΔP'Q'R' का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, स्थानान्तरण मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ र प्रतिविम्ब मेट्रिक्स = ?

हामीलाई थाहा छ,

(प्रतिविम्व मेट्रिक्स) = (स्थानान्तरण मेट्रिक्स) × (वस्तु मेट्रिक्स)

$$(I)_{2\times3} = (M)_{2\times2} \times (O)_{2\times3}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times1 + 0\times3 & 2\times4 + 0\times3 & 2\times3 + 0\times0 \\ 0\times1 + 1\times3 & 0\times4 + 1\times3 & 0\times3 + 1\times0 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 2+0 & 8+0 & 6+0 \\ 0+3 & 0+3 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

तसर्थ P'(2, 3), Q'(8, 3) र R'(6, 0) प्रतिविम्ब ΔP'Q'R' का शीर्षविन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू हुन्।

5. **शीर्षविन्दुहरू A(2, 0), B(–1, 3) र C(2, 4) भएका त्रिभुज PQR छ। ΔPQR लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि +90° मा परिक्रमण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} A & B & C \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

कुनै विन्दुलाई घडीको घुम्ने सुइको उल्टो दिशामा एक चौथाइ परिक्रमण गर्दा हुने मेट्रिक्स = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

अर्थात्, स्थानान्तरण मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ र प्रतिविम्ब मेट्रिक्स = ?

हामीलाई थाहा छ,

(प्रतिविम्ब मेट्रिक्स) = (स्थानान्तरण मेट्रिक्स) × (वस्तु मेट्रिक्स)

$(I)_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\times2 + (-1)\times0 & 0\times(-1) + (-1)\times3 & 0\times2 + (-1)\times4 \\ 1\times2 + 0\times0 & 1\times(-1) + 0\times3 & 1\times2 + 0\times4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times3}$

तसर्थ प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू P'(0, 2), Q'(–3, –1) र R'(–4, 2) हुन्।

6. **समानान्तर चतुर्भुजका एकाइ वर्ग मेट्रिक्सलाई कुनै स्थानान्तरण मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्दा प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू A'(0, 0), B'(3, 1), C'(4, 3) र D'(1, 2) प्राप्त हुन्छन् भने स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ, समानान्तर चतुर्भुजका एकाइ वर्ग मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ हुन्छ।

वस्तु मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, प्रतिविम्ब मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ र स्थानान्तरण मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ मानौँ

हामीलाई थाहा छ,

(प्रतिविम्ब मेट्रिक्स) = (स्थानान्तरण मेट्रिक्स) × (वस्तु मेट्रिक्स)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

अथवा $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\times0 + b\times0 & a\times1 + b\times0 & a\times1 + b\times1 & a\times0 + b\times1 \\ c\times0 + d\times0 & c\times1 + d\times0 & c\times1 + d\times1 & c\times0 + d\times1 \end{pmatrix}$

अथवा $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b & b \\ 0 & c & c+d & d \end{pmatrix}$

$\therefore$ $a = 3, c = 1, b = 1, d = 2$

$\therefore$ स्थानान्तरण मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ हुन्छ।

7. **एउटा वर्गका निर्देशाङ्कहरू P(0, 3), Q(1, 1), R(3, 2) र S(2, 4) छन्। यदि वर्ग PQRS लाई 2×2 मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्दा प्रतिविम्ब वर्ग P'Q'R'S' का निर्देशाङ्कहरू क्रमशः (6, –6), 3, –1), (7, –1) र (10, –6) प्राप्त हुन्छन् भने 2×2 को स्थानान्तरण मेटिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।**

यहाँ, वस्तु मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} P & Q & R & S \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, प्रतिविम्ब मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 10 \\ -6 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ र स्थानान्तरण मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ = ? मानौँ

अब, $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 7 & 10 \\ -6 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a\times0 + 3\times b & a\times1 + b\times1 & a\times3 + b\times2 & a\times2 + b\times4 \\ 3\times0 + 3\times d & c\times1 + d\times1 & c\times3 + d\times2 & c\times2 + d\times4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3b & a+b & 3a+2b & 2a+4b \\ 3d & c+d & 3c+2d & 2c+4d \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $3b = 6$ $\quad$ $3d = -6$ $\quad$ $a + b = 3c + d = -1$

$\rightarrow b = 2$ $\quad$ $\rightarrow d = -2$ $\quad$ $\rightarrow a = 3 - 2 = 1$ $\quad$ $\rightarrow c = -1 + 2 = 1$

$\therefore$ स्थानान्तरण मेट्रिक्स $= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

अभ्यास 7.3

1. (क) कुनै वस्तुलाई X- अक्षमा परावर्तन गर्ने 2×2 मेट्रिक्स लेख्नुहोस्।

(ख) कुनै वस्तुलाई Y- अक्षमा परावर्तन गर्ने 2×2 मेट्रिक्स लेख्नुहोस्।

(ग) कुनै वस्तुलाई घडीको घुम्ने सुइको सुल्टो दिशामा उद्गम विन्दु वरिपरि एक चौथाइ परिक्रमण गर्दा हुने 2×2 मेट्रिक्स लेख्नुहोस्।

(घ) कुनै वस्तुलाई $y = -x$ रेखामा परावर्तन गर्ने 2×2 मेट्रिक्स लेख्नुहोस्।

(ङ) $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ ले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? *[उत्तरको लागि पाठको तालिकामा हेर्नुहोस् ।]*

2. तल दिइएका 2×2 को स्थानान्तरण मेट्रिक्सले कुन कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? लेख्नुहोस् ।

(क) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ख) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ग) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(घ) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (ङ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (च) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. तलका विन्दुहरूलाई विस्थापन भेक्टर T $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्बहरूका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) A(3, 5) (ख) B(–2, 3) (ग) C(5, –2)

(घ) D(3, 0) (ङ) E(0, –1)

[उत्तर : (क) A'(6, 8) (ख) B'(1, 7) (ग) C'(8, 2) (घ) D'(6, 0) (ङ) E'(3, 3)]

4. ΔABC का शीर्षविन्दुहरू A(2, 1), B(3, 4) र C(–1, 3) छन् । ΔABC लाई उद्गम विन्दुको वरिपरि घडीको सुई घुम्ने दिशाको उल्टो दिशामा 90° को परिक्रमण गर्दा प्राप्त हुने प्रतिविम्वका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तर : A'(–1, 2), B'(–4, 3) र C'(–3, –1)]

5. ΔABC लाई स्थानान्तर मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तर गर्दा प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू A'(–6, 3), B'(–2, 4) र C'(–2, 2) हुन्छन् भने ΔABC का निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

[उत्तर : A(3, 6), B(4, 2) र C(2, 2)]

6. ΔABC का निर्देशाङ्कहरू A(3, 6), B(4, 2), C(2, 2) छन् । यदि ΔABC लाई 2×2 मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्दा प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू A'(–6, 3), B'(–2, 4) र C'(–2, 2) हुन्छन् भने स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् । उक्त स्थानान्तरण मेट्रिक्सले कुन स्थानान्तरणलाई जनाउँछ ? लेख्नुहोस् ।

[उत्तरः $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ स्थानान्तरण मेट्रिक्सले उद्गम विन्दुको वरिपरि +90° को परिक्रमणलाई जनाउँछ]

7. ΔPQR का प्रतिविम्बको निर्देशाङ्कहरू P'(11, 7), Q'(7, –1) र R'(9, 8) छन् । यदि ΔPQR लाई स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गरेको हो भने वस्तु मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस् । साथै ΔPQR र ΔP'Q'R' लाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

[उत्तर : P(2, 3), Q(–5, 4) र R(3, 2)]

8. एकाइ वर्गलाई 2×2 मेट्रिक्सले स्थानान्तरण गर्दा प्रतिविम्बका निर्देशाङ्कहरू P'(0, 0), Q'(2, 3), R'(5, 5) र S'(3, 2) हुन्छन् भने उक्त 2×2 को स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्। साथै दुवैलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

[उत्तर: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$*]*

9. एकाइ वर्गलाई समानान्तर चतुर्भुज A'(0, 0), B'(3, 0), C'(4, 1) र D'(1, 1) मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स गर्नुहोस् । वस्तु मेट्रिक्स र प्रतिविम्ब मेट्रिक्स दुवैलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्। *[उत्तर:* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*]*

10. एकाइ वर्गलाई एउटा 2×2 मेट्रिक्सद्वारा स्थानान्तरण गर्दा समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ प्रतिविम्बको रूपमा प्राप्त हुन्छ भने स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तर: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$*]*

11. एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई समानान्तर चतुर्भुज $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तर:* $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*]*

12. एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई समानान्तर चतुर्भुज A'B'C'D' मा स्थानान्तरण गर्ने एउटा 2×2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ हो भने प्रतिविम्ब मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्। *[उत्तर:* $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*]*

13. एउटा एकाइ वर्ग $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ लाई एउटा 2×2 स्थानान्तरण मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ले समानान्तर चतुर्भुजमा स्थानान्तरण गर्छ भने प्रतिविम्ब मेट्रिक्स पत्ता लगाउनुहोस्।

[उत्तर: $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$*]*

14. शीर्षविन्दुहरू P(0, 0), Q(1, 0), R(1, 1) र S(0, 1) एउटा वर्ग बनेको छ भने उक्त वर्गलाई एउटा 2×2 मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ले स्थानान्तरण गरी समानान्तर चतुर्भुज P'Q'R'S' बनाउँछ भने उक्त समानान्तर चतुर्भुजका निर्देशाङ्कहरू पत्ता लगाउनुहोस् । साथै वस्तु मेट्रिक्स र प्रतिविम्ब मेट्रिक्सलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

15. रेखा $y = x$ मा परावर्तन गरी y- अक्षमा परावर्तन गर्दा हुने संयुक्त स्थानान्तरणलाई उद्गम विन्दुमा 90° को परिक्रमणद्वारा देखाउन सकिन्छ भनी मेट्रिक्स विधिबाट पुष्टि गर्नुहोस्।

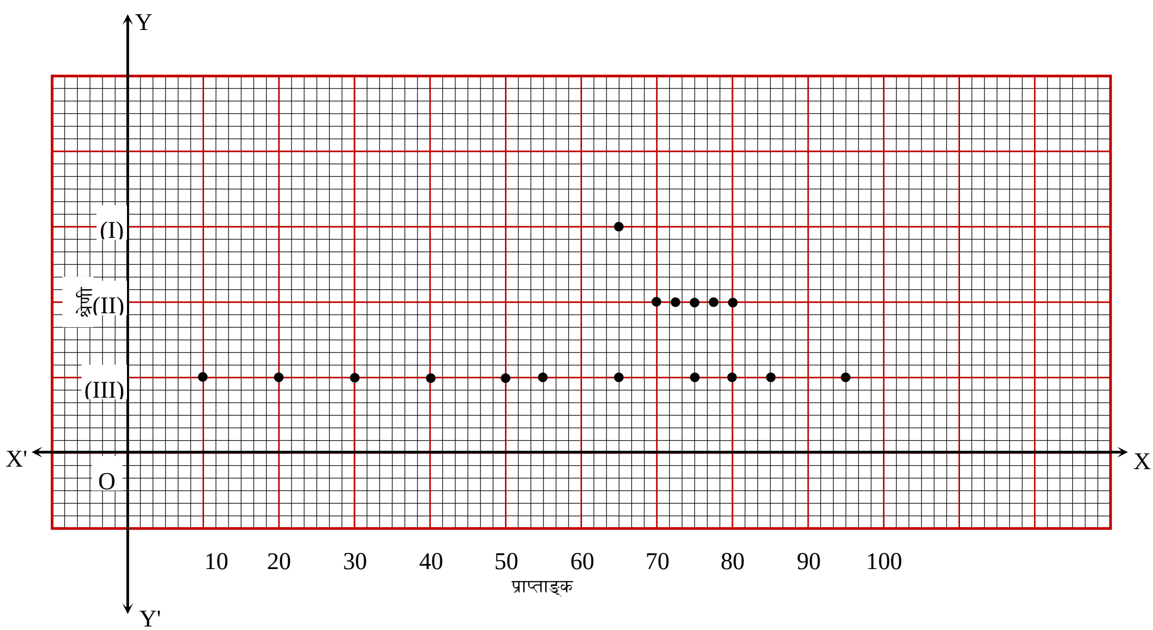
एकाइ
8

तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

8.0 पुनरावलोकन (Review)

तथ्याङ्क विश्लेषणका लागि केन्द्रीय प्रवृत्तिको नाप वा मापनले श्रेणीको औसत मान मात्र बताउँछ । केन्द्रीय प्रवृत्तिको माप प्रारम्भिक चरण मात्र हो । त्यस मापले श्रेणीमा भएका पदहरूको वास्तविक जानकारी दिन सक्दैन । श्रेणीका विभिन्न पदहरूबिचको भिन्नतालाई औसत मानले प्रस्ट पार्न सक्दैन । उदाहरणका लागि तल एउटा तथ्याङ्क प्रस्तुत गरिएको छ। जसको अध्ययन गरी तालिका मुनि दिइएका प्रश्नहरूको छलफल एवम् आत्मचिन्तन गर्नुहोस्।

I	75	75	75	75	75	75	75	75	600	75
II	75	76	78	73	70	77	76	75	600	75
III	50	85	95	80	75	80	55	80	600	75



(क) कुन श्रेणीको प्राप्ताङ्कको वितरण बढी छरिएको छ ?

(ख) कुन श्रेणीको औसत मानले सबैभन्दा बढी प्राप्ताङ्कको वितरणलाई प्रभाव पारेको छ ?

(ग) के एउटै औसत मानले तीनै श्रेणीको प्राप्ताङ्कको वितरणलाई राम्रो मान्न सकिन्छ ?

(घ) कस्तो प्राप्ताङ्कको वितरण सबैभन्दा राम्रो हुन्छ ?

(ङ) के औसत मान एउटै भएका सबै प्राप्ताङ्कको वितरणलाई हेर्ने अर्को कुनै विधि वा प्रक्रिया छैनन् ?

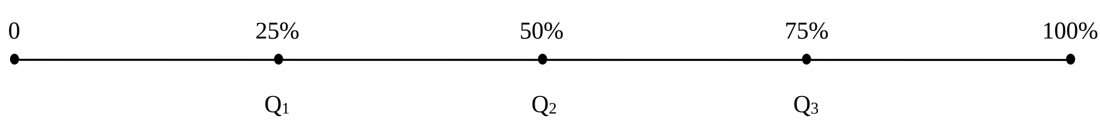
अतः विभिन्न तथ्याङ्कको गुणको व्याख्या तथा विश्लेषण गर्न केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापन प्रयाप्त छैनन् । केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापनले तथ्याङ्कहरू मध्यविन्दुबाट कसरी विचलित भएका छन् भन्ने कुराको जानकारी दिन सक्दैन । कुनै तथ्याङ्कको मध्यविन्दुको सापेक्षमा फैलावट वा विचलनको मापनलाई विचरणशीलता (Dispersion) भनिन्छ । कुनै पनि चर वा तथ्याङ्क औसत वा मध्यविन्दुबाट कति परिमाणमा छरिएको, फैलिएको वा विचलित भएको वा ताल माथि छ भन्ने कुराको मापन नै विचरणशीलताको मापन हो । विचरणशीलता मापनको मुख्य उद्देश्य नै कुनै तथ्याङ्कहरूबिचको सजातीयता (Homogenity) अथवा विविधता (Heterogenity) पत्ता लगाउनु हो ।

सामान्यतया विचरणशीलताको मापन गर्न विस्तार (Ranges), चतुर्थाशीय विचलन (Quartile Deviation), मध्यक भिन्नता (Mean Deviation), स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation) आदि र यिनका गुणाङ्कहरू (Coefficients) को गणना गर्न सकिन्छ ।

वैयक्तिक र खण्डित श्रेणी (Individual and Discreate Series) को चतुर्थाशीय विचलन, मध्यक विचलन र स्तरीय विचलन निकाल्ने विधिहरू कक्षा ९ मा अध्ययन गरिसकेका छौँ । यसैले यस पाठमा निरन्तर वा अविच्छिन (Continuous Series) श्रेणीको चतुर्थाशीय विचलन, मध्यक विचलन र स्तरीय विचलन निकाल्ने विधिका बारेमा छलफल र अध्ययन गरिने छ ।

8.1 चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation)

चतुर्थांशीय विचलन पत्ता लगाउन सर्वप्रथम चतुर्थांशीय मानहरूबारे जान्न आवश्यक छ । चतुर्थांशीय मानहरू भनेको पहिलो चतुर्थांश (Q_1), दोश्रो चतुर्थांश (Q_2) र तेश्रो चतुर्थांश (Q_3) हुन् । यसलाई सङ्ख्या रेखामा पनि देखाउन सकिन्छ ।

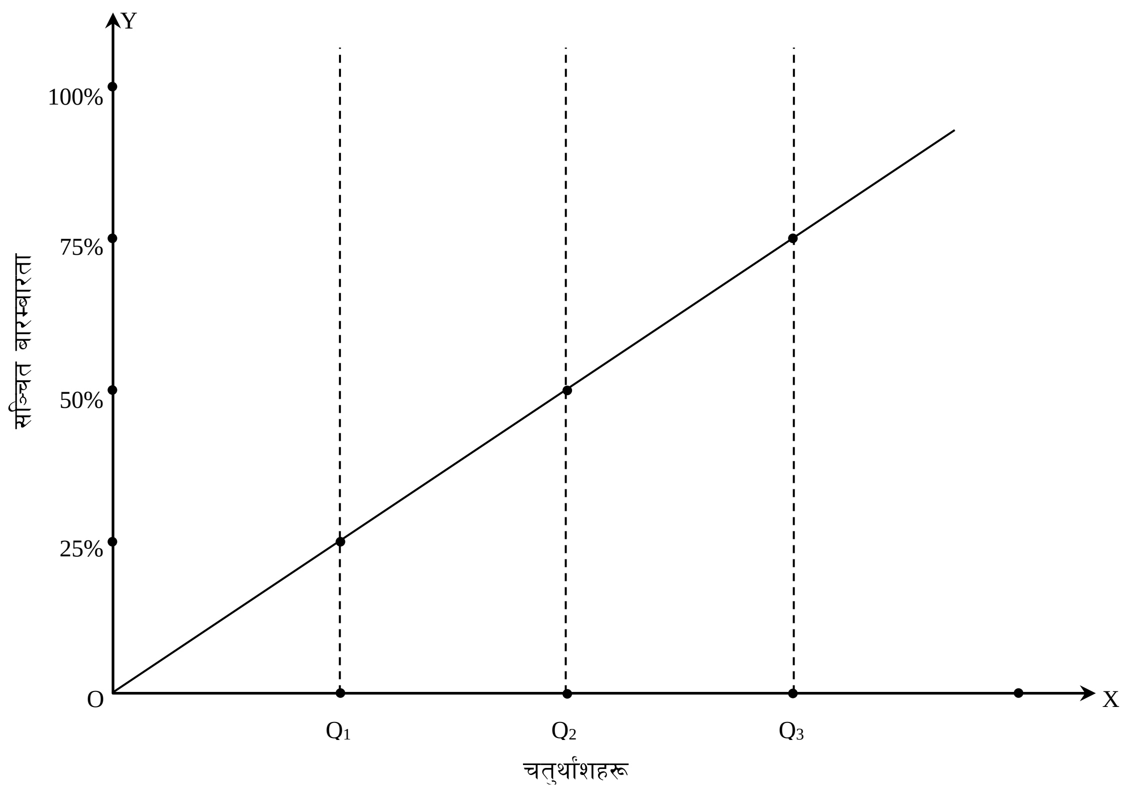


पहिलो चतुर्थांश (Q_1) लाई तल्लो चतुर्थांश (Lower Quartile) पनि भनिन्छ भने तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) लाई माथिल्लो चतुर्थांश (Upper Quartile) पनि भनिन्छ । माथिल्लो चतुर्थांश (Q_3) र तल्लो चतुर्थांश (Q_1) बिचको फरकलाई 2 ले भाग गरी आउने विचलनलाई चतुर्थांशीय विचलन (Quartile Deviation) भनिन्छ।

अर्थात् चतुर्थांशीय विचलन, $Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ हुन्छ।

Q_1, Q_2 र Q_3 को सम्बन्धलाई लेखाचित्रको माध्यमबाट पनि देखाउन सकिन्छ। X- अक्षमा चतुर्थांशहरू र Y- अक्षमा सञ्चित बारम्बारता (Cumulative Frequency) लेखिन्छ।

दिइएको लेखा चित्रका आधारमा निम्न लिखित जानकारी प्राप्त गर्न सकिन्छ।



(क) Q_1 भनेको तथ्याङ्कको जम्मा बारम्बारतामा 25% पदको मात्र मान हो। अर्थात $\frac{N}{4}$ औँ मान हो। यसलाई तल्लो चतुर्थांश (Lower Quartile) पनि भनिन्छ।

(ख) Q_2 भनेको कुल बारम्बारताको 50% पदको मान हो । अर्थात $\frac{2N}{4} = \frac{N}{2}$ औँ मान हो । यसरी आउने मान नै मध्यिका हो । अर्थात् मध्यिका दोस्रो चतुर्थांश (Second Quartile) को मान हो ।

(ग) Q_3 भनेको कुल बारम्बारताको 75% पदको मान हो । अर्थात $\frac{3N}{4}$ औँ मान हो । यसलाई माथिल्लो चतुर्थांश (Upper Quartile) पनि भनिन्छ ।

(घ) तथ्याङ्कको तेस्रो चतुर्थांश (Q_3) र पहिलो चतुर्थांश (Q_1) बिचको फरकको आधालाई चतुर्थांश विचलन (Quartile Deviation) भनिन्छ । चतुर्थांशीय विचलनलाई साङ्केतिक रूपमा निम्नानुसार लेख्न सकिन्छ ।

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$ र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

अथवा $C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उदाहरणहरू

1. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

प्राप्ताङ्क (X)	**0 – 10**	**10 – 20**	**20 – 30**	**30 – 40**	**40 – 50**	**50 – 60**
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	**8**	**12**	**15**	**9**	**6**	**10**

यहाँ, चतुर्थांशीय भिन्नता निकाल्नको निम्नानुसारको सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउनु आवश्यक छ :

प्राप्ताङ्क (X)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
0 – 10	8	8
10 – 20	12	8 + 12 = 20
20 – 30	15	20 + 15 = 35
30 – 40	9	35 + 9 = 44
40 – 50	6	44 + 6 = 50
50 – 60	10	50 + 10 = 60
	″ $\Sigma f = N = 60$	

यहाँ, जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या (N) = 60

अब Q_1 पर्ने स्थान $= \left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद $= \left(\frac{60}{4}\right)$ औँ पद $= 15$ औँ पद

यहाँ सञ्चित बारम्बारता तालिकामा 15 औँ पद वा सोभन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता सङ्ख्या 20 हो। सञ्चित बारम्बारता 20 सँग सम्बन्धित प्राप्ताङ्क श्रेणी (10 – 20) हो। तसर्थ अविच्छिन्न श्रेणीमा Q_1 को वास्तविक मान पत्ता लगाउन निम्नलिखित सूत्रको प्रयोग गर्नुपर्छ।

$$Q_1 = L + \left(\frac{N}{4} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$$

यहाँ $L = Q_1$ मा पर्ने श्रेणीको तल्लो सीमा (Lower Limit) हो।

$c.f. = Q_1$ पर्ने श्रेणी भन्दा माथिल्लो श्रेणीअन्तरको सञ्चित बारम्बारता हो।

$i =$ श्रेणी अन्तर

$f = Q_1$ पर्ने श्रेणीअन्तर्गतको बारम्बारता हो।

तसर्थ माथिको तालिकाबाट

$L = 10$, $c.f. = 8$, $i = 10$, $f = 12$

″ $Q_1 = 10 + (15 - 8) \times \frac{10}{12}$

$= 10 + 7 \times \frac{10}{12} = 10 + 5.83 = 15.83$

त्यसै गरी Q_3 पर्ने स्थान $= \frac{3N}{4}$ औँ पद

$= \frac{3\times 60}{4}$ औँ पद $= 45$ औँ पद

यहाँ सञ्चित बाप्रम्बारता महलमा 45 औँ पद वा सोभन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता संख्या 50 हो। सञ्चित बारम्बारता 50 सँग सम्बन्धित श्रेणी (40 – 50) हो। अविच्छिन्न श्रेणीमा Q_3 को वास्तविक मान निकाल्न निम्नानुसारको सूत्र प्रयोग गर्नुपर्छ।

$$Q_3 = L + \left(\frac{3N}{4} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$$

यहाँ $L = Q_3$ मा पर्ने श्रेणीको तल्लो सीमा

$c.f. = Q_3$ पर्ने श्रेणीको सञ्चित बारम्बारताभन्दा माथिल्लो श्रेणीको बारम्बारता

$i = Q_3$ पर्ने श्रेणीको अन्तर

$f = Q_3$ पर्ने श्रेणीको बारम्बारता

तसर्थ माथिको तालिकाबाट

$L = 40$, c.f. $= 44$, $i = 10$, $f = 6$

$$\therefore \quad Q_3 = 40 + (45 - 44) \times \frac{10}{6}$$

$$= 40 + 1 \times 1.67 \quad = 41.67$$

अतः Q.D. $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{41.67 - 15.83}{2} \quad = \frac{25.84}{2} \quad = 12.92$$

C.Q.D. $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{25.84}{57.5} \quad = 0.45$$

तसर्थ चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D.) = 12.92

चतुर्थांशीय भिन्नताको गुणाङ्क (C.Q.D.) = 0.45

2. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट चतुर्थांशीय विचलन र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् :

प्राप्ताङ्क (X)	**0 – 20**	**20 – 40**	**40 – 60**	**60 – 80**	**80 – 100**
विद्यार्थी संख्या (f)	**12**	**32**	**57**	**75**	**80**

यहाँ, विद्यार्थी सङ्ख्या सञ्चित बारम्बारतामा दिइएको छ । त्यसैले प्रत्येक श्रेणीको विद्यार्थी सङ्ख्या निकाली सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउनुपर्छ ।

प्राप्ताङ्क (X)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	सञ्चित बारम्बारता (c.f.)
0 – 20	12 – 0 = 12	12
20 – 40	32 – 12 = 20	32
40 – 60	57 – 32 = 25	57
60 – 80	75 – 57 = 18	75
80 – 100	80 – 75 = 5	80
	$\therefore \Sigma f = N = 80$	

यहाँ, कुल विद्यार्थी सङ्ख्या $\Sigma f = N = 80$

∴ Q_1 (पहिलो चतुर्थांश) = $\left(\frac{N}{4}\right)$ औँ पद = $\left(\frac{80}{4}\right)$ औँ पद = 20 औँ पद

Q_1 पर्ने श्रेणी = 20 – 40 [≥ 20 भन्दा माथिल्लो 32 भएकोले]

∴ तल्लो सीमा $L = 20$

Q_1 पर्ने श्रेणीको बारम्बारता $f = 20$

Q_1 पर्ने श्रेणीभन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता $c.f. = 12$

Q_1 पर्ने श्रेणीको अन्तर $i = 20$

Q_1 को वास्तविक मान निकाल्ने सूत्रअनुसार

$$Q_1 = L + \left(\frac{N}{4} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$$

$$= 20 + (20 - 12) \times \frac{20}{20} = 20 + 8 \times 1 = 20 + 8 = 28$$

त्यसै गरी Q_3 (तेश्रो चतुर्थांश) = $\frac{3N}{4}$ औँ पद = 60 औँ पद

Q_3 पर्ने श्रेणी = 60 – 80 [≥ 60 भन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता 75 भएकाले]

∴ $L = 60,\ i = 20,\ f = 18,\ c.f. = 57$

$$Q_3 = L + \left(\frac{3N}{4} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$$

$$= 60 + (60 - 57) \times \frac{20}{18}$$

$$= 60 + 3 \times \frac{20}{18}$$

$$= 60 + 3.33 = 63.33$$

∴ चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{63.33 - 28}{2}$$

$$= \frac{35.33}{2} = 17.67$$

चतुर्थांशीय भिन्नताको गुणाङ्क (C.Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{63.33 - 28}{63.33 + 28}$$

$$= \frac{35.33}{91.33} = 0.39$$

तसर्थ दिइएको तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय भिन्नता (Q.D.) = 17.67

चतुर्थांशीय भिन्नताको गुणाङ्क (C.Q.D.) = 0.39 हुन्छ।

अभ्यास 8.1

1. (क) विचरणशीलता (Dispersion) भनेको के हो ? लेख्नुहोस्।

   (ख) विचरणशीलता मापनका विधिहरूको सूची बनाउनुहोस्।

   (ग) विचरणशीलता मापनको आवश्यकताबारे लेख्नुहोस्।

   (घ) चतुर्थांशीय मानहरू के के हुन् ? लेख्नुहोस्।

   (ङ) चतुर्थांशीय भिन्नता (Quartile Deviation) को परिचय दिनुहोस्।

   (च) तल्लो चतुर्थांश र माथिल्लो चतुर्थांशको फरक लेख्नुहोस्।

   (छ) चतुर्थांशीय भिन्नता (विचलन) को गुणाङ्कको परिचय दिनुहोस्।

   (ज) चतुर्थांशीय विचलनका गुण र दोषहरू के के छन् ? लेख्नुहोस्।

   (झ) चतुर्थांशीय विचलन र चतुर्थांशीय विचलनको गुणाङ्क बिच फरक लेख्नुहोस्।

2. (क) यदि कुनै दिइएको तथ्याङ्कको पहिलो चतुर्थांश (Q_1) र तेश्रो चतुर्थांश (Q_3) का मानहरू क्रमशः 55 र 75 भए त्यसको चतुर्थांशीय विचलन र गुणाङ्क निकाल्नुहोस्।

   [उत्तर : Q.D. = 10 र C.Q.D. = 0.15]

   (ख) कक्षा १० का विद्यार्थीहरूको गणित विषयको प्राप्ताङ्कको चतुर्थांशीय मानहरू निकाल्दा $Q_1 = 49$ र $Q_3 = 68$ आयो भने चतुर्थांशीय विचलन र त्यसको गुणाङ्क कति कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस्।

   [उत्तर : Q.D. = 9.5 र C.Q.D. = 0.16]

3. (क) एउटा गणितीय पेपर क्विजमा विद्यार्थीहरूले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्क निम्नानुसार छ :

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	12	18	35	42	50	45	20	8

उक्त तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय विचलन र गुणाङ्क निकाल्नुहोस्।

[उत्तर : Q.D. = 12.79 र C.Q.D. = 0.31]

(ख) तल दिइएका तथ्याङ्कको माथिल्लो चतुर्थांशको मान 65 छ। p को मान निकाली चतुर्थांशीय विचलन र गुणाङ्क निकाल्नुहोस्।

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	3	4	6	8	4	7	p	3	5

[उत्तर : Q.D. = 18.34 र C.Q.D. = 0.36]

(ग) तलका तथ्याङ्कको चतुर्थांशीय विचलन र गुणाङ्कको मान निकाल्नुहोस्।

X	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200	200 – 250
c.f.	7	27	42	52	60

[उत्तर : Q.D. = 27.5 र C.Q.D. = 0.40]

8.2 मध्यक भिन्नता (Mean Deviation)

तथ्याङ्कशास्त्रको अध्ययनमा विचलनको महत्व विशेष छ । केन्द्रीय प्रवृत्तिको मापनभन्दा चतुर्थांशीय विचलन बढी भरपर्दो र विश्वसनीय हुन्छ भने चतुर्थांशीय विचलन भन्दा मध्यक भिन्नता वा विचलन अझ बढी वैज्ञानिक हुन्छ । यसमा तथ्याङ्कमा समावेश गरिएका सबै मानहरूको मध्यक वा मध्यिकाबाट विचलन निकालिन्छ । ती निकालिएका सबै विचलनहरूको औसत मान नै मध्यक भिन्नता वा विचलन (Mean Deviation) हो । अतः सबै विचलनहरूको औसत मान नै मध्यक विचलन वा भिन्नता हो । त्यसैले मध्यक विचलनलाई औसत विचलन पनि भनिन्छ । यो विचलनको निरपेक्ष मापन (Absolute Measure) पनि हो ।

सैद्धान्तिक रूपमा मध्यिकाबाट निकालिएको विचलनले राम्रो परिणाम दिन्छ तर व्यावहारिक रूपमा अङ्कगणितीय मध्यकबाट औसत विचलन निकाल्ने चलन छ । त्यसैले यसलाई मध्यक विचलन भनिन्छ । यस पाठमा अङ्कगणितीय विचलन र मध्यिका विचलन दुवैको छलफल र अध्ययन गरिनेछ ।

मध्यक भिन्नता निकाल्ने सूत्रहरू,

(क) मध्यक भिन्नता (M.D.) = $\frac{\Sigma f\,|m - \bar{x}|}{N}$ ... ... M.D. from A.M.

जहाँ m = अविच्छिन्न श्रेणीका मध्य मान (Mid value)

$\Sigma f = N$ = जम्मा पद संख्या

f = आवृत्ति वा बारम्बारता (frequency)

$\bar{x}$ = अङ्ग गणितीय मध्यक

(ख) मध्यक भिन्नता (M.D.) = $\frac{\Sigma f\,|m - Md|}{N}$ ... ... M.D. from median

जहाँ m = अविच्छिन्न श्रेणीका मध्यिका

$\Sigma f = N$ = पदहरूको कुल सङ्ख्या

f = आवृत्ति वा बारम्बारता (frequency)

Md = अविच्छिन्न श्रेणीका मध्यिका

मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient of Mean Deviation)

मध्यक भिन्नता विचलनशीलता मापनको निरपेक्ष मान हो । फरक एकाइका दुई वा दुईभन्दा बढी श्रेणीहरूको तुलना गर्दा मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient of Mean Deviation) निकालिन्छ । मध्यक भिन्नतामा आधारित विचरणशीलताको तुलनात्मक मापन नै मध्य भिन्नताको गुणाङ्क हो ।

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\text{मध्यकबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$

अथवा Coefficient of M.D. $= \dfrac{\text{M.D. from mean}}{\text{Mean}}$

(ख) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \dfrac{\text{मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता}}{\text{मध्यिका}}$

अथवा Coefficient of M.D. $= \dfrac{\text{M.D. from median}}{\text{Median}}$

मध्यक भिन्नता गणना गर्ने चरणहरू

(क) दिइएको श्रेणीको मध्यक वा मध्यिका गणना गर्ने,

(ख) श्रेणीको मध्यक वा मध्यिकाबाट प्रत्येक पदको भिन्नता वा फरक निकाल्ने,

(ग) मध्यक भिन्नताको मापनमा प्राप्त हुने ऋणात्मक वा धनात्मक चिह्नको ख्याल गरिदैन । त्यसैले यो निरपेक्ष (Absolute) मान हो ।

अर्थात $|m - \overline{x}|$ हुन्छ ।

(घ) प्रत्येक पदबाट निकालिएको मध्यक भिन्नतालाई सम्बन्धित आवृत्ति वा बारम्बारताले गणना गर्ने ,

″ $f|m - \overline{x}|$

(ङ) यसरी निकालिएको $f|m - \overline{x}|$ वा $f|m - Md|$ को योगफल गणना गर्ने,

″ $\Sigma f|m - \overline{x}|$ वा $f|m - \Sigma Md|$

(च) $f|m - \overline{x}|$ वा $f|m - Md|$ को योगफललाई N ले भाग गर्ने,

अर्थात् वा $\dfrac{\Sigma f|m - \overline{x}|}{N}$ वा $\dfrac{\Sigma f|m - Md|}{N}$

उदाहरणहरू

3. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट (क) मध्यकबाट (ख) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता (M.D.) र मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् :

X	**0 – 10**	**10 – 20**	**20 – 30**	**30 – 40**	**40 – 50**	**50 – 60**	**60 – 70**
f	**4**	**6**	**10**	**20**	**10**	**6**	**4**

यहाँ,

(क) मध्यकबाट मध्यक भिन्नता निकाल्दा

X	f	मध्य मान (m)	fm	$\lvert m - \bar{x}\rvert$	$f\lvert m - \bar{x}\rvert$
0 – 10	4	5	20	$\lvert 5 - 35\rvert = 30$	120
10 – 20	6	15	90	20	120
20 – 30	10	25	250	10	100
30 – 40	20	35	700	0	0
40 – 50	10	45	450	10	100
50 – 60	6	55	330	20	120
60 – 70	4	65	260	30	120
	N = 60		$\Sigma fm = 2100$		$\Sigma f\lvert m - \bar{x}\rvert = 680$

∴ मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fm}{N} = \frac{2100}{60} = 35$

∴ मध्यक भिन्नता (M.D.) $= \frac{\Sigma f\lvert m - \bar{x}\rvert}{N}$

$= \frac{680}{60} = 11.33$

∴ मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{M.D.}{\bar{x}}$

$= \frac{11.33}{35} = 0.324$

(ख) मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता निकाल्दा

X	f	c.f.	मध्य मान (m)	$\|m - Md\|$	$f\|m - Md\|$
0 – 10	4	4	5	$\|5 - 35\| = 30$	120
10 – 20	6	10	15	20	120
20 – 30	10	20	25	10	100
30 – 40	20	40	35	0	0
40 – 50	10	50	45	10	100
50 – 60	6	56	55	20	120
60 – 70	4	60	65	30	120
	N = 60				$\Sigma f\|m - Md\| = 680$

Q_2 पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औँ पद = $\frac{60}{2}$ औँ पद = 30 औँ पद

30 भन्दा माथिल्लो सञ्चित बारम्बारता 40 छ।

∴ Q_2 पर्ने श्रेणी = 30 – 40

∴ $L = 30$, $i = 10$, $f = 20$ र $c.f. = 20$, $\frac{N}{2} = 30$

मध्यिका (Q_2) $= L + \left(\frac{N}{2} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$

$= 30 + (30 - 20) \times \frac{10}{20}$

$= 30 + 10 \times \frac{10}{20} = 30 + 5 = 35$

∴ मध्यक भिन्नता $= \frac{\Sigma f|m - Md|}{N} = \frac{680}{60} = 11.33$

∴ मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{M.D.}{Md}$

$= \frac{11.33}{35} = 0.324$

4. **तल दिइएका तथ्याङ्कहरूको आधारमा मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता निकाल्नुहोस् :**

X	**30 – 40**	**40 – 50**	**50 – 60**	**60 – 70**	**70 – 80**	**80 – 90**
c.f.	**2**	**20**	**44**	**64**	**72**	**75**

यहाँ,

X	c.f.	f	m	|m – Md|	f|m – Md|
30 – 40	2	2 – 0 = 2	35	22.29	44.58
40 – 50	20	20 – 2 = 18	45	12.29	221.22
50 – 60	44	44 – 20 = 24	55	2.29	54.96
60 – 70	64	64 – 44 = 20	65	7.71	154.2
70 – 80	72	72 – 64 = 8	75	17.71	141.68
80 – 90	75	75 – 72 = 3	85	27.71	81.13
		Σf = N = 75			Σf|m – Md| = 697.77

माथि तालिकाबाट

मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{N}{2}$ औँ पद = $\frac{75}{2}$ औँ पद = 37.5 औँ पद

″ मध्यिका पर्ने श्रेणी = 50 – 60

″ L = 50, i = 10, f = 24 र c.f. = 20, Md = ?

मध्यिका (Q_2) $= L + \left(\frac{N}{2} - c.f.\right) \times \frac{i}{f}$

$= 50 + (37.5 - 20) \times \frac{10}{24}$

$= 50 + 17.5 \times \frac{10}{24}$

$= 50 + 7.29 = 57.29$

″ मध्यक भिन्नता $= \frac{\Sigma f|m - Md|}{N}$

$= \frac{697.77}{75}$

$= 9.30$

" मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{M.D.}{Md}$

$= \frac{9.30}{57.29}$

$= 0.162$

अभ्यास 8.2

1. (क) मध्यक भिन्नता (M.D.) को परिचय दिनुहोस् ।

(ख) मध्यक भिन्नताको गुणाङ्कको परिचय दिनुहोस् ।

(ग) मध्यक भिन्नता गणना गर्ने चरणहरू लेख्नुहोस् ।

(घ) चतुर्थांशीय विचलन भन्दा मध्यक विचलनभन्दा बढी राम्रो मानिन्छ, किन ? स्पष्ट पार्नुहोस् ।

(ङ) मध्यक भिन्नताका गुण र दोषहरू केलाउनुहोस् ।

2. (क) कुनै वर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यिका 24 र मध्यिकाबाट मध्यक 7.74 छ भने त्यसको गुणाङ्क कति हुन्छ ? निकाल्नुहोस् । *[उत्तर: 0.323]*

(ख) कक्षाका 50 जना विद्यार्थीहरूको गणित विषयको प्राप्ताङ्कको मध्यक 39 र त्यसको मध्यक भिन्नता 12 भए मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् । *[उत्तर: 0.306]*

(ग) कक्षा 10 का 50 जना विद्यार्थीहरूको विज्ञान विषयको प्राप्ताङ्कको मध्यिका निकाल्दा 36.67 आएछ । यदि त्यस प्राप्ताङ्कको मध्यिकाबाट मध्यक भिन्नता 11.53 छ भने उक्त मध्यक भिन्नताको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् । *[उत्तर: 0.3144]*

(घ) कुनै विद्यालयका विद्यार्थीहरूको गणित विषयको प्राप्ताङ्कको $\Sigma f = 68$, $\Sigma f|m - \overline{x}| = 824$ र $\overline{x} = 32$ छन् भने मध्यक भिन्नता र गुणाङ्क निकाल्नुहोस् ।

[उत्तर: 0.12.118 र 0.379]

3. तलका तथ्याङ्कहरूको आधारमा मध्यकबाट मध्यक भिन्नता र त्यसका गुणङ्कहरू निकाल्नुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	3	5	4	5	3

[उत्तर: 11 र 0.44]

(ख)

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	3	7	5	6	4

[उत्तर: 21.76 र 0.428]

(ग)

X	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f	2	3	6	5	4

[उत्तर: 9.85 र 0.352]

(घ)

X	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
f	6	8	11	14	8	3

[उत्तर: 11.8 र 0.304]

(ङ)

X	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
c.f.	5	15	35	43	46

[उत्तर: 7.84 र 0.339]

4. तल दिइएका विवरणबाट मध्यक भिन्नता (मध्यिकाबाट) र त्यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस् :

(क)

श्रेणी : X	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f	8	10	12	20	12	6

[उत्तर: 12.12 र 0.38]

(ख)

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	6	8	11	18	5	2

[उत्तर: 10.8 र 0.36]

(ग)

X	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45
f	2	10	25	16	7

[उत्तर: 3.923 र 0.1167]

(घ)

X	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f	5	8	15	16	6

[उत्तर: 9.56 र 0.34]

(ङ)

X	40 – 44	44 – 48	48 – 52	52 – 56	56 – 60
f	10	8	7	3	2

[उत्तर: 3.3 र 0.071]

8.3 स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation)

तथ्याङ्कशास्त्रमा सङ्कलित तथ्याङ्कहरूको विश्लेषणमा विचलन विधि व्यापक मात्रामा प्रयोग हुन्छ। त्यसमा पनि विचलन मापनका विभिन्न विधिहरू मध्ये स्तरीय भिन्नताबाट विचलन मापन प्रचलित एवम् सर्वश्रेष्ठ विधि मानिन्छ। विचलन मापनका अन्य विधिहरूमा भएका दोषहरूबाट मुक्त हुने भएकोले यो विधि बढी प्रचलित भएको हो।

कुनै श्रेणीका विभिन्न पदहरूको समानान्तर मध्यकबाट लिइएका विचलनहरूको वर्गको समानान्तर मध्यकको वर्ग मूललाई स्तरीय विचलन वा मानक विचलन (Standard Deviation) भनिन्छ। अर्थात् कुनै पनि दिइएको श्रेणीको अङ्कगणितीय मध्यकबाट विभिन्न पद मानका विचलनका वर्गहरूको औसतको वर्ग मूल नै उक्त श्रेणीको स्तरीय विचलन हो। स्तरीय विचलन मध्यकबाट गणना गरिन्छ। यसले दिइएको श्रेणीका पदमान वा पदमूल्यहरू औसतबाट कति छरिएर रहेका छन् भन्ने कुराको गणना गर्दछ। यसलाई साङ्केतिक रूपमा Greek भाषाको सिग्मा (σ) (Sigma) अक्षरले जनाइन्छ। यसलाई सङ्क्षेपमा S.D. पनि लेखिन्छ।

स्तरीय भिन्नताको अबधारणा काल्स पिपर्सन, (1823) ले ल्याएका हुन्। विचरणशीलताको भिन्नताले तथ्याङ्कको वितरणको एकरूपता (Consistency) को मात्रा निर्धारण गर्दछ। स्तरीय भिन्नता जति सानो हुन्छ। त्यति नै एकरूपताको मात्रा अधिक हुन्छ। त्यसैले स्तरीय भिन्नताले कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा मध्यकले कति राम्रोसँग तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गर्न सक्छ भन्ने बताउँछ।

वैयक्तिक र खण्डित श्रेणीको स्तरीय भिन्नताको गणना कक्षा ९ मा अध्ययन अध्यापन गरिसकिएको हुँदा यहाँ अविच्छिन्न श्रेणीका स्तरीय भिन्नताको मात्र गणना गरिने छ।

8.3.1 निरन्तर वा अविच्छिन्न श्रेणीको स्तरीय भिन्नता (Continuous Series of Standard Deviation)

अविच्छिन्न श्रेणीमा स्तरीय भिन्नताको मापनका तीनओटा प्रचलित विधिहरू छन्:

(क) वास्तविक मध्यक विधि (Actual Mean Method)

(ख) अनुमानित मध्यक विधि (Assumed Mean Method)

(ग) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

(क) वास्तविक मध्यक विधि (Actual Mean Method)

स्तरीय भिन्नता मापनको यस विधिलाई प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) पनि भनिन्छ । अङ्कगणितीय मध्यकको मान पूर्णाङ्क (Whole Number) भएको अवस्थामा यो विधिबाट स्तरीय विचलन मापन वा गणना गर्न सहज र सजिलो हुन्छ। यो विधिबाट स्तरीय विचलन (S.D.) गणना गर्न निम्न लिखित चरणहरू अपनाइन्छ :

i. सर्वप्रथम अङ्कगणितीय मध्यक पत्ता लगाउने।

ii. अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न $\overline{x} = \frac{\Sigma fm}{N}$ सूत्र प्रयोग गर्ने,

जहाँ, $\Sigma f = N$ = कुल पदहरूको सङ्ख्या

Σfm = आवृत्ति/बारम्बारता र मध्यमानको गुणन फलको योग/जोड

m = श्रेणीको मध्यमान

$\overline{x}$ = अङ्क गणितीय मध्यकको सङ्केत, एक्स बार

iii. प्रत्येक मध्यमान (m) र मध्यक ($\overline{x}$) बिचको फरक/अन्तर निकाल्ने अर्थात $|m - \overline{x}|$ को मान निकाल्ने,

iv. सबै विचलन (d) लाई वर्ग (d^2) गरेर तिनीहरूको योग $\Sigma d^2 = \Sigma x^2$ निकाल्ने,

v. बारम्बारता (f) र d^2 गुणन गर्ने अर्थात fd^2 निकाल्ने,

vi. fd^2 को योग/जोड Σfd^2 निकाल्ने,

vii. स्तरीय भिन्नता निकाल्न, $S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$ सूत्र प्रयोग गर्ने

अथवा σ (Sigma) $= \sqrt{\frac{\Sigma f(m - \overline{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

यसलाई स्तरीय भिन्नता मापन वा गणना गर्ने प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) भनिन्छ।

8.3.2 स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (Coefficient Standard Deviation)

स्तरीय भिन्नता (S.D.) विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो भने स्तरीय भिन्नतामा आधारित तुलनात्मक मापन स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क हो । दुई वा दुई भन्दा बढी तथ्याङ्कहरूको विविधता वा एकरूपता तुलना गर्न स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क प्रयोग गरिन्छ । स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउन तल दिइएको सूत्र प्रयोग गरिन्छ।

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क = $\frac{\text{स्तरीय भिन्नता}}{\text{मध्यक}}$ अथवा S.D. को गुणाङ्क = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ हुन्छ।

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कको मान जति सानो हुन्छ। त्यति नै बढी तथ्याङ्कमा एकरूपता वा स्थिरता वा कम विधिता भएको मानिन्छ । त्यसको विपरित स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क ठुलो भएमा तथ्याङ्कमा एकरूपता नभएको वा बढी विविधता युक्त भएको जनाउँछ। त्यसैले विभिन्न तथ्याङ्कहरूको तुलनात्मक अध्ययन तथा विश्लेषण गर्दा स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क सानो भएको राम्रो मानिन्छ।

उदाहरणहरू

5. तल दिइएको तथ्याङ्कबाट वास्तविक मध्यकबाट स्तरीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस्।

वर्गान्तर (X)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24
बारम्बारता (f)	7	7	10	15	7	6

यहाँ, वास्तविक मध्यकबाट स्तरीय भिन्नता र त्यसको गुणाङ्क निकाल्दा, सर्वप्रथम दिइएको तथ्याङ्कबाट वास्तविक मध्यक निकाल्ने

X	मध्य मान (m)	बारम्बारता (f)	fm
0 – 4	2	7	14
4 – 8	6	7	42
8 – 12	10	10	100
12 – 16	14	15	210
16 – 20	18	7	126
20 – 24	22	6	132
		$\Sigma f = N = 52$	$\Sigma fm = 624$

″ मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fm}{N}$

$= \frac{624}{52} = 12$

X	मध्य मान (m)	$d = m - \bar{x}$	d^2	f	fd^2
0 – 4	2	2 – 12 = –10	100	7	700
4 – 8	6	–6	036	7	252
8 – 12	10	–2	004	10	040
12 – 16	14	2	004	15	060
16 – 20	18	6	036	7	252
20 – 24	22	10	100	6	600
				52	$\Sigma fd^2 = 1904$

स्तरीय भिन्नता (S.D.) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{1904}{52}}$

$= 6.05$

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

$= \frac{6.05}{12}$

$= 0.504$

″ विचरणशीलताको गुणाङ्क $= \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{6.04}{12} \times 100\right)\%$

$= 50.40\%$

ख. अनुमानित मध्यक विधि (Assumed Mean Method)

यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्ने विधिलाई छोटकरी विधि (Short - Cut Method) पनि भनिन्छ । अथवा यसलाई कल्पित वा काल्पनिक मध्यक पनि भनिन्छ । वास्तविक मध्यकबाट स्तरीय भिन्नता गणना गर्न कठिन र बढी समय लाग्ने हुन्छ । त्यसैले गणना प्रक्रिया सरल बनाउन काल्पनिक मध्यक विधिबाट नै स्तरीय भिन्नता मापन गर्ने प्रचलन बढ्दो छ। मध्यकको नजिक पर्ने कुनै एउटा अङ्कलाई मध्यक मानेर स्तरीय भिन्नता निकाल्दा सजिलो हुन्छ। यस विधिबाट स्तरीय भिन्नता निकाल्न निम्नलिखित चरणहरू अपनाइनछ।

i. सर्वप्रथम काल्पनिक वा अनुमानित मध्यक पत्ता लगाउने जसलाई A ले सङ्केत गरिन्छ।

ii. प्रत्येक श्रेणीका वर्गान्तरको मध्यमान (m) निकाल्ने,

iii. प्रत्येक मध्यमान (m) बाट अनुमानित मध्यक (A) घटाइ अर्थात $d = (m - A)$ को मान निकाल्ने,

iv. मान d को वर्ग (d^2) पत्ता लगाउने,

v. प्रत्येक श्रेणीमा बारम्बारता f र d को गुणन फल निकाल्ने,

vi. प्रत्येक श्रेणीमा बारम्बारता f र d^2 को गुणन फल निकाल्ने,

vii. स्तरीय भिन्नता (S.D.) = $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$ सूत्र प्रयोग गर्ने,

अथवा $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

जहाँ $\Sigma f = N$ = बारम्बारताको योगफल

6. अनुमानित मध्यक विधिद्वारा स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्नुहोस्।

प्राप्ताङ्क (X)	**10 – 20**	**20 – 30**	**30 – 40**	**40 – 50**	**50 – 60**	**60 – 70**
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	**2**	**4**	**8**	**10**	**12**	**4**

यहाँ, अनुमानित वा कल्पित मध्यक विधिद्वारा स्तरीय भिन्नता र यसको गुणाङ्क निकाल्न निम्नानुसारको तालिका बनाउनुपर्दछ।

अनुमानित मध्यक (A) = 45 मान्दा

X	f	m	$d = m - A$	fd	d^2	fd^2
10 – 20	2	15	–30	–60	900	1800

20 – 30	4	25	–20	–80	400	1600
30 – 40	8	35	–10	–80	100	800
40 – 50	10	45	0	0	0	0
50 – 60	12	55	10	120	100	1200
60 – 70	4	65	20	80	400	1600
	40			–20		7000

तालिकाबाट

$\Sigma f = N = 40, \quad \Sigma fd = -20, \quad \Sigma fd^2 = 7000, \quad A = 45$

∴ मध्यक $(\overline{x}) = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$= 45 - \frac{20}{40} \quad = 44.5$

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{7000}{40} - \left(\frac{-20}{40}\right)^2}$

$= \sqrt{175 - 0.25}$

$= 13.2193$

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (C.S.D.) $= \frac{\sigma}{\overline{x}}$

$= \frac{13.2193}{44.5}$

$= 0.2971$

ग. पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

पद विचलन विधिद्वारा स्तरीय भिन्नता विचलन मापनमा निम्नानुसारको चरणहरू अपनाइन्छ :

i. उपलब्ध तथ्याङ्कको प्रकृति (Nature) अनुसार अनुमान गरी काल्पनिक वा अनुमानित मध्यक (Assumed Mean) A पत्ता लगाउने,

ii. प्रत्येक श्रेणीबाट मध्यमान (m) निकाल्ने,

iii. प्रत्येक मध्यमान (m) बाट अनुमानित मध्यक (A) घटाएर $d = (m - A)$ विचलन वा फरक निकाल्ने,

iv. विचलन (d) लाई वर्गान्तरको आकारको आधारमा आकार (Scale) h ले भाग गरी पद विचलन (d') निकाल्ने,

v. पद विचलन (d') लाई सम्बन्धित बारम्बारता f ले गुणन गरी fd' को गुणन फल निकाल्ने,

vi. प्रत्येक पद विचलन (d') लाई वर्ग (Square) गरेर त्यसको सम्बन्धित आवृत्ति/बारम्बारता (f) ले गुणन गरी fd' को गुणन फल निकाल्ने,

vii. अन्तमा स्तरीय भिन्नता गणना गर्न निम्न लिखित सूत्र प्रयोग गर्ने

$$\text{S.D. } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2}$$

जहाँ $d' = \frac{m - A}{h}$ र

h = वर्गान्तरको आकार (Size of Class Interval)

स्तरीय भिन्नताका गुण र अवगुणहरू (Merits and Demerits of Standard Deviation)

स्तरीय भिन्नताका गुणहरू (Merits of Standard Deviation):

- यसको परिभाषा स्पष्ट र सबै अवलोकनहरूमा आधारित हुन्छन्।
- अवलोकन वा पदहरूको विचलन (Fluctuation) बाट कम प्रभावित हुन्छ।
- विस्तार, चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नताहरूमा पाइने अवगुणहरूबाट मुक्त हुन्छ।
- यो विचलन मापन/गणना गर्ने सर्वोत्तम विधि हो।
- यसलाई प्रायः सबै क्षेत्रका अध्ययन अनुसन्धानमा प्रयोग गर्न सकिन्छ।
- तुलनात्मक अध्ययनलाई सहजीकरण गर्न सम्भव बनाउँछ।

स्तरीय भिन्नताका अवगुणहरू (Demerits of Standard Deviation):

- विचलन मापनको यो विधि तुलनात्मक रुपमा कठिन छ।

7. **काठमाडौँ उपत्यकाको कुनै एउटा वडाको आर्थिक सर्वेक्षणमा प्राप्त वार्षिक आय (हजारमा) दिइएको छ :**

आम्दानी (X) (हजार रुपियाँमा)	**20 – 40**	**40 – 60**	**60 – 80**	**80 – 100**	**100 – 120**
मानिसहरूको सङ्ख्या (f)	**13**	**12**	**8**	**9**	**8**

यहाँ,

अनुमानित मध्यक (A) = 70 र h = 20 (वर्गान्तरको आकार) मान्दा

X	मध्यमान (m)	f	$d' = \frac{m-A}{h}$	fd'	d'^2	fd'^2
20 – 40	30	13	–2	–26	4	52
40 – 60	50	12	–1	–12	1	12
60 – 80	70	8	0	0	0	0
80 – 100	90	9	1	9	1	9
100 – 120	110	8	2	18	4	32
		50		$\Sigma fd' = -11$		$\Sigma fd'^2 = 105$

माथिको तालिकाबाट

$\Sigma f = N = 50, \quad \Sigma fd' = -11, \quad \Sigma fd'^2 = 105$

″ मध्यक $(\bar{x}) = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times h$

$$= 70 + \frac{(-11)}{50} \times 20 \quad = 70 - 4.4 \quad = 65.6$$

अतः औसत वार्षिक आय $(\bar{x})$ = रु.(65.6 × 1000) = रु.65600

स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times h$

$$= \sqrt{\frac{105}{50} - \left(\frac{-11}{50}\right)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{2.1 - 0.22} \times 20$$

$$= \sqrt{1.88} \times 20 \quad = 27.442$$

स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क (C.S.D.) $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

$= \frac{27.442}{65.6} \quad = 0.4183$

″ C.V. $= \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\right)\%$

$= (0.418 \times 100)\%$

$= 41.83\%$

8.3.3 विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of Variation)

स्तरीय विचलन विचरणशीलताको निरपेक्ष मान हो । स्तरीय विचलनसँग सम्बन्धित विचरणशीलताको सापेक्षित मानलाई नै विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of Variation) भनिन्छ। तथ्याङ्कका दुई वा दुईभन्दा बढी श्रेणीहरूको विचरण (Variation) लाई तुलना गर्न विचरणको गुणाङ्कको प्रयोग गरिन्छ।

स्तरीय विचलनको गुणाङ्क (Coefficient of Standard Deviation) ले धेरै सानो मान दिने भएकाले यो मान त्यति महत्वपूर्ण (Significant) मानिन्दैन । त्यसैले यसलाई प्रभावकारी र महत्वपूर्ण बनाउन विचरणको गुणाङ्क (Coefficient of Variation) को प्रयोग गरिन्छ । यसलाई निम्नलिखित सूत्रबाट मापन गरिन्छ।

विचरणको गुणाङ्क (Coefficient of Variation) $= \left(\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\right)\%$

अतः स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कलाई 100 ले गुणन गर्दा विचरणशीलताको गुणाङ्क (Coefficient of Variation) आउँछ। यसलाई छोटकरीमा C.V. पनि लेखिन्छ।

″ $\boxed{\textbf{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%}$

यसरी विचरणको गुणाङ्कलाई प्रतिशतमा प्रस्तुत गर्दा मान ठूलो देखिन्छ र तुलना गर्न सजिलो हुन्छ। दुई वा दुईभन्दा बढी श्रेणीहरूबिचको विचरण (Variability) वा एकरूपता (Consistency) वा स्थिरता (Stability) मापन गर्न यसको प्रयोग गरिन्छ। यसलाई Coefficient of Variation पनि भनिन्छ। C.V. को मान जति ठुलो वा बढी हुन्छ। श्रेणीमा उति नै स्थिरता र एकरुपताको कमी हुन्छ। C.V. को मान जति कम वा सानो हुन्छ। श्रेणीमा त्यति नै बढी स्थिरता र एकरुपता हुन्छ।

8. एउटा विद्यालयमा कार्यरत शिक्षकहरूको मासिक तलब (रु. हजारमा) तल दिइएको छ । सो तथ्याङ्कका आधारमा मध्यक, स्तरीय भिन्नता र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

मासिक तलब (रु.000) (X)	**28 – 32**	**32 – 36**	**36 – 40**	**40 – 44**	**44 – 48**	**48 – 52**
शिक्षकहरूको सङ्ख्या (f)	**29**	**21**	**15**	**9**	**5**	**1**

यहाँ,

तथ्याङ्कको प्रकृति हेर्दा अनुमानित मध्यक (A) = 34 र h = 4 मान्दा उपयुक्त देखिन्छ ।

X	शिक्षक सङ्ख्या	मध्यमान (m)	$d' = \frac{m - A}{h}$	fd'	d'^2	fd'^2
28 – 32	29	30	–1	–29	1	29
32 – 36	21	34	0	0	0	0
36 – 40	15	38	1	15	1	15
40 – 44	9	42	2	18	4	36
44 – 48	5	46	3	15	9	45
48 – 52	1	50	4	4	16	16
	80			23		141

माथिको तालिकाबाट

$\Sigma f = N = 80$, $A = 34$, $h = 4$, $\Sigma fd' = 23$ र $\Sigma fd'^2 = 141$

i. मध्यक $(\overline{x}) = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times h$

$$= 34 + \frac{23}{80} \times 4 = 35.15$$

" औसत मासिक तलब $(\overline{x})$ = रु.35150

ii. स्तरीय भिन्नता (σ) $= \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times h$

$= \sqrt{\frac{141}{80} - \left(\frac{23}{80}\right)^2} \times 4$

$= \sqrt{1.7625 - 0.0827} \times 4$

$= \sqrt{1.6798} \times 4$

$= 1.2961 \times 4 \quad = 5.1844$

iii. विचरणशीलतको गुणाङ्क C.V. $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

$= \frac{5.1844}{35.15} \times 100\%$

$= 14.75\%$

अभ्यास 8.3

1. (क) स्तरीय भिन्नताको परिचय दिनुहोस् ।

   (ख) स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्कको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (ग) विचरणशीलताको गुणाङ्कको परिभाषा लेख्नुहोस् ।

   (घ) स्तरीय भिन्नता मापनका चरणहरू लेख्नुहोस् ।

   (ङ) स्तरीय भिन्नताका गुणहरू लेख्नुहोस् ।

2. तल दिइएका तथ्याङ्कको आधारमा स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

   (क) मध्यक $(\bar{x}) = 43.16$ र स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 15.44$

   [उत्तर : 0.3577 र 35.77%]

   (ख) मध्यक $(\bar{x}) = 67.3$ र स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 2.93$

   [उत्तर : 0.0.43536 र 4.3536%]

   (ग) मध्यक $(\bar{x}) = 28.6$ र स्तरीय भिन्नता $(\sigma) = 12.3$

   [उत्तर : 0..43 र 43.0%]

(घ) मध्यक ($\bar{x}$) = 40.59 र स्तरीय भिन्नता (σ) = 14.3

[उत्तर : 0.3523 र 35.23%]

(ङ) मध्यक ($\bar{x}$) = 65.2 र स्तरीय भिन्नता (σ) = 32.28

[उत्तर : 0.4923 र 49.23%]

3. तल दिइएका तथ्याङ्कको आधारमा मध्यक, स्तरीय भिन्नता, स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क र विचरणशीलताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) $\Sigma f = 20, \Sigma fd = 7, A = 11$ र $\Sigma fd^2 = 217$

[उत्तर : $\bar{x}$ = 11.35, S.D. = 3.2, C.S.D. = 0.2819 र C.V. = 28.19%]

(ख) $\Sigma f = 28, \Sigma fd = 20, A = 35$ र $\Sigma fd^2 = 3600$

[उत्तर : $\bar{x}$ = 34.29, S.D. = 11.316, C.S.D. = 0.3301 र C.V. = 33.01%]

(ग) $\Sigma f = 25, \Sigma fd = -45, A = 35$ र $\Sigma fd^2 = 1225$

[उत्तर : $\bar{x}$ = 33.2, S.D. = 6.765, C.S.D. = 0.2838 र C.V. = 20.38%]

(घ) $\Sigma f = 29, \Sigma fd' = -4, A = 25, h = 10$ र $\Sigma fd'^2 = 28$

[उत्तर : $\bar{x}$ = 23.6207, S.D. = 9.7288, C.S.D. = 0.4119 र C.V. = 33.041.191%]

(ङ) $\Sigma f = 68, \Sigma fd' = -30, A = 45, h = 10$ र $\Sigma fd'^2 = 152$

[उत्तर : $\bar{x}$ = 40.59, S.D. = 14.3, C.S.D. = 0.3523 र C.V. = 35.23%]

4. तल दिइएको तथ्याङ्कको आधारमा स्तरीय भिन्नता र स्तरीय भिन्नताको गुणाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)

प्राप्ताङ्क (X)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	3	5	12	8	5	2

[उत्तर: 12.89 र 0.2642]

(ख)

आम्दानी (X)	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 120
कामदार सङ्ख्या (f)	6	7	8	9	12	8

[उत्तर: 32.38 र 0.4966]

(ग)

प्राप्ताङ्क (X)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	10	12	24	32	29	11	3	1

[उत्तर: 16.06 र 0.4449]

(घ)

X	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f	15	20	30	45	12	8

[उत्तर: 11.5 र 0.0.4063]

(ङ)

आम्दानी (X)	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24
कामदार सङ्ख्या (f)	7	7	10	15	7	6

[उत्तर: 6.05 र 0.5042]

5. कक्षा 10 का 40 जना विद्यार्थीहरूले गणित विषयको 100 पूर्णाङ्कको परीक्षामा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कको विवरण तल दिइएको छ।

X :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f :	4	10	12	8	6

माथिको तथ्याङ्कबाट (क) वास्तविक मध्यक विधि

(ख) अनुमानित मध्यक विधि र

(ग) पद विचलन विधिद्वारा

स्तरीय भिन्नताको गणना पत्ता लगाउनुहोस्। साथै स्तरीय भिन्नता र विचरणशीलताको गुणाङ्क पनि निकाल्नुहोस्।

[उत्तर : S.D. = 12.0312, .S.D. को गुणाङ्क = 0.3389 र C.V. = 33.89%]