शिक्षक स्वाध्ययन सामग्री

(गणित, आधारभूत तह, कक्षा ६-८)

लेखन समूह

डा. विष्णु खनाल

राजेन्द्र बसेल

राजेश श्रेष्ठ

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

२०७५

प्रकाशक :	नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

संस्करण :	वि.सं. २०७५

यस पुस्तकका सम्बन्धमा कुनै सुझाव भए पाठ्यक्रम विकास केन्द्रमा पठाइ दिनुहुन अनुरोध छ ।

वेबसाइट :	www.moecdc.gov.np
फोन :	०१-६६३०५८८, ०१-५६३९१२२, ०१-६६३००८८, ०१-६६३५०४६
फ्याक्स :	०१-६६३०७९७
नोटिस बोर्ड :	१६१८०१६६३०७९७

हाम्रो भनाइ

शिक्षालाई उद्देश्यमूलक, व्यावहारिक, समसामयिक र रोजगारमूलक बनाउन विभिन्न समयमा पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक, विकास, तथा परिमार्जन गर्ने कार्यलाई निरन्तरता दिइँदै आएको छ। पाठ्यपुस्तकलाई कार्यरूप दिन शिक्षक निर्देशिका तथा शिक्षक स्वाध्ययन सामग्री विकास गरिन्छ । प्रायोगिक ढङ्गले गणितीय विषयवस्तुको सिकाइ सहजीकरणका लागि शिक्षकमा गणितीय ज्ञान, सिपको दायरा फराकिलो बनाउन शिक्षक स्वाध्ययन साम**ग्री** महत्त्वपूर्ण मानिन्छ । विद्यार्थीमा राष्ट्रियता, राष्ट्रिय एकता र लोकतान्त्रिक संस्कारको भावना पैदा गराई नैतिकवान्, अनुशासन र स्वावलम्बन, सिर्जनशील, चिन्तनशील समावेशी समाज निर्माणमा योगदान दिन सक्ने भाषिक तथा गणितीय सिप, विज्ञान, सूचना तथा सञ्चार प्रविधि, वातावरण, स्वास्थ्य र जनसङ्ख्या सम्बन्धी ज्ञान र जीवनोपयोगी सिपको विकास गराउनु जरुरी छ। उनीहरूमा कला र सौन्दर्य, मानवीय मूल्य मान्यता, आदर्श र वैशिष्ट्यहरूको संरक्षण तथा संवर्धनप्रतिको भाव जगाउन आवश्यक छ । समतामूलक समाजको निर्माणमा सहयोग पुऱ्याउन उनीहरूमा विभिन्न जातजाति, लिङ्ग, अपाङ्गता, भाषा, धर्म, संस्कृति र क्षेत्रप्रति समभाव जगाउनु र मानव अधिकार तथा सामाजिक मूल्य मान्यताप्रति सचेत भई जिम्मेवारीपूर्ण आचरणको विकास गराउनु पनि आजको आवश्यकता बनेको छ। आधारभूत शिक्षा पाठ्यक्रम (कक्षा ६-८), २०६९ लाई मूल आधार मानी शिक्षा सम्बन्धी विभिन्न आयोगका सुझाव, शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावकलगायत शिक्षासँग सम्बद्ध विभिन्न व्यक्ति सम्मिलित गोष्ठी, अन्तर्क्रियाका निष्कर्ष र विभिन्न विद्यालयमा परीक्षण गरी प्राप्त पृष्ठपोषणसमेतलाई समेटी तयार गरिएका पाठ्यपुस्तकका विषयवस्तुको कुशल सिकाइ सहजीकरणका लागि शिक्षकमा गणित विषय सम्बद्ध ज्ञानको क्षितिज बढाउन यो शिक्षक स्वाध्ययन सामग्री **तयार गरिएको हो ।**

यस शिक्षक स्वाध्ययन सामग्रीलाई यस स्वरूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका कार्यकारी निर्देशक कृष्णप्रसाद काप्री, उपनिर्देशक रेणुका पाण्डे, प्रा.डा. राममान श्रेष्ठ, सहप्राध्यापक लक्ष्मीनारायण यादव, सहप्राध्यापक वैकुण्ठप्रसाद खनाल, कृष्णप्रसाद पोखरेल, गोमा श्रेष्ठ, राजकुमार माथेमा, अनिरुद्रप्रसाद न्यौपानेलगायतको विशेष योगदान रहेको छ । यसको विषयवस्तु सम्पादन हरीश पन्त, भाषा सम्पादन रजनी धिमालबाट भएको हो । यस शिक्षक स्वाध्ययन सामग्रीको विकास तथा परिमार्जन कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्दछ

शिक्षकमा गणितीय विषयवस्तुको पर्याप्त ज्ञान, सिप भएमा मात्र कक्षाकोठामा सिकाइ सहजीकरण प्रक्रिया प्रभावकारी हुन्छ । प्रायोगिक ढङ्गले गणितीय विषयवस्तुको सिकाइ सहजीकरणका लागि शिक्षकमा स्वाध्ययनको भूमिका अपरिहार्य रहन्छ । यसबाट पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गराउन मदत पुग्नुका साथै निर्माणात्मक मूल्याङ्कनका लागि समेत सहयोगी हुने अपेक्षा गरिएको छ । यस शिक्षक स्वाध्ययन साम**ग्रीलाई** सकेसम्म प्रायोगिक, क्रियाकलापमुखी, र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । यसलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकहरूको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्दछ।

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि.सं. २०७५

विषयसूची

१. गणित शिक्षाको विकास

परिचय

गणित शिक्षाको विषयमा प्रवेश गर्नुपूर्व गणितको बारेमा परिचत हुनु आवश्यक देखिन्छ । गणित कहिले र कहाँबाट सुरु भएको हो यकिनसाथ भन्न नसकिए तापनि गणित मानव जातिको उत्पत्तिसँगै मानव सभ्यताको अभिन्न अङ्गको रूपमा रहेको देखिन्छ । मानिसहरूले उनीहरूका तत्कालीन आवश्यकता पूरा गर्न यसलाई बनाएका हुन् । मानव सभ्यताको विकासक्रमसँगै यसको सङ्गठन र स्वरूपको पनि विकास भएको पाइन्छ । ढुङ्गे युग, कृषि र पशुपालन युग अर्थात् जङ्गली सभ्यताका मानिसहरूले उनीहरूका परिवारमा भएका सदस्यहरू र जनावरहरूको सङ्ख्या थाहा पाउनको लागि गन्ती सङ्ख्या (counting numbers) को विकास गरे । यसका लागि उनीहरूले ढुङ्गा, धर्का वा लठ्ठीको प्रयोग गरे । जब समाज विकासको क्रमसँगै राज्यको स्थापना भयो, त्यसपछि जनसङ्ख्या, आकार, दुरी, समय, गन्ती आदिको बारेमा सूचना प्राप्त गर्न उन्नत गणितको आवश्यकता भयो । सभ्यताको विकासका क्रममा नयाँ आवश्यकताहरू थपिँदै गए र ती आवश्यकतालाई पूरा गर्न गणितमा भइरहेका धारणाहरू, सम्बन्धहरू तथा सिद्धान्तहरू नपुग भएपछि नयाँ नयाँ धारणा, सिद्धान्त सम्बन्धहरूको आविष्कार हुँदै गयो । यस क्रममा फरक फरक गणितीय संरचनाहरूअन्तर्गत फरक फरक उपयुक्त अपरिभाषित पदावलीहरू (undefined terms), परिभाषाहरू (definitions), स्वयंसिद्ध तथ्यहरू वा स्वीकृतिहरू (axioms or postulates) का विकास भयो । यिनै स्वीकृतिहरू र परिभाषाहरूबाट गणितीय साध्यहरूको विकास भए । उदाहरणको लागि Euclid ले एउटा गणितीय संरचनाको विकास गरी Euclidean geometry को पनि विकास गरे । प्राचीन सभ्यताहरू जस्तै : वेविलोनियन (Babylonian), इजिप्सियन (Egyptian), रोमन (Roman), ग्रीक (Greeks), अरब (Arabi) र हिन्दू (Hindus) हरूले गणितीय क्षेत्रलाई व्यापकता दिन र विकास गर्न महत्त्वपूर्ण योगदान पुऱ्याएको देखिन्छ । महान् गणितिज्ञहरू Pythagoras, Euclid, Plato, Aristotle, Ptolemy, Newton, Cantor, Gauss आदिले यसको विकासमा महत्त्वपूर्ण योगदान दिएका छन् ।

दैनिक व्यवहारमा गणितको प्रयोग निकै भइरहेको हुन्छ । यसलाई केही मानिसहरूले पढ्न आनन्ददायक मान्छन् भने कसैले यसलाई पढ्न त्यति रुचि राख्दैनन् । साथै गाह्रो पनि मान्दछन् । सामान्यतया गणित भन्नाले सङ्ख्या र तिनीहरूबिच गरिने अङ्क गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ, गुणन, भाग आदि भन्ने गरिन्छ तर गणित त्यतिमा मात्रै सीमित हुन सक्दैन । गणित मानव जीवन र मस्तिष्कको सङ्ख्या र समाधानको अङ्ग हो । Locke का अनुसार गणित एउटा सिकाइ हो, जो तर्कको बानीद्वारा मस्तिष्कमा स्थायी हुन्छ । (Mathematics is a way to settle in the mind a habit of reasoning) गणितलाई विभिन्न गणितज्ञहरूले विभिन्न तरिकाले परिभाषित गरेका छन् । सारमा गणितले Physical science र Social science को क्षेत्रमा सहायता प्रदान गर्दछ । Physical science अन्तर्गत Physics, Chemistry, Biology, Engineering, Medicine आदिमा र Social Science अन्तर्गत Economics, Psychology, Statistics, Management आदिमा गणितले सहयोग गरिरहेको हुन्छ । अतः गणित मानिसका लागि अति नै आवश्यक छ भन्न सकिन्छ ।

विभिन्न विषयहरूमध्ये गणित एक यस्तो विषय हो जुन विद्यालय र कलेजका पाठ्यक्रममा समावेश गरिएको छ । वैज्ञानिक विकास र आधुनिक प्रविधिमा गणित आधारशीलाको रूपमा रहेको छ । वाणिज्य र उद्योगमा पनि गणितको प्रयोग भएको हुन्छ । सञ्चार जगत्मा पनि गणितलाई महत्त्वपूर्ण साधनको रूपमा प्रयोग गरिन्छ । अझ विस्तृत रूपमा भन्नुपर्दा गणितलाई भाषा, साधन र माध्यमको रूपमा प्रयोग गरी चिन्तन, सिप विकास, विषयगत विधाको विकास र तार्किक

विज्ञानको विकास गरिन्छ । गणितद्वारा अमूर्त धारणाको व्याख्या गरिन्छ । यसमा कुनै किसिमको सन्देह हुँदैन । गणितीय ज्ञान संसारभर एकनासको हुन्छ । अतः यी कारणहरूले गर्दा गणितको शिक्षण आवश्यक देखिन्छ ।

गणित शिक्षाको एउटा अभिन्न अङ्गको रूपमा रहेको छ । गणित आफैँमा शुद्ध विज्ञानको रूपमा रहेको छ । गणितले शिक्षाका सबै दृष्टिकोणलाई जोड्ने काम पनि गरेको छ । गणित शिक्षाले गणितको समग्र शैक्षिक प्रक्रियाको बारेमा अध्ययन, अनुसन्धान र व्याख्या गर्दछ । गणित शिक्षाले विशेष गरी गणितको दार्शनिक, मनोवैज्ञानिक र समाजशास्त्रीय पक्षलाई व्याख्या गर्दछ । सन् १९६९ को August मा Lyons मा भएको First International Congress of Mathematical Education नै गणित शिक्षालाई एउटा विधा (Discipline) को रूपमा स्थापित गर्न कोशे ढुङ्गा सावित भयो ।

गणित शिक्षा एउटा विधा हो, जसले गणितलाई शिक्षणसँग गाँसेर वा शिक्षणको दृष्टिकोणबाट व्याख्या गर्ने प्रयास गर्दछ । जुन विद्यालय तहदेखि विश्वविद्यालय तहसम्म हुन सक्दछ । बालबालिलाई कसरी सजिलैसँग गणित सिकाउने ? गणित शिक्षणमा कुन विधि अपनाउने ? छिटो सिकाइ क्षमता भएका र ढिलो सिकाइ क्षमता भएका बालबालिकलाई कसरी गणित सिकाउने ? जस्ता कुरालाई गणित शिक्षाले व्याख्या तथा विश्लेषण गर्दछ । गणित शिक्षाले एउटा व्यक्तिको शिक्षामा गणितको के स्थान छ ? कुन तहमा कस्तो गणित सिकाउने ? समाजको आवश्यकता के हो ? वर्तमान अवस्थामा कस्तो शिक्षण विधि अपनाउन सकिन्छ ? कस्ता गणितीय सामग्रीको विकास र प्रयोग गरी गणितीय धारणाहरू प्रस्ट्याउन सकिन्छ ? विद्यालय र विश्वविद्यालय तहको पाठ्यक्रम कस्तो हुनुपर्छ ? गणित शिक्षण सिकाइ एवम् प्रविधिमा के कस्ता समस्याहरू छन् र यिनीहरूलाई कसरी हटाउन सकिन्छ ? गणित शिक्षा सबै व्यक्तिका लागि आवश्यक छ कि छैन ? गणितको सांस्कृतिक मान्यता के हो ? गणितको दर्सन के हो ? गणितको व्यापकता र सुन्दरता प्रति सजग गराउने जस्ता कार्यहरू गर्दछ । यी र यस्ता प्रश्नहरूको उत्तर खोज्ने तथा त्यसको उपयोगिता, औचित्य प्रस्ट्याउने शिक्षा नै गणित शिक्षा हो । यी कुराहरूसँग साक्षात्कार हुनु र त्यसको अध्ययन, अनुसन्धान र अध्यापनमा लाग्नु कुनै पनि गणित शिक्षकको लागि महत्त्वपूर्ण पक्ष हुन जान्छ । तसर्थ एउटा गणित शिक्षकले गणितीय विषयवस्तुमा दक्ष हुनु त जरुरी छ तर त्यति मात्र भएर हुँदैन । कसरी उक्त गणितीय ज्ञान बालबालिकालाई प्रदान गर्ने भन्ने विषयमा ध्यान दिनुआवश्यक हुन्छ ।

नेपालमा पनि गणित शिक्षाको विकासको इतिहास वैदिक कालदेखि नै रहेको पाइन्छ । विशेष गरी नेपालमा गणित पाठ्यक्रमको विकासलाई वैदिक काल, प्राचीन कालदेखि राणा काल, सन् १९५० देखि १९७० र राष्ट्रिय शिक्षा पद्धतिको योजनादेखि हालसम्ममा उल्लेख गरेको पाइन्छ । वैदिक कालमा गुरुकुल प्रणालीमा शिक्षा दिइन्थ्यो । त्यस समयमा Mathematics लाई Ganit नामले शिक्षा दिइन्थ्यो । जसअन्तर्गत ज्योतिषशास्त्र (Astrology) र क्षेत्र गणित (Geometry) को अध्ययन अध्यापन गरिन्थ्यो ।

प्राचीन कालमा औपचारिक शिक्षा प्रणाली नभए पनि हिन्दू पण्डित र बौद्ध लामाहरूद्वारा 'रूप' (Drawing and geometry) र 'गणना' (Arithmetic) को शिक्षामार्फत गणितीय ज्ञान र सिपहरू दिइन्थ्यो । शाह वंशसम्म पनि गुरुकुलीय शिक्षा पद्धति कार्यान्वयनमा रहेको पाइन्छ । संस्कृत पाठशालामा खगोलीय गणितलाई शिक्षामा समावेश गरिएको पाइन्छ । सन् १९१० मा राणा शासनअन्तर्गत दरबार हाई स्कुलको स्थापना भएपश्चात् गणित विषयको पनि अध्यापन भएको पाइन्छ ।

सन् १९३४ मा नेपालमा पहिलो पटक मेट्रिक अर्थात् एस.एल.सी. परीक्षा भयो, जसमा ७००

पूर्णाङ्कमध्ये अनिवार्य गणित र इच्छाधीन गणित १००/१०० पूर्णाङ्कको समावेश थियो । अनिवार्य गणिततर्फ बीज गणित, अङ्क गणित र ज्यामितिको अध्यापन हुन्थ्यो भने इच्छाधीन गणितमा त्रिकोणमिति, ज्यामिति र क्षेत्रमिति समावेश थियो ।

वि.सं. २००७ (सन् १९५०) सालमा राणा शासनको अन्त्य र प्रजातन्त्रको स्थापनापछि नेपालको शिक्षा क्षेत्रमा परिवर्तनहरू हुन थाल्यो । सन् १९६२ मा शिक्षा बोर्डको स्थापना भयो । त्यसले शिक्षक तालिम केन्द्रको स्थापनामा जोड दियो । विद्यालय पाठ्यक्रममा दुवै गणितलाई समावेश गरियो । राष्ट्रिय शिक्षा पद्धतिको योजना २०२८, (NESP 1971-76) ले नेपालको गणित शिक्षाको क्षेत्रमा व्यापक परिवर्तन ल्यायो । प्राथमिक, निम्न माध्यमिक र माध्यमिक तहमा गणित शिक्षाको उद्देश्यहरू स्पष्ट रूपमा परिभाषित गरियो । प्राथमिक तहमा विद्यार्थीलाई गणितीय रूपमा साक्षर बनाउनु, निम्न माध्यमिक तहमा दैनिक जीवनमा आइपर्ने गणितीय प्रक्रिया र समस्याहरूको समाधान गर्नु र माध्यमिक तहमा विभिन्न गणितीय तथ्यहरू, नियमहरू, सूत्रहरू र गणितीय समस्याहरू समाधानमा सक्षम बनाउनु रह्यो । पाठ्यक्रममा अनिवार्य र अतिरिक्त गणितको व्यवस्था गरियो । अनिवार्य गणिततर्फ अङ्क गणित, बीज गणित र ज्यामिति समावेश गरियो भने अतिरिक्त गणितमा तथ्याङ्क शास्त्र, त्रिकोणमिति, निर्देशाङ्क ज्यामिति समावेश गरियो । तीक्ष्ण बुद्धि भएका विद्यार्थीहरूलाई उच्च शिक्षामा गणित, विज्ञान र प्रविधि अध्ययनका लागि अतिरिक्त गणितको व्यवस्था गरियो । त्यसका अलावा वाणिज्य गणित पनि समावेश गरियो । तर हाल वाणिज्य गणितलाई अनिवार्य गणितमा नै समावेश गरिएको छ ।

अन्य देशसँग तुलना गर्दा नेपालको विद्यालय तहदेखि विश्वविद्यालयहरूको पाठ्यक्रममा गणित विषयलाई राम्रो स्थान दिइएको छ । तर विद्यालय तहमा गणितलाई प्रयोगात्मक तरिकाले अध्यापन गर्ने व्यवस्थाको सुरुवात गर्न नसकेको देखिन्छ । जसले गर्दा पनि विद्यालय तहमा अध्ययन गर्ने विद्यार्थीहरूमा गणित विषयमा रुचि, दक्षता र सिपको सोचे जति सफलता हाँसिल हुन सकेको छैन । गणित विषयमा औसत सिकाइ उपलब्धि अन्य विषयको तुलनामा कम देखिन्छ । यसो हुनुमा धेरै तत्त्वहरूले प्रभाव पारेको हुन सक्छ । अनुसन्धानबाट ती तत्त्वहरूको पहिचान गरी गणित विषयमा औसत सिकाइ उपलब्धि वृद्धि गर्नु र विद्यार्थीमा गणितप्रतिको सोचाइ र रुचि बढाउने कार्य गर्नु गणित शिक्षकहरूको दायित्व हुन आउँछ । तसर्थ सबै गणित शिक्षकहरूले गणित शिक्षणको मूल उद्देश्य र कार्यहरूलाई आत्मसात् गरी गणित शिक्षण सिकाइ, अनुसन्धान र नयाँ नयाँ गणितीय अन्वेषण तथा उपलब्धिहरूको अध्ययन गरी आफूलाई शिक्षण कार्यमा समाहित गर्नु जरुरी छ । त्यसो गरियो भने नेपालमा गणित शिक्षाको भविष्य सकारात्मक रहने आशा गर्न सकिन्छ ।

२. अङ्क गणित (Arithmetic)

परिचय (Introduction)

Arithmetic शब्दको उत्पत्ति पुरानो फ्रेन्च शब्द Arithmein (गन्ती) र पछि ल्याटिन र ग्रीक शब्द Arithmos (सङ्ख्या) बाट आएको हो । यिनीहरूको शाब्दिक अर्थलाई केलाउँदा सङ्ख्याहरूको गन्ती गर्ने विषयका रूपमा अङ्क गणितलाई परिभाषित गरिएको पाइन्छ । अङ्कगणित अङ्कहरूको गुण र सम्बन्धको अध्ययन गर्ने विज्ञान हो । जुनसुकै गणितका धारणाहरूको ज्ञान पनि अङ्क गणितका उदाहरणहरूबाट दिन सकिन्छ । अङ्क गणितको सार्थक अध्ययनले गणितलाई अर्मूत तहमा लैजान आधारशीला प्रदान गर्दछ । यो धेरैजसो बीज गणित र सङ्ख्याको सिद्धान्तसँग जोडिएको हुन्छ । अङ्क गणितको सामान्यकृत रूप बीज गणित हो । तसर्थ अङ्क गणितलाई वास्तविक तथा अवास्तविक सङ्ख्या सम्बन्धी अध्ययन गर्ने गणितको रूपमा पनि परिभााषित गरिएको छ ।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि (Historical Background)

अङ्क गणितमा प्रयोग हुने जोड तथा घटाउ सम्बन्धी क्रियाको प्रयोग २,००० देखि १,८०० BC तिर अफ्रिकामा भएको पाइन्छ । समयको विकासक्रमसँगै मानिसका व्यावहारिक आधारभूत आवश्यकता पूरा गर्ने क्रममा गन्ती सङ्ख्याको विकास हुन गयो, जुन अङ्क गणित उत्पत्तिको आधार समेत बन्न पुग्यो । अङ्क गणितीय ज्ञानको पहिलो प्रमाणीकरण डाटा Babylon र Ancient Egypt को ऐतिहासिक स्मारकहरूमा तेस्रो र दोस्रो सहस्राब्दी इसामा पाइन्छ । Egyptian र Babylainan हरूले अङ्क गणितीय क्रियालाई २००० BC को शुरुमा लिखित रूपमा विकास गरेका थिए । अङ्क गणितीय विकासमा ठुलो योगदान प्राचीन युनानी गणितज्ञहरू (Greek Mathematicians) विशेष गरी पाइथागोरसको रहेको पाइन्छ । प्रसिद्ध गणितज्ञ पाइथागोरसले सङ्ख्यालाई महत्त्व दिँदै All is number भनी व्याख्या गरेका थिए । उनका अनुसार गणितका सबै जसो विधाहरूको आधारशीला नै अङ्कगणित हो । मध्य युगमा अङ्क गणितको मुख्य क्षेत्र व्यापार र अनुमानित गणना भयो । आधुनिक युगमा सबैभन्दा पहिला भारत र इस्लामिक देशहरूमा विकसित भयो । अङ्कगणितको विकासमा भारतका गणितज्ञ Srinivasa Ramanujan को महत्त्वपूर्ण भूमिका रहेको छ । त्यसपछि पश्चिमी यूरोपका देशहरूमा यसको विकास हुँदै गयो । सत्रौं शताब्दीमा खगोलविज्ञानको अध्ययन र कठिन व्यापारीक गणना गर्नुपर्ने आवश्यकताले अङ्क गणितीय गणना गर्ने तरिकामा थप चुनौती देखा पर्न थाल्यो । यसले अङ्क गणितीय ज्ञान विकास गर्न उत्प्रेरित गऱ्यो । प्रारम्भमा तथ्याङ्क शास्त्रमा प्रयोग हुने टेली बारको प्रयोगबाट जोड तथा घटाउको ज्ञान दिन सुरु भएको पाइन्छ । क्रमशः मानवीय जीवनमा विभिन्न गतिविधि र कार्यको जटिलतासँगै अङ्क गणितमा थप आवश्यकताको महसुस भयो र त्यसअनुसार अङ्क गणितकमा नयाँ नयाँ अवधारणाको विकास भयो ।

सङ्ख्या र सङ्ख्या प्रणालीको विकास (Number and Development of Number System)

मानव सभ्यताको विकाससँगसँगै सङ्ख्याको अवधारणा र गन्ती प्रक्रियाको विकास भएको अनुमान गरिन्छ । समयको विकासक्रमसँगै मानिसका सीमित आवश्यकताहरू असीमित रूपमा रूपान्तरण हुँदै जाने क्रममा गन्ती सङ्ख्याको विकास हुन गयो । आदिम समाजका मानिसहरू पनि गन्तीको आदिम तरिकाद्वारा नै समूहमा भएका सदस्य सङ्ख्या पत्ता लगाउनुका साथै धेरै वा थोरै तुलना गर्ने गर्दथे । प्राचीन कालमा गन्ती सङ्ख्या जनाउनको लागि काठ र ढुङ्गाका टुक्राहरू प्रयोग गरिन्थ्यो । प्राचीन कालका मानिसहरूमा सङ्ख्याको ज्ञानको विकास समूह र समूहका सदस्यहरूको एक एक सङ्गतता (One to one correspondence) को अभ्यासबाट भएको पाइन्छ । जस्तैः घरपालुवा जनावरहरू चराउन लैजाने क्रममा गोठबाट एउटा एउटा पशु बाहिर पठाउँदा प्रत्येक पशुका लागि

एउटा एउटा ढुङ्गा झोलामा राखेर पोको पार्ने र साँझ गोठमा हुल्ने बेलामा पनि प्रत्येक पशुलाईभित्र पठाउँदा एउटा एउटा ढुङ्गा बाहिर निकाल्थे । सबै पशु गोठमा हुलीसकेपछि झोलामा एउटा पनि ढुङ्गा बाँकी रहेन भने सबै पशुहरू फर्के भन्ने थाहा पाउँथे । तसर्थ त्यस समयका मानिसहरू पनि समूहमा भएमा सदस्यहरूको गन्तीको मात्रा (एउटा, दुई ओटा, तिन ओटा आदि) को भावात्मक पक्षमा देखिन्छन् । मानव सभ्यता ढुङ्गे युगबाट कृषि युगमा प्रवेश गरेसँगै आफ्ना वस्तुभाउहरू गणनाको लागि जनावरको ढाडमा रङ लगाउने वा चित्र कोर्ने कार्यबाट आफ्ना वस्तुभाउको गणना गर्ने गरिएको पाइन्छ ।

संसारका विभिन्न सभ्यतामा सङ्ख्यालाई जनाउने सङ्केतहरू फरक फरक थिए । जसले गर्दा ती सङ्केतबाट सङ्ख्या निर्माणको पद्धति र ती सङ्ख्याहरूमा क्रिया गर्ने तरिका समेत फरक फरक भएको पाइन्छ । जोडमा आधारित, गुणनमा आधारित, स्थानमानमा आधारित र दस बाहेक अन्य आधार भएका विभिन्न प्रणालीहरू (आधार २ र आधार ५) प्राचीन कालदेखि नै प्रयोगमा रहेको देखिन्छ । प्राचीन सभ्यताका सङ्ख्याङ्कन पद्धतिमा इजिप्सियन पद्धति पुरानो पद्धति हो । पछि आएर रोमनहरूले यही इजिप्सियन पद्धतिलाई सुधार गरी प्रयोग गरेको पाइन्छ । प्राचीन चीनमा गुणन पद्धति अपनाएको पाइन्छ भने स्थानमानको सबैभन्दा पुरानो सङ्ख्याङ्कन पद्धति बेबिलोनियन पद्धति हो । तसर्थ सङ्ख्याङ्कन प्रणालीको विकासमा बेबिलोनियन, इजिप्सियन, रोमन, ग्रीक, हिन्दू तथा अरबहरूले महत्त्वपूर्ण योगदान पुऱ्याएका छन् । जस्तै बेबिलोनियनहरूले प्रयोगमा ल्याएको आधार ६० प्रणाली अझै पनि घडीको समय गणनामा प्रयोग गरिन्छ । गन्ती गर्ने प्रक्रियालाई सजिलो बनाउन प्राचीन कालदेखि नै विभिन्न सङ्ख्या आधारहरू प्रयोग गरिएको पाइन्छ । हाम्रो देशमा पनि प्राचीन मानिसहरूले आधार पाँच, दस वा बिसको सङ्ख्याङ्न प्रणालीको प्रयोग गरेको देखिन्छ, जसको प्रभाव स्वरूप हाम्रो गाउँघरका बुढापाकाहरू अझै पनि एक बिस, दुई बिस, तिन बिस गरी गन्ती गरेको पाइन्छ । एक हातमा भएका औंलाहरू, दुबै हातमा भएका औंलाहरू वा हातगोडाका औँलाहरूको सङ्ख्याबाट प्रभावित भएर नै आधार पाँच, दस र बिसको प्रचलन भएको हुनुपर्दछ ।

सङ्ख्या र सङ्ख्याको विस्तार (Number and Extention of Number)

गणितले मानव सभ्यताको विकास र विस्तारको क्रममा अकल्पनिय कुराहरू केलाउने र निष्कर्ष निकाल्ने कार्य गर्दै आएको पाइन्छ । गणित विनाको अध्ययन, साहित्य, संस्कृति र वैज्ञानिक खोज अपुरो र अधुरो नै रहन्छ । दैनिक जीवन, अध्ययन तथा पेसागत जीवनमा समेत गणितको प्रयोग अपरिहार्यता देखिन्छ । मानिसका रक्त कोषमा हुने रक्त प्रवाहलाई पनि गणितीय संरचनाको आधारमा व्याख्या गर्न सकिन्छ । यसरी मानवीय जीवन र जगतका विविध पक्षहरूमा के ? कति ? किन ? कसरी ? लगायतका प्रत्येक प्रश्नहरूको उत्तर गणितको आधारमा गर्नुपर्ने हुन्छ । अन्य विषयको अध्ययन पनि गणित विना सम्भव हुँदैन । गणितको अध्ययनले मानिसमा नयाँ पद्धतिको खोजी गर्न सिकाउँछ । साथै विकसित गणितलाई प्रयोगमा ल्याउने चिन्तन प्रदान गर्दछ । आजको विश्वमा विज्ञानले जे जति आविष्कार गरेको छ, त्यो सबै गणितको नै देन हो । नयाँ कुराको अनुसन्धान र उत्पत्ति गर्ने काममा गणितको महत्त्वपूर्ण भूमिका रहन्छ । साथै विज्ञानबाट प्रतिपादित नयाँ सिद्धान्तहरूको व्याख्या, विश्लेषण र व्यवहारमा उतार्ने काम प्रायोगिक गणितको हुन्छ । तसर्थ, सारा विश्वलाई विकासको मार्गमा डोहोऱ्याउने र विज्ञानको प्रमुख आधारको रूपमा गणित रहेको हुनाले जर्मन गणितज्ञ Carl Friedrich Gauss ले विभिन्न वैज्ञानिक प्रयोगका आधारमा गणितलाई Queen Of Science वा विज्ञानको रानी भनेर परिभाषित गरेका छन् ।

गणितमा पढाइ हुने वा गणितका विविध पक्षमा प्रयोग हुने धेरै विषयवस्तु वा गणितीय संरचनामा सङ्ख्या सिद्धान्त (Number Theory) लाई गणितको रानी वा गणितको केन्द्रीय भागको रूपमा राखिन्छ भन्ने कुरा Gauss ले उल्लेख गरेका छन् । वास्तवमा हाम्रो व्यवहारमा धेरै खालका गणितका सिद्धान्तहरू प्रचलनमा छन् र ती मध्ये सङ्ख्या सिद्धान्तले सबै गणितीय क्षेत्रलाई फन्को

मारेर गोलबन्द गरेको छ । यस्ता गणितका विविध क्षेत्रगत सिद्धान्तलाई व्यवहारिक जीवनमा उतार्ने काम प्रायोगिक वा व्यावहारिक गणितले गरेको छ । जसमा व्यापक रूपमा सङ्ख्यात्मक समूहले नै प्रमुख स्थान ओगट्छन् । के तथ्याङ्क, के विश्लेषण, के संश्लेषण, के अङ्क गणित, के ज्यामिति, आदि हरेक क्षेत्रमा सङ्ख्या सिद्धान्त नै अग्रणी स्थानमा देखिन्छ । त्यति मात्र नभई राजनीतिक, आर्थिक, सामाजिक, सांस्कृतिक जस्ता नागरिक जीवनका हरेक पक्षमा गणितका सङ्ख्या सिद्धान्तको प्रत्यक्ष अप्रत्यक्ष प्रयोग हुने गर्दछ । यी विविध पक्षको विकास र विस्तारमा गणित र गणितको सङ्ख्या सिद्धान्तले खेलेको भूमिकालाई आफ्ना विविध गणितीय संरचनामा प्रयोग गरेर आएको निष्कर्ष कै प्रतिफल स्वरूप Gauss ले Number Theory is Queen of Mathematics भनेका छन् ।

यसरी विज्ञानको खोज तथा अनुसन्धानमा गणितको केन्द्रीय भूमिका रहेको हुन्छ । यसै गरी गणितको विकास र विस्तारमा सङ्ख्या सिद्धान्तको पनि महत्त्वपूर्ण भूमिका रहको छ । विभिन्न गणितीय सिद्धान्तहरूलाई सङ्ख्या सिद्धान्त र गणितीय क्रियाहरूबाट पुष्टि गर्न सकिन्छ । अतः यस प्रकार भन्न सकिन्छ कि "Mathematics is a Queen of Sciences and the Number theory is a Queen of Mathematics". विल्डर आर.एल.को The Foundations of Mathemaics का अनुसार "Mathematics is the mirror of civilization and the development of fundamental real analysis based on the number theory, which gives an insight into it. All the great ancient civililzation of the world since their down have contributed to it basically in some or the other way. The developments in real analysis are tremendous. While old challenging problems solved equally challenging new problems are emerging day to day through number theory".

माथिको परिभाषाबाट यो पुष्टि हुन्छ कि, सङ्ख्या सिद्धान्त गणितको केन्द्र भाग हो । सङ्ख्या विना गणित कल्पना गर्न पनि सकिँदैन ।

सङ्ख्याको व्यावहारिक उपयोग (Implication of Number in Daily life)

दैनिक जीवनका समस्या समाधानका लागि सङ्ख्याको उपयोग अनिवार्य छ । व्यावहारिक जीवनमा आउने विभिन्न कार्यहरू जस्तै, आर्थिक हिसाव किताब गर्न, समय मापन गर्न, दुरी मापन गर्न, उमेर हिसाब गर्न, कुनै पनि वस्तुको गणना गर्न, तिनीहरूको तौल, लम्बाइ, आयतन, क्षेत्रफल, आदि गणना गर्न सङ्ख्याहरूको उपयोग गरिन्छ । सङ्ख्यालाई शिक्षक, प्राध्यापक, अर्थशास्त्री, उद्योगी, व्यापारी, राजनीतीज्ञ, कृषक, मजदुर, तथ्याङ्कशास्त्री लगायत सम्पूर्ण व्यक्तिहरूले उपयोग गर्ने गर्छन् ।

यहाँ सङ्ख्या सिद्धान्तमा प्रयोग हुने विविध सङ्ख्याहरूको परिचय दिनु सान्दर्भिक भएकाले देहायअनुसार उल्लेख गरिएको छ ।

१. प्राकृतिक सङ्ख्या (Natural Numbers)

मानव सभ्यतामा सबैभन्दा पहिले विकास भएको सङ्ख्या प्राकृतिक सङ्ख्या वा गन्तीको सङ्ख्या हो । कुनै पनि वस्तु गणना गर्न प्रयोग गरिने सङ्ख्यालाई गन्तीका सङ्ख्याहरू (Natural Numbers) भनिन्छ । यस्ता सङ्ख्यालाई गन्तीका सङ्ख्याहरू (Counting Numbers) पनि भनिन्छ । प्राकृतिक सङ्ख्यालाई N ले जनाउने चलन छ । जस्तैः N ={ 1, 2, 3, 4, 5, …….} ले सबै प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ । कुनै दुई प्राकृतिक सङ्ख्याहरू जोड्दा वा गुणन गर्दा प्राकृतिक सङ्ख्या नै बन्छ । तर दुई प्राकृतिक सङ्ख्याको फरक प्राकृतिक सङ्ख्या नहुन पनि सक्छ । जस्तै : $2+3 = 5$, $5+6 =11$, $4\times5 = 20$, $8-3 = 5$, $7-7 = 0$ आदि । माथिको उदाहरणमा घटाउफल 0 प्राकृतिक सङ्ख्या होइन । तसर्थ प्राकृतिक सङ्ख्याको समूहमा 0 को अभावमा घटाउ क्रिया पूर्ण नहुने भएकाले शून्यको आविष्कार गरी पूर्ण सङ्ख्या W बन्यो ।

२. पूर्ण सङ्ख्याहरू (Whole Numbers)

शून्य (**0**) सहितको प्राकृतिक सङ्ख्याको समूहलाई पूर्ण सङ्ख्याहरू (Whole Numbers) भनिन्छ । पूर्ण सङ्ख्याहरूलाई W ले जनाइन्छ । जस्तैः W ={0, 1, 2, 3, 4, 5, ……} ले सबै पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ । कुनै दुई पूर्ण सङ्ख्याहरू जोड्दा वा गुणन गर्दा पूर्ण सङ्ख्या नै बन्छ । तर दुई पूर्ण सङ्ख्याहरू घटाउँदा पूर्ण सङ्ख्या नबन्न पनि सक्छ । जस्तैः $2 + 3 = 5, 0 + 6 = 6, 0 \times 15 = 0, 8 - 3 = 5, 12 - 15 = -3$ आदि । दिइएको उदाहरणमा घटाउफल -3 पूर्ण सङ्ख्या होइन । तसर्थ, प्राकृतिक र पूर्ण सङ्ख्याको समूहभित्र जोड र गुणन क्रिया अटाउँछ । जब मानवीय आवश्यकताभित्र घटाउ क्रिया समावेश भयो, तब पूर्ण सङ्ख्याको समूहमा ऋणात्मक सङ्ख्याहरू समावेश गरी पूर्णाङ्कहरू (Z) को विकास भयो ।

३. पूर्णाङ्क (Integers)

सबै प्राकृतिक सङ्ख्याहरू, तिनीहरूको ऋणात्मक र शून्य सहितको सङ्ख्याहरूको समूहलाई पूर्णाङ्कहरू (Integers) भनिन्छ । पूर्णाङ्कहरूलाई Z ले जनाइन्छ । जस्तैः Z ={…-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,…}ले सबै पूर्णाङ्कहरूको समूहलाई जनाउँछ । पूर्णाङ्कहरूलाई धनात्मक, ऋणात्मक र शून्य गरी छुट्याउन सकिन्छ । $Z^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ लाई धनात्मक पूर्णाङ्कहरू, $Z^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$ लाई ऋणात्मक पूर्णाङ्कहरू र {0} शून्य पूर्णाङ्क भनिन्छ । पूर्णाङ्कहरूलाई सङ्ख्या रेखाद्वारा पनि देखाउन सकिन्छ । पूर्णाङ्कहरूको जोड, घटाउ र गुणन क्रियाबाट आएको नतिजा पूर्णाङ्कहरूभित्र नै पर्दछ भने भाग क्रियाको नतिजा पूर्णाङ्क सङ्ख्या नहुन पनि सक्छ । जस्तै : $2+3 = 5, 2 - 8 = -6, 4\times5 = 20, \frac{20}{4} = 5, \frac{2}{7}$ आदि । माथिको उदाहरणमा $\frac{2}{7}$ पूर्णाङ्क होइन । यसकारणले गर्दा भिन्नात्मक सङ्ख्या Q को आविष्कार भयो ।

४. आनुपातिक सङ्ख्याहरू (Rational Numbers)

यदि a र b दुबै पूर्णाङ्कहरू हुन् तर $b \neq 0$ भए $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिने सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Numbers) भनिन्छ । जहाँ । आनुपातिक सङ्ख्यालाई Q ले जनाइन्छ । धनात्मक र ऋणात्मक सङ्ख्याहरू भिन्नहरू समावेश भएको पूर्णाङ्कहरूको समूह नै आनुपातिक सङ्ख्या हो । जस्तैः $Q = \{3, -2, -\frac{1}{3}, 0, 1, \frac{5}{7}, 3, 4\}$ले आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ । आनुपातिक सङ्ख्याहरूको गणितीय क्रियाहरू जोड, घटाउ, गुणन र भाग आनुपातिक सङ्ख्याभित्र नै गर्न सकिन्छ भने अन्य क्रियाहरू वर्गमूल, घनमूल आदि निकाल्नुपर्ने अवस्थामा आनुपातिक सङ्ख्याबाट मात्र सम्भव भएन र अन्त्य नहुने वा पुनरावृत्ति नहुने दसमलव सङ्ख्याहरूको आवश्यकता देखियो । जुन आवश्यकताबाट अनानुपातिक सङ्ख्या Ir. को विकास भयो ।

५. अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Irrational Numbers)

आनुपातिक सङ्ख्याहरू नभएको सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Numbers) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा अन्त्य हुने दसमलव र पुनरावृत्ति दसमलवमध्ये कुनैमा पनि व्यक्त गर्न नसकिने सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । अनानुपातिक सङ्ख्यालाई Ir. ले जनाइन्छ । जस्तैः Ir. $=\{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{3}, \pi, 1.41421356\ldots\}$ले अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ । सङ्ख्या रेखामा दिइएका सबै बिन्दुहरूले आनुपातिक सङ्ख्या देखाउँदैनन् । सङ्ख्यारेखामा पर्ने तर आनुपातिक नभएका सङ्ख्याहरू अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् ।

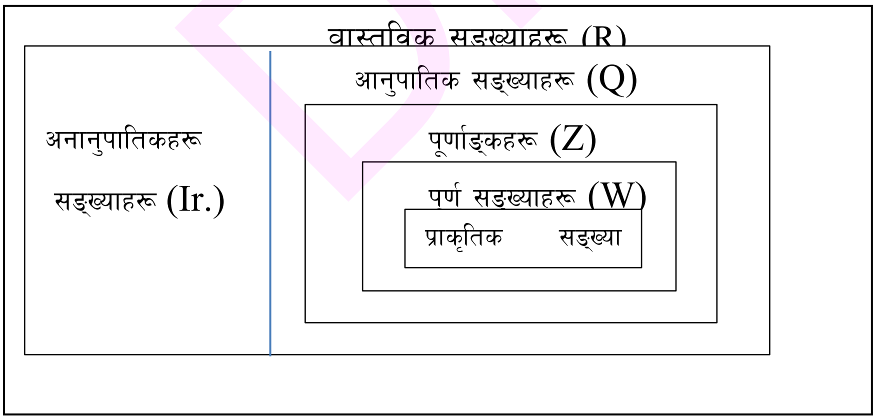
६. वास्तविक सङ्ख्याहरू (Real Numbers)

सङ्ख्या पद्धतिमा आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहको संयोजनलाई वास्तविक सङ्ख्या (Real Numbers) भनिन्छ । वास्तविक सङ्ख्यालाई R ले जनाइन्छ । $R = Q \cup Ir$. जहाँ Q आनुपातिक सङ्ख्या र Ir अनानुपातिक सङ्ख्या हो । जस्तैः $R=\{ \frac{5}{7}, \sqrt{2}, 5, 0, \sqrt[3]{3}, -\frac{1}{3}, \pi,$ $3.41421356\ldots\}$ ले वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई जनाउँछ ।

७. संयुक्त वा जटिल सङ्ख्या (Complex Number)

जुन सङ्ख्यालाई $a + ib$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ, त्यस्तो सङ्ख्यालाई संयुक्त सङ्ख्या (Complex Number) भनिन्छ । जहाँ, a र b वास्तविक सङ्ख्याहरू हुन् भने $i = \sqrt{-1}$ हुन्छ, जुन काल्पनिक हो । यस्ता सङ्ख्यामा भएको a लाई वास्तविक खण्ड (Real Part) र b लाई काल्पनिक खण्ड (Immaginary Part) भनिन्छ । वास्तविक सङ्ख्या पद्धतिभित्र मात्र सम्पूर्ण गणितीय क्रियाहरू गर्न सकिँदैन । संयुक्त सङ्ख्यालाई C ले सङ्केत गर्ने गरिन्छ । जस्तैः वर्ग समीकरण $x^2+1=0$ को हल वास्तविक सङ्ख्याहरूभित्र अटाएन किनभने यो पद्धतिमा $x^2=-1$ वा $x = \sqrt{-1}$ परिभाषित छैन । यसलाई सम्भव बनाउने क्रममा काल्पनिक सङ्ख्या i लाई $\sqrt{-1}$ मानेर एउटा सङ्ख्यालाई वास्तविक खण्ड र अर्को काल्पनिक खण्ड गरी $ax+ib$ को रूपमा व्यक्त गरी $x^2 + 1= 0$ को हल पनि सम्भव हुने गरी संयुक्त सङ्ख्या (Complex Number) हरूको विस्तार भयो । Complex Numbers**leq** सबै वास्तविक गणितीय क्रियाहरू अटाउँछन् । यसमा काल्पनिक खण्ड मात्र शून्य भएको संयुक्त सङ्ख्यालाई वास्तविक सङ्ख्या भनिन्छ । पुनः वास्तविक भाग शून्य भएको सङ्ख्या Immaginary Number हुन्छ । संयुक्त सङ्ख्याहरूको समूहमा सबै वास्तविक सङ्ख्याहरू अटाउँछन् । त्यसैले, $C = \{x : x$ एउटा $a + ib$ स्वरूपको सङ्ख्या हो, जहाँ $a, b \in R$ र $i = \sqrt{-1}\}$

सङ्ख्याहरूको विस्तारलाई तलको समूह चित्रमा देखाइएको छ ।



माथिको समूह चित्रबाट, $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ र $Ir \subset R$.

८. एमिकेवल सङ्ख्या (Amicable Number)

कुनै दुई ओटा सङ्ख्याहरू एकआपसमा एउटा सङ्ख्याका आफूबाहेक सबै भाजकहरूको योगफल अर्को सङ्ख्यासँग बराबर हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई एमिकेवल सङ्ख्या (Amicable Number) भनिन्छ । जस्तैः 220 र 284 मा 220 मा भाजकहरू 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 र 110 हुन्छन् । यी सबै भाजकहरूको योगफल 1+2+ 4+5+10+11+20+22+44+55+110 = 284 हुन्छ । त्यस्तै गरी 284 का भाजकहरू 1, 2, 4, 71 र 142 हुन् । यी सबै भाजकहरूको योगफल

1+2+ 4+71+142 = 220 हुन्छ । यी दुई सङ्ख्याहरू 220 र 284 एकआपसमा एमिकेवल सङ्ख्या हुन् । यस्ता सङ्ख्यालाई नेपालीमा मित्र सङ्ख्या भनिन्छ ।

९. बीज गणितीय सङ्ख्या (Algebraic Number)

जुन सङ्ख्यालाई कुनै बीज गणितीय समीकरणको अनुपातिक गुणाङ्क भएको मूल (Root) को रूपमा व्यक्त गर्न सकिन्छ भने त्यसलाई बीज गणितीय सङ्ख्या (Algebraic Number) भनिन्छ । जस्तै : $3x - 1 = 0$ बाट प्राप्त हुने मान $\frac{1}{3}$ बीजगणितीय सङ्ख्या हो ।

१०. ट्रान्सेन्डेन्टल सङ्ख्या (Transcendental Number)

जुन सङ्ख्याको कुनै बीज गणितीय समीकरणमा अनुपातिक गुणाङ्कसँगै मूल (Root) हुँदैन त्यस्तो सङ्ख्यालाई ट्रान्सेन्डेन्टल सङ्ख्या (Transcendental Number) भनिन्छ । जस्तैः π, e, $log2$ आदि । ट्रान्सेन्डेन्टल सङ्ख्याहरूको समूह अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूहको उपसमूह हुन्छ । प्रत्येक ट्रान्सेन्डेन्टल सङ्ख्या अनानुपातिक सङ्ख्या हुन्छन् तर प्रत्येक अनानुपातिक सङ्ख्या अनिवार्य रूपमा ट्रान्सेन्डेन्टल सङ्ख्या नहुन पनि सक्छन् ।

११. निरपेक्ष सङ्ख्या (Absolute Number)

कुनै सङ्केत वा अक्षरले नजनाई त्यसको मान नै लेखेर जनाउने सङ्ख्यालाई निरपेक्ष सङ्ख्या (Absolute Number) भनिन्छ । जस्तैः 2, 3, $\sqrt{2}$ आदि ।

१२. भावात्मक वा अमूर्त सङ्ख्या (Abstract Number)

कुनै निश्चित वस्तुको सन्दर्भमा कुनै सहयोग विना नै व्यक्त गरिने सङ्ख्यालाई भावात्मक वा अमूर्त सङ्ख्या (Abstract Number) भनिन्छ । A particular object is called an abstract number.

१३. मूर्त सङ्ख्या (Concrete Number)

कुनै विशिष्ट एकाइ वा वस्तुको सहयोगमा व्यक्त गरिने सङ्ख्यालाई मूर्त सङ्ख्या (Concrete Number) भनिन्छ । जस्तैः 5 जना मानिस, 2 घण्टा, 4 ओटा बस, जहाँ 5, 2, 4 अमूर्त सङ्ख्याहरू हुन् ।

रोमन सङ्ख्या प्रणाली (Roman Number System)

प्राचीन सङ्ख्याङ्कन पद्धतिमध्ये सीमित रूपमा भए पनि अझै प्रयोग गरिरहेको पद्धति रोमन पद्धति हो । यो सङ्ख्या पद्धति पनि जोड पद्धतिमा आधारित छ । रोमनहरूले सुरुमा सङ्ख्याहरू जनाउने सङ्केतको रूपमा हातका औँलाहरूको चित्र, हातको पन्जाको चित्र प्रयोग गर्दथे । पछि आएर हातमा भएका औँलाहरूको चित्र प्रयोग गरेर V, दुई हातका औँलाहरूबाट X, शताब्दी (Century) बाट C र माइल (Mile) बाट M को विकास भएको मानिन्छ । रोमन सङ्ख्याहरू आजकल पनि घडीमा, किताबका अध्यायहरूको सङ्ख्या जनाउन, चुनावका मतहरूको गणना गर्न आदि अन्य स्थानहरूमा प्रयोग गरिन्छ । रोमन सङ्ख्या पद्धतिमा प्रयोग हुने सङ्केत र तिनीहरूको साङ्ख्यिक मान तलको तालिकामा दिइएको छ ।

रोमन सङ्ख्याका सङ्केतहरू	I	V	X	L	C	D	M
साङ्ख्यिक मान	1	5	10	50	100	500	1000

रोमन सङ्ख्या पद्धतिको प्रारम्भमा I, X, C र M गरी चार ओटा आधारभूत सङ्केतहरू रहेको देखिन्छ । यसबाट अङ्कहरू धेरै दोहोरिने भएकाले उनीहरूले V, L र D आविष्कार गरे ।

रोमन सङ्ख्या प्रणालीमा सङ्ख्याङ्कनहरू लेख्ने नियमहरू

१. **जोडको नियम (Law of Addition):** कुनै पनि रोमन सङ्ख्याको मान त्यसमा प्रयोग भएका आधारभूत सङ्ख्याङ्कनहरू जोडेर निकालिन्छ । यसरी जोडेर लेख्दा सानो सङ्ख्याङ्कनलाई दायाँतिर लेखिन्छ ।

जस्तै : XVI = X+V+I = 10+5+1 = 16

CCXI = C+C+X+I = 100+100+10+1 =211

२. **घटाउको नियम (Law of Subtraction):** यस सङ्ख्या पद्धतिमा घटाउँदा ठुलो सङ्ख्याङ्कको बाँयातिर सानो सङ्ख्याङ्क एकपटक मात्र घटाइन्छ । सङ्ख्याङ्कहरू घटाउँदा खास सङ्ख्याङ्कहरू मत्र घटाउनुपर्दछ । यस पद्धतिमा I लाई V र X बाट, X लाई L र C बाट तथा C लाई D र M बाट घटाइन्छ । जस्तैः

IV = 5 – 1 = 4

CM = 1000 -100 = 900

३. **दोहोऱ्याउने नियम (Law of Repetition):** यस पद्धतिमा सङ्ख्याङ्कहरू लेख्दा आधारभूत सङ्केतहरू मध्ये I, X, C र M बढीमा तिन/तिन पटकसम्म दोहोऱ्याउने गरिन्छ । तर सङ्केतहरू V, L, र D भने दोहोऱ्याएर लेखिँदैन । जस्तैः XXV = 10+10+5 = 25

MMMVIII= 1000 +1000+1000+5+3 = 3008

४. **रोमन सङ्ख्याङ्कमा सङ्केतको स्थान (Position of Syombles in a Roman Numeral):** यस घटाउको नियममा दिइएको अवस्था बाहेक रोमन सङ्ख्याङ्कन प्रणालीमा सङ्ख्याहरू बायाँबाट दायाँतिर ठुलोदेखि सानोसम्म क्रम मिलाएर लेखिन्छ । जस्तैः सङ्ख्या MCXXIII मा पहिले हजारको सङ्केत, त्यसपछि क्रमशः सय, दस र एकको सङ्केत लेखिन्छ ।

५. **गुणनको नियम (Law of Multiplication) :** रोमन सङ्ख्या पद्धतिमा यदि कुनै अङ्कको माथि तेर्सो धर्सा (Bar) राखिएमा यसको मान सङ्ख्याङ्कको मानभन्दा 1000 गुणाले बढ्छ । जस्तैः

$\bar{X}$ = 1000×10 = 10000

$\overline{XV}$ = 1000×15 = 15000

रोमन सङ्ख्याङ्कन पद्धतिका विशेषताहरू

यस पद्धतिमा सात ओटा सङ्केतहरू I, V, X, L, C, D र M को प्रयोग गरिन्छ ।

यो पद्धतिमा अङ्कहरू बढीमा तिन पटक दोहोऱ्याएर लेखिन्छ ।

यो पद्धति जोड तथा घटाउ सिद्धान्तमा आधारित छ ।

यस पद्धतिमा ठुला ठुला सङ्ख्याहरू लेख्दा गुणन सिद्धान्तको पनि प्रयोग गरिन्छ ।

।

हिन्दू अरेबिक सङ्ख्या प्रणाली (Hindu Arabic Number System)

हिन्दूहरूले सङ्ख्या जनाउन विभिन्न किसिमको सङ्केतहरू प्रयोग गरे । ती सङ्केतहरू 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 गरी 10 ओटा छन् । त्यति मात्र होइन यी सङ्केतहरूको प्रयोग गरी अरू ठूला सङ्ख्या कसरी लेख्ने भन्ने नियम पनि स्थापित गरे । खास गरी "शून्य" को प्रयोग सबभन्दा पहिले हिन्दूहरूले नै गरेको भन्ने मानिन्छ । हिन्दूहरूबाट यो ज्ञान अरब (अहिलेको इराक, इरान) सम्म पुग्यो । अरबका विद्वानहरूले यो सङ्ख्याङ्कहरूलाई पश्चिमी सभ्यतामा यूरोपतिर लगी प्रचारप्रसार गरे । त्यसैले यो प्रणालीलाई हिन्दू अरेबिक सङ्ख्या प्रणाली भनिन्छ । यस प्रणालीमा सङ्ख्याहरूलाई दस दसको समूहमा राखिने भएकोले यसलाई दसमलव सङ्ख्या प्रणाली पनि भनिन्छ । दसमलव (deci) शब्द ल्याटिन भाषाबाट आएको हो जसको अर्थ दस भन्ने हुन्छ । हिन्दू अरेबिक सङ्ख्या सङ्केत सर्वप्रथम इसापूर्व २५० मा सम्राट अशोकद्वारा निर्मित स्तम्भमा भेटिएको थियो । इसापूर्व १०० मा भारतको पुना तथा नासिकका गुफाहरूमा पनि यी सङ्ख्या सङ्केतहरू पाइएका थिए । त्यसबेला पाइएका नमुनाहरूमा शून्यको प्रयोग भएको पाइँदैन । आठौँ, नवौँ शताब्दीतिर मात्र शून्यको प्रयोग सुरु भयो । इश्वी सम्वत् ८२५ मा पर्सियाका गणितज्ञ Al-Khowarizmi ले शून्य सहितको हिन्दूअरेबिक सङ्ख्या प्रणालीका बारेमा व्याख्या गरेका छन् । यो सख्या प्रणाली आठौँदेखि एघारौँ शताब्दीसम्म विकास भएको मानिन्छ । सोह्रौँ शताब्दीमा मात्र यो प्रणाली प्रचलनमा आयो ।

हिन्दू अरेबिक सङ्ख्या प्रणालीका विशेषताहरू

यस प्रणालीमा जम्मा दस ओटा (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) अङ्कहरू छन् ।

यी दस ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरेर जति पनि ठूला सङ्ख्याहरू लेख्न सकिन्छ ।

यस प्रणालीको आधार दस छ ।

प्रत्येक अङ्कको मान स्थानअनुसार फरक हुन्छ ।

यो सङ्ख्या प्रणाली स्थानमानमा आधारित छ ।

दुई वा सोभन्दा बढी अङ्कहरूबाट बनेका सङ्ख्याहरूमा प्रत्येक अङ्कको तिन ओटा मानहरू (देख्ने मान, स्थान मान र कुल मान) हुन्छन् । जस्तैः सङ्ख्या 756 मा 7 को देख्ने मान 7 हो, स्थानमान 100 हो भने कुल मान 700 हो ।

यस प्रणालीमा दसमलव बिन्दुको प्रयोग भएको छ । जसले गर्दा एकभन्दा साना सङ्ख्याहरू पनि लेख्न सकिन्छ ।

यस प्रणालीमा शून्यको प्रयोग छ । शून्यको पनि स्थानअनुसारको मान हुन्छ ।

कुनै पनि सङ्ख्याङ्कको मान त्यसमा प्रयोग भएका विभिन्न अङ्कहरूको कुल मानको योगफलसँग बराबर हुन्छ । जस्तैः $548 = 5\times100+4\times10+8\times1=500+40+8$

कुनै पनि सङ्ख्यामा प्रयोग भएका अङ्कहरूलाई दायाँतिर लगिएमा त्यसको स्थानमान दस घातको गुणाले घट्छ भने बायाँतिर लगिएमा दस घातको गुणाले बढ्छ । जस्तैः 347 मा 4 दाँयातिर लग्दा 374 र बायाँतिर लाँदा 437 हुन्छ ।

दुई वा सोभन्दा बढी अङ्कहरूबाट बनेका सङ्ख्याको स्थानमान अनुसार विस्तार गरी देखाउन सकिन्छ । जस्तैः $432 = 4\times10^2+3\times10^1+2\times10^0=400+30+2$

दस बाहेक अन्य आधारमा रहेका सङ्ख्याहरू

मानव इतिहासको प्राचीन ऐतिहासिक कालदेखि वर्तमानसम्म विभिन्न सभ्यतामा समुदायका मानिसले आफ्नै प्रकारको सङ्ख्या पद्धति र सङ्ख्याका आधार प्रयोग गरेको पाइन्छ । हामीले प्रयोग गर्दै आएको वर्तमान सङ्ख्या पद्धति आधार १० मा रहेको छ । मानव विकासक्रममा जब ठुला सङ्ख्याहरू प्रयोग गर्नुपर्ने आवश्यकता महसुस भयो त्यति बेलादेखि नै सङ्ख्यालाई समूहमा विभाजन गरेर एउटा आधारमा गन्ने गरेको हुनुपर्दछ । हातका औँला प्रयोग गरेर आधार ५ मा गन्ती गर्ने तथा आधार २० मा समूह बनाई गन्ती गर्ने चलन हाम्रो मुलुकमा अहिलेसम्म पाइन्छ । केवल गन्ती गर्नका लागि मात्र आधार १० बाहेक अन्य आधारमा गनियो भने वा यस्तै क्रियाकलाप विद्यार्थीलाई गर्न लगाइयो भने त्यसले गणित शिक्षणमा त्यति महत्त्व नराख्ला तर एक आधारमा रहेका सङ्ख्यालाई अर्को आधारमा परिवर्तन गर्ने बानीको विकास गराउन सकेमा गणितको ढाँचा विद्यार्थीले बुझ्न सक्नेछन् । यसले भविष्यमा उच्च अध्ययनका लागि आधार तयार पार्ने छ ।

गणित दस आधार पद्धतिमा बनेको छ तर पनि कम्प्युटर आदिमा भने दुई आधार पद्धतिको प्रयोग गरी कार्य सम्पादन गरिन्छ । तसर्थ दस आधार पद्धति मात्र पर्याप्त हुँदैन । कुनै पनि कुराको धारणा प्रष्ट बनाउन दुई वा तिन उस्तै प्रकारका गुणहरू भएका विषयवस्तुको तुलनात्मक अध्ययन हुनुपर्दछ । त्यसैले दस आधार पद्धतिको ज्ञान वृद्धिका लागि द्विआधार र पञ्च आधार पद्धतिको बारेमा जानकारी आवश्यक छ । जसरी अक्षरहरू मिलेर शब्द बन्दछ, त्यस्तै गरी अङ्कहरू मिलाएर सङ्ख्या लेखिन्छ । अङ्कहरूको संरचनाले जनाउने सङ्ख्या पद्धतिअनुसार फरक फरक हुन्छ । सामान्यतया निम्न आधार प्रणालीमा सङ्ख्याहरू लेख्ने र क्रिया गर्ने गरिन्छ ।

१. दसमलव सङ्ख्या (दस आधार सङ्ख्या)

२. द्विआधार सङ्ख्या (दुई आधार सङ्ख्या)

३. पञ्च आधार सङ्ख्या (पाँच आधार सङ्ख्या)

दसमलव सङ्ख्या, द्विआधार सङ्ख्या र पञ्च आधार सङ्ख्याहरूको विवरण तल तालिकामा दिइएको छ ।

किसिम	प्रयोग हुने आधारभूत अङ्कहरूको सङ्ख्या	प्रयोग हुन सक्ने अङ्कहरू	सङ्केत	चिन्ने कसरी ?
दसमलव सङ्ख्या (दस आधार सङ्ख्या)	दस ओटा	0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9	253_{10} 821_{10}	दसमलव सङ्ख्या निर्माणमा 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 र 9 गरी दस ओटा अङ्कहरूको प्रयोग गरिन्छ । सङ्ख्या निर्माणमा 5, 6, 7, 8 र 9 मध्ये कम्तीमा कुनै एउटाको प्रयोग भएमा त्यो सङ्ख्या स्वतः नै दसमलव सङ्ख्या हुन्छ । तर 0 र 1 मात्र वा 0, 1, 2, 3 र 4 को मात्र प्रयोग गरेर पनि यो सङ्ख्या निर्माण सकिने भएता पनि द्विआधार/पञ्च आधार सङ्ख्यासँग झुक्किने हुँदा सङ्केतमा जनाउनुपर्दछ । जस्तैः 1101_{10}, 2143_{10}
द्विआधार सङ्ख्या	दुई ओटा	0,1	1010_2 11101_2	द्विआधार सङ्ख्या निर्माणमा 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 र 9 को प्रयोग हुँदैन, केवल 0 र 1 को मात्र पयोग हुन्छ । जस्तैः 1101_2
पञ्च आधार सङ्ख्या	पाँच ओटा	0,1,2,3,4	234_5 2102_5	पञ्च आधार सङ्ख्या निर्माणमा 5, 6, 7, 8 र 9 को प्रयोग हुँदैन, केवल 0, 1, 2, 3 र 4 को मात्र पयोग हुन्छ । तर 0 र 1 मात्र प्रयोग गरेर पनि यो सङ्ख्या निर्माण गर्न सकिने भएता पनि द्विआधार सङ्ख्यासँग झुक्किने हुँदा सङ्केतमा जनाउनु पर्दछ । जस्तैः 1101_5

१. द्विआधार सङ्ख्या पद्धति (Binary Numeration System)

विद्युतीय सर्किटयुक्त वर्तमान समयको सबै जानकारी कम्प्युटरले आधार 2 मा रेकर्ड गर्दछ र केन्द्रीय प्रशोधनले आधार 2 मा नै जानकारीलाई अनुवाद गरी प्रतिफल दिने गर्दछ । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा जम्मा दुई ओटा अङ्कहरू 0 र 1 हुन्छन् र सङ्ख्याको आधार 2 हुन्छ । द्विआधार सङ्ख्यालाई छुट्याउन सङ्ख्याको पछाडि प्रत्यय (Suffix) 2 को प्रयोग गरिन्छ । जस्तैः द्विआधार सङ्ख्या प्रणालीमा 1101_2 लाई पढ्दा दुई आधार एक, एक, शून्य, एक भनेर पढिन्छ । द्विआधार सङ्ख्यालाई स्थानमान तालिकामा एक, दुई, चार, आठ, सोह्र, ...वा 2^0 , 2^1, 2^2 , 2^3 , 2^4 .... मा लेखिन्छ ।

एउटा व्यवहारिक उदाहरण अध्ययन गरौं । धिरज र सङ्गीताले आफूसँग भएको गुच्चालाई समूहमा राख्ने र पोको पार्ने विशेष नियम बनाएछन् ।

- 1 मात्र भए खुल्ला राख्ने
- 2 ओटा भए थैलीमा हाल्ने वा 2 गुच्चा = 1 थैली

- 3 ओटा गुच्चा भए 1 थैली र 1 खुल्ला
- 4 ओटा गुच्चा भए 2 थैली भयो र 2 थैली भएपछि झोलामा हाल्ने
  वा 4 गुच्चा = 2 थैली = 1 झोला
- यसैगरी 2 झोलाको 1 बाकस र 2 बाकसको 1 बोरा भएछ ।

धिरजले आफूसँग भएको गुच्चालाई 1111_2 ले जनाएछन् । उनीसँग जम्मा कति ओटा गुच्चाहरू रहेछन् ।

तलको तालिकामा नयाँ प्रणालीमा कसरी सङ्ख्यालाई लेखिन्छ भन्ने देखाइएको छ ।

गुच्चाको सङ्ख्या	बाकस (8)	झोला (4)	थैली (2)	खुल्ला (1)	द्विआधार सङ्ख्या लेख्ने तरिका
1				1	1 खुल्ला = 1
2			1	0	1 थैली, 0 खुल्ला = 10
3			1	1	1 थैली, 1 खुल्ला = 11
4		1	0	0	1 झोला, 0 थैली, 0 खुल्ला = 100
5		1	0	1	1 झोला, 0 थैली, 1 खुल्ला = 101
6		1	1	0	1 झोला, 1 थैली, 0 खुल्ला = 110
7		1	1	1	1 झोला, 1 थैली, 1 खुल्ला = 111
8	1	0	0	0	1 बाकस, 0 झोला, 0 थैली, 0 खुल्ला = 1000
9	1	0	0	1	1 बाकस, 0 झोला, 0 थैली, 1 खुल्ला = 1001
10	1	0	1	0	1 बाकस, 0 झोला, 1 थैली, 0 खुल्ला = 1010
11	1	0	1	1	1 बाकस, 0 झोला, 1 थैली, 1 खुल्ला = 1011
12	1	1	0	0	1 बाकस, 1 झोला, 0 थैली, 0 खुल्ला = 1100
13	1	1	0	1	1 बाकस, 1 झोला, 0 थैली, 1 खुल्ला = 1101

14	1	1	1	0	1 बाकस, 1 झोला, 1 थैली, 0 खुल्ला = 1110
15	1	1	1	1	1 बाकस, 1 झोला, 1 थैली, 1 खुल्ला = 1111

अर्थात् 1 बाकस + 1 झोला + 1 थैली + 1 खुल्ला

$= 8 + 4 + 2 + 1$

$= 15$ अर्थात् $1111_2 = 15$

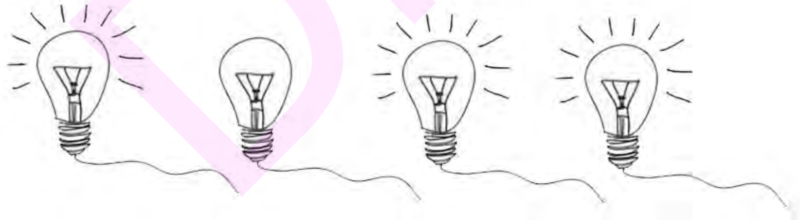
तसर्थ, धिरजसँग 15 ओटा गुच्चा रहेछन् । उसले लेखेको सङ्ख्या द्विआधार प्रणालीमा छ जहाँ 0 र 1 गरी जम्मा 2 ओटा सङ्केतहरू मात्र प्रयोग भएका छन् ।

$1111_2 = 1\times2^3+1\times2^2+ 1\times2^1+1\times2^0$

$= 8 + 4 + 2 + 1$

$= 15$ (यो दस आधारको सङ्ख्या हो)

विद्यार्थीहरूलाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिका सङ्ख्याहरूको धारणाका लागि विभिन्न क्रियाकलापमा संलग्न गराउन सकिन्छ । जस्तैः उठेको विद्यार्थीले 1 र बसेको विद्यार्थीले 0 जनाउने गरी कक्षामा भएका विद्यार्थी सङ्ख्या जनाउने एउटा नमुना तयार पार्न सकिन्छ । यस्तै नमुना चिमहरूलाई लहरै राखेर बलेको बत्तीले 1 र निभेको बत्तीले 0 जनाउने गरी द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको सङ्ख्या देखाउन सकिन्छ । तलको चित्रहरूमा द्विआधार सङ्ख्या 10010_2 लाई जनाउने विद्यार्थीहरूको मोडल र सङ्ख्या 1011_2 जनाउने बत्तीको मोडल देखाइएको छ ।



द्विआधार सङ्ख्यालाई दसमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण

द्विआधार सङ्ख्यालाई एकाइ, दुई र दुईको घातमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । द्विआधार सङ्ख्यालाई दसमलव सङ्ख्यामा रूपान्तर गर्दा सङ्ख्यामा प्रयोग भएका प्रत्येक सङ्केतलाई दाँयाबाट दुईको घातको रूपमा व्यक्त गरी सरल गर्नुपर्दछ । यो तथ्यलाई तलको तालिकामा देखाइएको छ ।

दुईको घातको रूपमा	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
दसमलव सङ्ख्याको मान	32	16	8	4	2	1
द्विआधार अङ्क	1	1	0	1	0	1

उदाहरणः 110101_2 लाई दसमलव सङ्ख्यामा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

$110101_2 = 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

$= 32+16+0+4+0+1$

$= 53$

दसमलव सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्यामा रूपान्तर

- दस आधारको सङ्ख्यालाई ठाडो रूपमा राखी 2 ले भाग गर्ने र भागफलसँगै दाँयाभाग + चिह्न दिई 0 वा 1 के शेष रहने हो त्यो लेख्ने
- फेरी 2 भाग गरी माथिकै 0 वा 1 के शेष रहन्छ त्यो देखाउने
- यसरी यो प्रक्रिया 0 नआएसम्म निरन्तर गर्ने
- अन्त्यमा शेष अङ्कहरू अन्तिम (तल) देखि माथि (सुरु) क्रमशः लेख्ने र उक्त सङ्ख्यामा द्विआधारको सङ्केत प्रयोग गर्ने

उदाहरण : 58 लाई द्विआधार सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

दुईको घात	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
दसमलव सङ्ख्या	32	16	8	4	2	1
द्विआधार अङ्क	1	1	1	0	1	0

58 मा एउटा 32 हुन्छ र शेष 58 – 32 = 26

26 मा एउटा 16 हुन्छ र शेष 26 – 16 = 10

10 मा एउटा 8 हुन्छ र शेष 10 – 8 = 2

2 मा शून्यओटा 4 हुन्छ र शेष 2 – 0 = 2

2 मा एउटा 2 हुन्छ र शेष 2– 2 = 0

0 मा शून्यओटा 1 हुन्छ र शेष = 0

त्यसैले 58 = 1 × 32 + 1 × 16 + 1 × 8 + 0 × 4 + 1 × 2 + 0 ×1

$=111010_2$

माथिको प्रक्रियालाई छोटकरीमा देखाउँदा,

$$\begin{array}{r|l}
2 & 58 \quad \text{शेष} \\ \hline
2 & 29 + 0 \\ \hline
2 & 14 + 1 \\ \hline
2 & 7 + 0 \\ \hline
 &
\end{array} \uparrow$$

2 | 3 + 1

2 | 1 + 1

  0 + 1

शेषलाई तलबाट माथि लेख्दा, $58 = 111010_2$

द्विआधार सङ्ख्याको जोड र घटाउ

+	0	1		-	10_2	1	0
0	0	1		0	10_2	1	0
1	1	10_2		1	1	0	
				10_2	0		

विभिन्न तरिकाहरू प्रयोग गरी द्विआधार सङ्ख्याको जोड र घटाउ क्रिया गर्न सकिन्छ । यहाँ जोड तथा घटाउका दुई तरिका उल्लेख गरिएको छ । द्विआधार सङ्ख्याङ्कनको स्थानमानलाई गुच्चा, थैली, झोला, बाकस, बोरा आदि शब्दहरूले नामाङ्कन गरिएको छ । दुई सङ्ख्याहरूलाई स्थानमान तालिका राखेर जोड तथा घटाउ क्रिया गरिएको छ ।

जस्तैः १. जोड : $1111_2 + 1010_2$

बोरा	बाकस	झोला	थैली	गुच्चा
	1	1	1	1
+	1	0	1	0
1	1	0	0	1

२. घटाउ : $1101_2 - 0110_2$

बोरा	बाकस	झोला	थैली	गुच्चा
	1	1	0	1
_	0	1	1	0
	0	1	1	1

तरिका : १

पहिलो प्रश्न (जोड) मा 1 गुच्चामा 0 गुच्चा जोड्दा 1 गुच्चा हुन्छ । 1 थैलीसँग 1 थैली जोड्दा 1 झोला, 0 थैली ($1+1=10_2$) हुने भएकोले थैलीको स्थानमा 0 रहन्छ भने 1 झोला हात लाग्यो आउँछ । हात लाग्यो 1 झोलामा 1 झोला जोड्दा 1 बाकस, 0 झोला ($1+1=10_2$) हुन्छ । फेरी झोलाको स्थानमा 0 रहन्छ भने हात लागेको 1 बाकसमा 1 बाकस र फेरी 1 बाकस जोड्दा 1 बाकस 1 बोरा ($1+1+1=11_2$) हुन्छ । तसर्थ, $1111_2 + 1010_2 = 11001_2$ हुन्छ ।

दोस्रो प्रश्न (घटाउ) मा 1 गुच्चाबाट 0 ओटा गुच्चा घटाउँदा 1 गुच्चा बाँकी हुन्छ । 0 थैलीबाट 1 थैली घटाउन नमिल्ने भएकोले 1 झोला सापटी लिई थैलीमा रूपान्तर गर्दा 2 थैली हुन्छ, जुन 1 थैलीमा जोडेर 1 घटाउँदा 1 थैली शेष रहन्छ । त्यस्तैगरी 0 झोलाबाट 1 झोला घटाउन नमिल्ने भएकोले 1 बाकस सापटी लिई झोलामा रूपान्तर गर्दा 2 झोला हुन्छ, जुन 1 झोलामा जोडेर 1 घटाउँदा 1 झोला शेष रहन्छ । अब, 0 बाकसबाट 0 बाकस घटाउँदा 0 बाकस शेष रहन्छ । तसर्थ, $1101_2 - 0110_2 = 0111_2$ हुन्छ ।

तरिका : २

$1111_2 + 1010_2 = (1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0) + (1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0)$

$$= (1\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 1\times1) + (1\times8 + 0\times4 + 1\times2 + 0\times1)$$
$$= (8 + 4 + 2 + 1) + (8 + 0 + 2 + 0)$$
$$= 15_{10} + 10_{10}$$
$$= 25_{10} = 11001_2$$

$$1101_2 - 0110_2 = (1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0) - (0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 0\times2^0)$$
$$= (1\times8 + 1\times4 + 0\times2 + 1\times1) - (0\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 0\times1)$$
$$= (8 + 4 + 0 + 1) - (0 + 4 + 2 + 0)$$
$$= 13_{10} - 6_{10}$$
$$= 7_{10} = 0111_2$$

२. पञ्च आधार सङ्ख्या पद्धति (Quinary Numeration System)

दसमलव पद्धतिमा दस ओटा अङ्कहरूको प्रयोग हुन्छ भने पञ्च आधार सङ्ख्या पद्धतिमा जम्मा पाँच ओटा अङ्कहरू 0, 1, 2, 3 र 4 प्रयोग हुन्छन् र सङ्ख्याको आधार 5 हुन्छ । यस पद्धतिमा पाँच/पाँचको समूह बनाउने भएकाले यस प्रणालीलाई पाँच मलव (Pentacimal) पद्धति पनि भन्न सकिन्छ । पञ्च आधार सङ्ख्यालाई छुट्याउन सङ्ख्याको पछाडि प्रत्यय (Suffix) 5 को प्रयोग गरिन्छ । जस्तैः पञ्च आधार सङ्ख्या प्रणालीमा 423_5 लाई पढ्दा पाँच आधार चार, दुई, तिन भनेर पढिन्छ । पञ्च आधार सङ्ख्यालाई स्थानमान तालिकामा एक, पाँच, पच्चिस, छ सय पच्चिस, ...वा 5^0 , 5^1, 5^2 , 5^3 , 5^4 .... मा लेखिन्छ । तसर्थ हरेक सङ्ख्यालाई एक, पाँच र पाँचको घातमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

एउटा व्यवहारिक उदाहरण अध्ययन गरौं, 23 ओटा लट्ठीलाई दसमलव र पञ्चआधार (पाँचमलव) प्रणालीअनुसार समूहमा विभाजन गरी ती सङ्ख्याहरूलाई जनाउने तरिकाबारे जनाइएको छ ।

दसमलव प्रणालीमा　　　　पञ्चआधार प्रणालीमा

23_{10}　　　　43_5

माथिको चित्रमा पहिलो चित्रमा 23 ओटा लट्ठीलाई दसमलव प्रणालीमा राखिएको छ । यसमा दस लट्ठीलाई 10/10 को 2 समूह बनाए पछि 3 लट्ठीहरू बाँकी रहेका छन् । उक्त सङ्ख्यालाई दसमलव सङ्ख्या सङ्केतमा लेख्दा 23_{10} लेखिन्छ । त्यस्तैगरी दोस्रो चित्रमा 23 ओटा लट्ठीलाई पाँचमलव

(पञ्चआधार) प्रणालीमा राखिएको छ । यसमा दस ओटा लट्ठीलाई 5/5 का 4 समूह बनाएपछि 3 लट्ठीहरू बाँकी रहेका छन् । उक्त सङ्ख्यालाई पञ्च आधार पद्धतिको सङ्केतमा लेख्दा 43_5 लेखिन्छ ।

दसमलव सङ्ख्या र पञ्च आधार पद्धतिको सङ्ख्याको सम्बन्धलाई तलको तालिकामा दिइएको छ

दसमलव सङ्ख्या	पाँच आधार ब्लक	पञ्च आधार पद्धतिका सङ्ख्याहरू						पञ्च आधार सङ्ख्या सङ्केत
		5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0	
1	■						1	1_5
2	■ ■						2	2_5
3	■ ■ ■						3	3_5
4	■ ■ ■ ■						4	4_5
5	■■■■■					1	0	10_5
6	■■■■■ ■					1	1	11_5
7	■■■■■ ■ ■					1	2	12_5
8	■■■■■ ■ ■ ■					1	3	13_5
9	■■■■■ ■ ■ ■ ■					1	4	14_5
10	■■■■■ ■■■■■					2	0	20_5
11	■■■■■ ■■■■■ ■					2	1	21_5
38	■■■■■ ■■■■■ ■■■■■ ■■■■■ ■■■■■ ■■■■■ ■■■■■ ■ ■ ■				1	2	3	123_5
329				2	3	0	4	2304_5
4459		1	2	0	3	1	4	120314_5

120314_5 लाई दसमलव सङ्ख्यामा लैजादा,

पाँचको घातको रूपमा	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
दसमलवमा मान	3125	625	125	25	5	1
पञ्च आधार अङ्क	1	2	0	3	1	4

माथि तालिकामा देखाइएको पञ्चआधारमा रहेको सङ्ख्या 120314_5 को मान दसमलव पद्धति अनुसार

$$\begin{aligned} 120314_5 &= 1\times5^5 + 2\times5^4 + 0\times5^3 + 3\times5^2 + 1\times5^1 + 4\times5^0 \\ &= 1\times3125 + 2\times625 + 0\times125 + 3\times25 + 1\times5 + 4\times1 \\ &= 3125 + 1250 + 75 + 5 + 4 \\ &= 4459 \end{aligned}$$

दसमलव सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा रूपान्तरण

- दस आधारको सङ्ख्यालाई ठाडो रूपमा राखी 5 ले भाग गर्ने र भागफलसँगै दायाँ भाग + चिह्न दिई 0, 1, 2, 3 वा 4 के शेष रहने हो, त्यो लेख्ने
- फेरी 5 भाग गरी माथिकै 0, 1, 2, 3 वा 4 के शेष रहन्छ, त्यो देखाउने
- यसरी यो प्रक्रिया 0 नआएसम्म निरन्तर गर्ने
- अन्त्यमा शेष अङ्कहरू अन्तिम (तल) देखि माथि (शुरु) क्रमशः लेख्ने र उक्त सङ्ख्यामा पञ्च आधारको सङ्केत प्रयोग गर्ने

उदाहरण : 854 लाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा रूपान्तर गर्नुहोस् ।

पाँचको घात	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
दसमलवमा मान	3125	625	125	25	5	1
पञ्चआधार अङ्क		1	1	4	0	4

854 मा एउटा 625 हुन्छ र शेष 854– 625 = 229

229 मा एउटा 125 हुन्छ र शेष 229 – 125 = 104

104 मा चार ओटा 25 हुन्छ र शेष 104 – 100 = 4

4 मा शून्य ओटा 5 हुन्छ र शेष 4 – 0 = 4

4 मा चार ओटा 1 हुन्छ र शेष 4 – 4 = 0

त्यसैले $854 = 1\times625 + 1\times125 + 4\times25 + 0\times5 + 4\times1$

$= 11404_5$

माथिको प्रक्रियालाई छोटकरीमा देखाउँदा,

5	854	शेष ↑
5	170 +	4
5	34 +	0
5	6 +	4
5	1 +	1
	0 +	1

शेषलाई तलबाट माथि लेख्दा, $854 = 11404_5$

पञ्च आधार सङ्ख्याको जोड र घटाउ

पञ्च आधार सङ्ख्या र दसमलव सङ्ख्याको बारेमा जानकारी भएपछि पञ्चआधार सङ्ख्याका केही गणितीय क्रियाहरू जस्तैः जोड र घटाउ गराउन सकिन्छ । यसका लागि आधारभूत जोड तथा घटाउका तथ्यका लागि निम्नअनुसारको तालिका बनाउन सकिन्छ ।

+	0	1	2	3	4		–	10_5	4	3	2	1	0
0	0	1	2	3	4		0	10_5	4	3	2	1	0
1	1	2	3	4	10_5		1	4	3	2	1	0	
2	2	3	4	10_5	11_5		2	3	2	1	0		
3	3	4	10_5	11_5	12_5		3	2	1	0			
4	4	10_5	11_5	12_5	13_5		4	1	0				
							10_5	0					

विभिन्न तरिकाहरू प्रयोग गरी पञ्चआधार सङ्ख्याको जोड र घटाउ क्रिया गर्न सकिन्छ । यहाँ जोड तथा घटाउका दुई तरिका उल्लेख गरिएको छ । पञ्चआधार सङ्ख्याङ्कनको स्थानमानलाई गुच्चा, प्लेट, कचौरा, गिलास, मग, आदि शब्दहरूले नामाङ्कन गरिएको छ । दुई सङ्ख्याहरूलाई स्थानमान तालिका राखेर जोड तथा घटाउ क्रिया गरिएको छ ।

जस्तैः १. जोडः $3204_5 + 4212_5$

मग	गिलास	कचौरा	प्लेट	गुच्चा
	3	2	0	4
+	4	2	1	2
1	2	4	2	1`

२. घटाउः $4132_5 - 2043_5$

मग	गिलास	कचौरा	प्लेट	गुच्चा
	4	1	3	2
_	2	0	4	3
	2	0	3	4`

तरिका : १

पहिलो प्रश्न (जोड) मा 4 गुच्चा र 2 गुच्चा जोड्दा 1 प्लेट 1 गुच्चा ($4+2 = 11_5$) हुने भएकोले गुच्चाको स्थानमा 1 र 1 प्लेट हात लाग्यो आउँछ । हात लागेको 1 प्लेटसँग 1 प्लेट जोड्दा 2 प्लेट हुन्छ । त्यस्तै गरी 2 कचौरासँग 2 कचौरा जोड्दा 4 कचौरा र 3 गिलासमा 4 गिलास जोड्दा 1 मग र 2 गिलास ($3+4=12_5$) हुन्छ । मा तसर्थ, $3204_5 + 4212_5 = 12421_5$ हुन्छ ।

दोस्रो प्रश्न (घटाउ) मा 2 गुच्चाबाट 3 ओटा गुच्चा घटाउन एउटा नपुग्ने भएकाले 1 प्लेट सापटी लिई गुच्चामा रूपान्तर गर्दा 5 गुच्चा हुन्छ । साटेको 5 गुच्चामा 2 जोडेर 3 गुच्चा घटाउँदा 4 गुच्चा बाँकी रहन्छ । पञ्च आधारमा 1 = 5 मानिन्छ, जस्तैः 1 सापटी लैजादा 5 अर्को सङ्ख्यामा जोडिन्छ । त्यस्तै गरी 2 प्लेटबाट 4 प्लेट घटाउन नमिल्ने भएकाले 1 कचौरा सापटी लिई प्लेटमा रूपान्तर गर्दा 5 प्लेट हुन्छ, जुन 2 प्लेटमा जोडेर 4 घटाउँदा 3 प्लेट शेष रहन्छ । अब, 0 कचौराबाट 0 कचौरा घटाउँदा 0 कचौरा र 4 गिलासबाट 2 गिलास घटाउँदा 2 गिलास शेष रहन्छ । तसर्थ, $4132_5 - 2043_5 = 2034_5$ हुन्छ ।

तरिका : २

$$\begin{aligned}3204_5 + 4212_5 &= (3\times5^3 + 2\times5^2 + 0\times5^1 + 4\times5^0) + (4\times5^3 + 2\times5^2 + 1\times5^1 + 2\times5^0)\\ &= (3\times125 + 2\times25 + 0\times5 + 4\times1) + (4\times125 + 2\times25 + 1\times5 + 2\times1)\\ &= (375 + 50 + 0 + 4) + (500 + 50 + 5 + 2)\\ &= 429_{10} + 557_{10}\\ &= 986_{10} = 12421_5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4132_5 - 2043_5 &= (4\times5^3 + 1\times5^2 + 3\times5^1 + 2\times5^0) - (2\times5^3 + 0\times5^2 + 4\times5^1 + 3\times5^0)\\ &= (4\times125 + 1\times25 + 3\times5 + 2\times1) - (2\times125 + 0\times25 + 4\times5 + 3\times1)\\ &= (500 + 25 + 15 + 2) - (250 + 0 + 20 + 3)\\ &= 542_{10} - 273_{10}\\ &= 269_{10} = 2034_5\end{aligned}$$

द्विआधार सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा रूपान्तर

विद्यार्थीहरूले द्विआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धतिको स्थानमान, पञ्चआधार सङ्ख्याङ्कन पद्धतिको स्थानमान र दसमलव पद्धतिको सम्बन्ध जानिसकेपछि एक पद्धतिबाट अर्कोमा रूपान्तर गर्न सजिलै सक्दैछन् । द्विआधार सङ्ख्या पद्धति (आधार दुई) को सङ्ख्यालाई पञ्च आधार सङ्ख्या पद्धति (आधार पाँच) को सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्दा निम्न प्रक्रिया अपनाउनुपर्दछ ।

- **द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको सङ्ख्यालाई दसमलव सङ्ख्या (दस आधार सङ्ख्या)मा बदल्ने**

$$\begin{aligned}1110110_2 &= 1\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 0\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1\_ + 0\times2^0\\ &= 1\times64 + 1\times32 + 1\times16 + 0\times8 + 1\times4 + 1\times2 + 0\times1\\ &= 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 0\\ &= 118\end{aligned}$$

तसर्थ, 118 दसमलव सङ्ख्या हो ।

- **दसमलव सङ्ख्यालाई पञ्च आधार सङ्ख्यामा बदल्ने**

  अब, दसमलब सङ्ख्या 118 लाई पञ्च आधार सङ्ख्यामा लैजादा,

$$\begin{array}{c|l}
5 & 118 \quad \text{शेष} \uparrow \\ \hline
5 & 23 + 3 \\ \hline
5 & \;\; 4 + 3 \\ \hline
  & \;\; 0 + 4
\end{array}$$

शेषलाई तलबाट माथि लेख्दा, $118 = 433_5$ तसर्थ, 433_5 पञ्च आधार सङ्ख्या हो ।

- **पञ्च आधार सङ्ख्यालाई जनाउने सङ्केत लेख्ने**

  $\therefore \quad 1110110_2 = 433_5$

नोट : पञ्च आधार पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्यामा रूपान्तर गर्दा माथि गरे जस्तै तरिकाबाट पहिले पञ्च आधार सङ्ख्यालाई दसमलव सङ्ख्यामा लैजानुपर्दछ र त्यसपछि दसमलव सङ्ख्यालाई दुईले भाग गरी द्विआधार सङ्ख्यामा रूपान्तर गर्नुपर्दछ ।

रुढ सङ्ख्या र संयुक्त सङ्ख्या (Prime and Composite Number)

सङ्ख्या सिद्धान्तले सँधै गणितमा एउटा छुट्टै पहिचान कायम राखेको छ । सर्वप्रथम प्रसिद्ध गणितज्ञहरू पाइथागोरस (569-500BC) र युक्लिड (करिब 300BC) ले सङ्ख्या सिद्धान्तमा महत्त्वपूर्ण योगदान दिएका थिए । उनीहरूले नै बिजोर सङ्ख्या, जोर सङ्ख्या, रुढ सङ्ख्या र संयुक्त सङ्ख्या गरी सङ्ख्याहरूको बर्गीकरण गरे । सत्रौँ सताब्दीमा फ्रेन्च गणितज्ञ Pierre de Fermat (1601-1665) ले रुढ सङ्ख्यासँग सम्बन्धित विभिन्न रमाइला साध्यहरू प्रतिपादन गरे । अठारौँ शताब्दीमा प्रसिद्ध महान गणितज्ञ Carl Friedrich Guss (1777-1885) ले रुढ सङ्ख्याको साध्यहरूको विकास गरे ।

रुढ सङ्ख्या (Prime Number)

एक र त्यही सङ्ख्याले बाहेक अन्य सङ्ख्याले निःशेष भाग नलाग्ने सङ्ख्यालाई रुढ सङ्ख्या भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा एउटा धनात्मक पूर्णाङ्क P, $(P > 1)$ जसलाई 1 र सोही सङ्ख्याले बाहेक अरूले भाग जाँदैन त्यो रुढ सङ्ख्या हो । जस्तैः 2, 3, 5, 7, आदि रुढ सङ्ख्याहरू हुन् । रुढ सङ्ख्याको परिभाषाबाट निम्न निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ :

- पूर्णाङ्क 1 रुढ वा संयुक्त सङ्ख्या दुवै होइन ।
- सबै जोर सङ्ख्याहरू मध्ये 2 मात्र रुढ जोर सङ्ख्या हो ।
- संयुक्त सङ्ख्यालाई भाग जाने सबैभन्दा सानो सङ्ख्या 1 बाहेक सबै रुढ सङ्ख्याहरू हुन्छन् ।
- यदि P एउटा रुढ सङ्ख्या हो र a कुनै पूर्णाङ्क छ भने कि a र P को म.स. 1 हुन्छ कि P को अपवर्त्य a हुन्छ ।
- यदि P एउटा रुढ सङ्ख्या हो भने $\sqrt{P}$ एउटा अनानुपातिक सङ्ख्या हुन्छ ।
- यदि P एउटा रुढ सङ्ख्या हो, a कुनै पूर्णाङ्क $(a > 1)$ छ भने $\frac{P}{a^n}$ र $\frac{P^n}{a^n}$ हुन्छ ।

- यदि P एउटा रुढ सङ्ख्या हो र $\frac{p}{ab}$ छ भने $\frac{p}{a}$ वा $\frac{p}{b}$ हुन्छ ।

रुढ सङ्ख्याका प्रकारहरू (Types of Primes)

1. **Relatively Prime or co-prime:** दुई ओटा सङ्ख्याहरू जसबाट बाहेक अरू साझा गुणनखण्ड आउँदैन, त्यस्ता सङ्ख्याहरूलाई Relatively Prime or co-prime भनिन्छ । जस्तैः 7 र 8, 4 र 9,आदि Relatively Prime or co-prime सङ्ख्याहरू हुन् ।
2. **Palindromic Prime:** अगाडि र पछाडिबाट पढ्दा एउटै सङ्ख्या हुने रुढ सङ्ख्यालाई Palindromic Prime भनिन्छ । यस्ता रुढ सङ्ख्याहरू 1000 भन्दा तल 19 ओटा हुन्छन । ती रुढ सङ्ख्याहरू 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 313, 353, 373, 383, 737, 757, 787, 797, 919 र 929 हुन् ।
3. **Twin Primes:** दुई ओटा क्रमिक रूपमा आउने सङ्ख्याहरू p र 9+2 रुढ सङ्ख्याहरू हुन भने ती रुढ सङ्ख्याहरूलाई Twin Primes भनिन्छ । जस्तैं 3 र 5, 5 र 7, 11 र 13, 17 र 19 आदि Twin Primes हुन् । यहाँ रुढ सङ्ख्या 5 दुई ओटा रुढ सङ्ख्या 3 र 7 सँग Twin Primes हुन्छ । अरू कुनै पनि रुढ सङ्ख्याहरूमा यस्तो हुँदैन । यदि p र q दुई ओटा Twin Primes छन् र जहाँ, p $< q$ छन् भने (pq+1) एउटा पूर्ण वर्ग सङ्ख्या हुन्छ र (p+q) जहाँ, (p $>$ 3) लाई 12 ले निःशेष भाग जान्छ ।
4. **Mersenne Prime:** यदि कुनै रुढ सङ्ख्या 2^p-1 को स्वरूपमा छ भने त्यस्तो रुढ सङ्ख्याहरूलाई Mersenne Prime भनिन्छ, जहाँ P एक रुढ सङ्ख्या हो । जस्तैः सङ्ख्याहरू 2^2-1= 3, 2^3-1= 7, 2^5-1=31, आदि Mersenne Primes हुन् ।
5. **Pseudo Prime:** यदि कुनै पूर्णाङ्क 2^n = 2 (mod n) को स्वरूपमा छ भने त्यस्तो सङ्ख्याहरूलाई Pseudo Prime भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा यदि $\frac{n}{2^n-2}$ भएमा n लाई Pseudo Prime भनिन्छ । सबैभन्दा साना चार ओटा Pseudo Prime हरू 341, 561, 645 र 1105 हुन् ।
6. **Repunit Prime:** यदि कुनै रुढ सङ्ख्या (10^n-1)/9 को स्वरूपमा 1 को n पदसम्म छ भने त्यस्तो रुढ सङ्ख्याहरूलाई Repunit Prime भनिन्छ । यस्तो सङ्ख्यालाई R_n ले जनाइन्छ । सङ्ख्याहरू R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317}, R_{1031}, R_{49081}, र R_{86453} आदि परिचित Repunit Primes हुन् ।
7. **Fermat Prime:** यदि कुनै पूर्णाङ्क $2^{2^n}+1$ को स्वरूपमा छ भने त्यस्तो सङ्ख्याहरूलाई Pseudo number भनिन्छ । यस्तो सङ्ख्यालाई F_nले जनाइन्छ । यदि F_n रुढ सङ्ख्या भएमा यसलाई Fermat Prime भनिन्छ । कुनै दुई Fermat Prime हरू Relatively Prime हुन्छन् ।

संयुक्त सङ्ख्या (Composite Number)

यदि कुनै सङ्ख्यालाई एक र त्यही सङ्ख्या बाहेक अन्य गन्ती सङ्ख्याहरूले पनि निःशेष भाग लाग्दछ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई संयुक्त सङ्ख्या (Composite Number) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा त्यस्ता धनात्मक सङ्ख्याहरू जुन रुढ सङ्ख्या होइनन् त्यस्ता सङ्ख्याहरू संयुक्त सङ्ख्या हुन् । जस्तैः 4, 6, 8, 9, 12 आदि ।

संयुक्त सङ्ख्यालाई 1 र सोही सङ्ख्याहरू बाहेक अन्य रुढ सङ्ख्याहरू 2, 3, 5, 7, 11 आदिले पनि निःशेष भाग जान सक्छ । दिइएको सङ्ख्यालाई माथिका कुन कुन रुढ सङ्ख्याले भाग जान्छ भन्ने नियम जान्नु आवश्यक हुन्छ । यहाँ दिइएका सङ्ख्यालाई 2, 3, 5, 7, 11 ले निःशेष भाग लाग्छ वा लाग्दैन जाँच्ने नियम यसप्रकार छ ।

- **2 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या :** कुनै पनि सङ्ख्याको एकको स्थानको अङ्क 0, 2, 4, 6, 8 वा जोर सङ्ख्या छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई 2 ले निःशेष भाग जान्छ । जस्तैः 24, 446, 6480
- **3 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या :** कुनै पनि सङ्ख्याको अङ्कहरूको जोडलाई 3 ले निःशेष भाग खाएमा त्यस पूरै सङ्ख्यालाई नै 3 ले निःशेष भाग जान्छ । जस्तै : 324, यस सङ्ख्यामा अङ्कहरूको योगफल 3+2+4= 9 लाई 3 ले निःशेष भाग जान्छ । त्यसैले 324 लाई 3 ले निःशेष भाग जान्छ ।
- **5 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या :** कुनै पनि सङ्ख्याको एकको स्थानको अङ्क 0 वा 5 छ भने त्यस्तो सङ्ख्यालाई 5 ले निःशेष भाग जान्छ । जस्तैः 20, 345, 6480 आदि ।
- **7 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या :** कुनै पनि सङ्ख्याको एकको स्थानमा भएको अङ्कको दुई गुणा बाँकी अङ्कहरूबाट बनेको सङ्ख्या घटाउँदा आउने सङ्ख्यालाई 7 ले निःशेष भाग गएमा त्यस सङ्ख्यालाई नै 7 ले निःशेष भाग जान्छ । जस्तैः 245 ÷ 7 मा एकको स्थानमा भएको अङ्क 5 छ । यसको दुई गुणा 5×2 = 10 हुन्छ । बाँकी अङ्कहरूको सङ्ख्या 24 – 10 =14 लाई 7 ले निःशेष भाग जान्छ । तसर्थ 245 लाई 7 ले निःशेष भाग जान्छ ।
- **11 ले निःशेष भाग जाने सङ्ख्या :** कुनै पनि सङ्ख्याको एकको स्थानको अङ्क बाँकी अङ्कहरूबाट बनेको सङ्ख्याबाट घटाउँदा आउने सङ्ख्यालाई 11 ले निःशेष भाग गएमा त्यस सङ्ख्यालाई नै 11 ले निःशेष भाग जान्छ । जस्तैः 308÷11 मा एकको स्थानमा भएको अङ्क 8 छ । बाँकी अङ्कहरूबाट बनेको सङ्ख्या 30 – 8 = 22 लाई 11 ले निःशेष भाग जान्छ । तसर्थ 308 लाई 11 ले निःशेष भाग जान्छ ।

भिन्न, दसमलव र प्रतिशत (Fraction, Decimal and Percentage)

परिचय (Indtoduction)

हामीले दैनिक जीवनमा कहिले सिङ्गो वस्तु र कहिले आंशिक (Partial) वस्तुको प्रयोग गरिन्छ । यसरी प्रयोग गर्दा सिङ्गो वस्तुलाई पूर्ण सङ्ख्याको प्रयोगबाट सजिलै व्यक्त गर्न सकिन्छ भने आंशिक (Partial) वस्तुलाई पूर्ण सङ्ख्याको माध्यमबाट मात्रै व्यक्त गर्न सकिँदैन । कुनै पनि वस्तुको आंशिक भागलाई साङ्ख्यिक भागमा कसरी व्यक्त गर्ने भन्ने सोचका साथ भिन्नको विकास भएको हो । गणित शिक्षणको क्रममा प्रायः एउटा अवधारणा वा गणितीय सिद्धान्तलाई एक अर्कामा सम्वन्धीत नगरि शिक्षण गर्ने गरिन्छ । जसले गर्दा विद्यार्थीहरूमा विषयवस्तु बिचको धारणा हासिल गर्न तथा सिकाई कठिन हुन जान्छ । विद्यार्थीहरूमा गणितप्रति रुचि जगाउन तथा सिकाइलाई दिगो बनाउन गणितीय विषयवस्तुलाई अन्तर सम्बन्धित गरेर शिक्षण गर्नुपर्दछ । यहाँ भिन्न, दसमलव र प्रतिशतलाई कसरी एक अर्कामा सम्बन्धित गराएर शिक्षण गर्ने भन्नेबारे चर्चा गरिएको छ ।

भिन्नको इतिहास (History of Fraction)

अरेबिकहरूले "टुक्रा गर्नु" लाई पहिले Al Kasr भन्ने गर्दथे, जसको अर्थ भिन्न भन्ने हो । भिन्नको

अङ्ग्रेजी शब्द Fraction सर्वप्रथम सन् 1321 मा गणितज्ञ Chavcer ले प्रयोग गरेका थिए । सन् 1568 मा Baker ले भिन्नलाई "टुक्राको टुक्रा" संज्ञा दिए । त्यस्तै सन् 1542 मा Recorde ले भिन्नलाई टुक्रिएको सङ्ख्याका साथै यो सङ्ख्या होइन तर कुनै सङ्ख्याको अंश हो भन्न थाले । त्यसलाई 1556 मा Tartaglia ले अंशलाई माथि र एउटा रेखाखण्ड लेखी त्यसको मुनि हर राखी भिन्न लेख्न थाले । त्यसैगरी भिन्न शिक्षणमा Fibonancci, Abrahambar Chica र Rabbiber Exre ले ×, ÷ , + र – को प्रतिपादन गरे । सन् 1518 मा Grammateus ल +, ×, – र ÷ को क्रम मिलाए ।

भिन्न (Fraction)

भिन्न भन्नाले सामान्यतया कुनै पनि सिङ्गो वस्तुको बराबर भाग लगाइएको मध्ये एक वा एक भन्दा बढी भागहरू (part) हो । त्यसैले भिन्न पूरा वस्तुको केही भाग हो । यसलाई $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ को रूपमा लेखिन्छ । जस्तैः $\frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{8}$ आदि ।

शैक्षणिक सामग्रीहरू : कागती, स्याउ, नासपती जस्ता सममितीय आकारका ठोस वस्तुहरू, गहुँको पिठो वा मैदाबाट बनाइएका नमुनाहरू, रोटी, काँचो पापड र अन्य ठोस वस्तुहरू र कार्डबोर्डको Fraction Pieces आदि ।

क्रियाकलाप १

कक्षामा विद्यार्थीहरूलाई एउटा व्यवहारिक उदाहरणबाट भिन्नको अवधारणा दिने । जस्तैः राम तिमी एक जना छौ, तिमीलाई आमाले एउटा रोटी दिनुभयो । भन त तिमीले कति रोटी पायौ ? दुई जनालाई एउटा रोटी दिँदा ? तिन जनालाई एउटा रोटी दिँदा नि ? चार जनालाई एउटा रोटी दिँदा ? यसको उत्तर सिङ्गो, आधा, तिन भागको एक भाग, चार भागको एक भाग भन्ने आउन सक्छ । सम्भव भए ठोस सामग्री काटेर शिक्षकले प्रस्तुत गर्नुहोस् । त्यसपछि शैक्षणिक पाटीमा चित्र बनाएर भिन्नमा लेख्न सिकाउने । यसबाट विद्यार्थीहरूले भिन्न पूर्णसङ्ख्या भन्दा सानो परिमाण हो भन्न कुरा सजिलै बुझ्छन् ।

क्रियाकलाप २

समान आकारका केही स्याउ लिएर प्रत्येक स्याउलाई चार बराबर भागमा काट्ने र काटिएका टुक्राबाट विभिन्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्दै ती टुक्रालाई भिन्नमा लेख्न लगाउनुहोस् ।

१. हरिलालले ३ ओटा स्याउ टुक्रा खायो । ➡ $\frac{3}{4}$

२. सीताले आधा स्याउ खाइन् । ➡ $\frac{2}{4}$ वा $\frac{1}{2}$

३. विनोदले एक चौथाइ स्याउ खायो । ➡ $\frac{1}{4}$

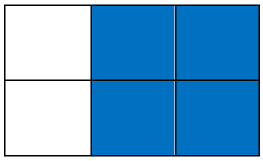
४. डोल्माले ७ ओटा टुक्रा स्याउ खाइन् । ➡ $\frac{7}{4}$ वा $1\frac{3}{4}$ वा $1+\frac{3}{4}$

- विभिन्न चित्रहरू वा वस्तुहरू दिएर भिन्नमा लेख्न सिकाउनुहोस् । कुनै भागलाई भिन्नमा व्यक्त गर्दा त्यसको पूरा भागलाई हर (Denominator) र लिएको भागलाई अंश (Numerator) मा लेख्नुपर्ने हुन्छ । कतिपय विद्यार्थीले गणितीय अवधारणा ठिकसँग बुझेर

पनि भिन्नात्मक सङ्केतको प्रयोग गलत लेख्न सक्छन् । त्यसमा शिक्षकले विशेष ध्यान दिनुपर्दछ ।

रङ लगाएको भागको भिन्न = $\frac{4}{6}$ वा $\frac{2}{3}$

रङ नलगाएको भागको भिन्न = $\frac{2}{6}$ वा $\frac{1}{3}$



रङ लगाएको भागको भिन्न = $\frac{1}{3}$

रङ नलगाएको भागको भिन्न = $\frac{2}{3}$

भिन्नको व्यावहारिक उपयोग (Implication of Fraction in Daily life)

भिन्नलाई हाम्रो व्यावहारिक जीवनमा प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष रूपमा प्रयाग गरेका हुन्छौ । एउटा रोटी, आधा रोटी, १ कप चिया, एउटा स्याऊः, एक सुका (पच्चिस) पैसा, एक मोहोर (पचास) पैसा, एक चौथाइ घिऊ, दुई माना चामल, तिन चौथाइ तेल, आधा क.जी. चिनी जस्ता प्रशस्त उदाहरणहरू भिन्नसँग सम्बन्धित छन् । जुन हाम्रो व्यावहारमा प्रयोग हुन्छन् ।

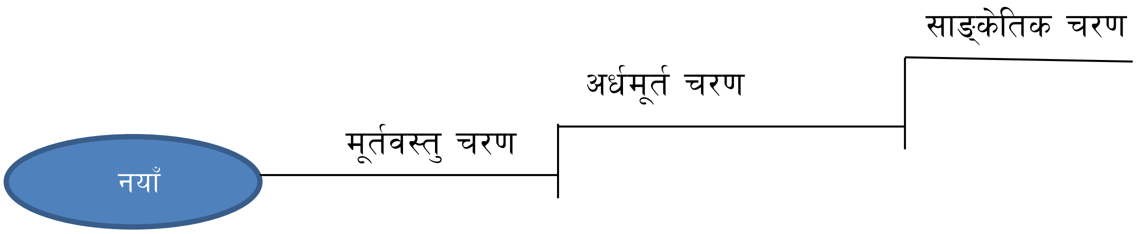
भिन्न शिक्षणका चरणहरू (Phases of Teaching Fraction)

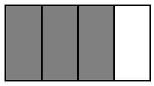
विद्यार्थीहरूलाई कुनै पनि विषयवस्तु शिक्षण गर्दा सिलसिला वा क्रमबद्ध तरिकाले शिक्षण गर्नुपर्दछ । भिन्न शिक्षण पनि क्रमबद्ध रूपमा गरेमा सिकाई अर्थपूर्ण र प्रभावकारी हुन्छ । जुनसुकै उमेर वा तहका विद्यार्थीलाई पनि भिन्नको नयाँ धारणा शिक्षण गर्दा निम्न ३ चरणहरू अपनाउनुपर्दछ :

१. मूर्तवस्तु चरण (Exploratory or Concrete Level) : भिन्न शिक्षणको प्रथम चरण मूर्तवस्तु चरण हो । कुनै पनि भिन्नको धारणा सिकाउन सबैभन्दा पहिले त्यससँग सम्बन्धित मूर्त वस्तुहरूलाई शैक्षिक सामग्रीको रूपमा प्रयोग गर्नुपर्दछ । त्यस्ता मूर्त वस्तुहरू विद्यार्थीलाई छुन तथा चलाउन दिएमा वस्तुप्रतिको धारणा प्रष्ट हुन्छ ।

२. अर्धमूर्त चरण (Semi-concrete Level): विद्यार्थीहरूमा मूर्त वा ठोस वस्तुको धारणा बसिसकेपछि मूर्त वस्तुहरूको प्रयोग विस्तारै घटाउनुपर्दछ र उक्त वस्तुहरूको सट्टामा चित्रहरूको प्रयोग गर्नुपर्दछ । चित्रको माध्यमबाट पनि भिन्नको अवधारणालाई थप प्रष्ट बनाउन सकिन्छ ।

३. साङ्केतिक वा अमूर्त चरण (Symbolic or Mastery Level): बालकलाई सधै मूर्त वस्तु वा अर्धमूर्त अवस्थामा मात्र सीमित राख्नु हुँदैन । त्यसैले कुनै पनि गणितीय विषयवस्तुको स्पष्ट धारणा बसिसकेपछि विधिन्न सङ्केतहरू, अमूर्त तथ्यहरू, सिद्धान्तहरू तथा साध्यहरू समेत सिकाउन सकिन्छ ।



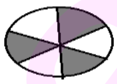
मूर्त वा ठोस वस्तुद्वारा	अर्धमूर्त वा चित्रद्वारा	अमूर्त वा सङ्केतद्वारा
कागजको पाना पट्याएर वा कार्डबोर्डको भिन्नलाई कैँचीले काटेर देखाउने ।	 	$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$

भिन्नका किसिम (Types of Fractions)

भिन्नहरू विभिन्न प्रकारका हुन्छन् । ती मध्ये समान भिन्न (Like Fraction), असमान भिन्न (Unlike Fraction), उपयुक्त भिन्न (Proper Fraction), अनुपयुक्त भिन्न (Improper Fraction), समतुल्य भिन्न (Equivalent Fraction) र मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction), एकाइ भिन्न (Unit Fraction) बारे शिक्षकले चित्रको माध्यमबाट धारणा स्पष्ट पार्न सहयोग गर्नुपर्दछ ।

उपयुक्त भिन्न (Proper Fraction)

यदि कुनै भिन्नको हरभन्दा अंश सानो छ भने त्यस्तो भिन्नलाई उपयुक्त भिन्न (Proper Fraction) भनिन्छ । उपयुक्त भिन्नमा हर जहिले पनि अंशभन्दा ठुलो हुन्छ अर्थात् यसको मान 1 भन्दा सानो हुन्छ । जस्तैः $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$ आदि ।

 $\frac{3}{6}$

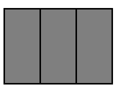
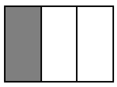
अनुपयुक्त भिन्न (Improper Fraction)

यदि कुनै भिन्नको अंश र हर बराबर छ वा हर भन्दा अंश ठुलो छ भने त्यस्तो भिन्नलाई अनुपयुक्त भिन्न (Improper Fraction) भनिन्छ । जस्तैः $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{10}{7}$ आदि ।

 $\frac{3}{2}$

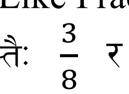
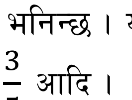
मिश्रित भिन्न (Mixed Fraction)

यदि कुनै भिन्न एउटा गन्ती सङ्ख्या र उपयुक्त भिन्नका जोडले बनेको छ भने त्यो भिन्नलाई मिश्रित भिन्न भनिन्छ । जस्तैः $4\frac{1}{2}$, $5\frac{3}{11}$ आदि ।

 =  $2\frac{1}{3}$  वा $\frac{7}{3}$

समान भिन्न (Like Fractions)

दुई वा दुई भन्दा बढी भिन्नहरूको अंश जुन भएपनि हरहरू बराबर छन् भने त्यस्ता भिन्नहरूलाई समान हर भिन्न (Like Fractions) भनिन्छ । यस्ता भिन्नहरू उपयुक्त वा अनुपयुक्त दुवै खालका भिन्न पर्दछन् । जस्तैः $\frac{3}{8}$ र $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{5}$ र $\frac{3}{5}$ आदि ।

$\frac{2}{3}$  $\frac{1}{3}$ 

असमान भिन्न (Unlike Fractions)

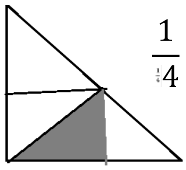
दुई वा दुई भन्दा बढी भिन्नहरूको हर फरक फरक छन् भने त्यस्ता भिन्नहरूलाई असमान हर भिन्न (Unlike Fractions) भनिन्छ । यस्ता भिन्नहरू पनि उपयुक्त वा अनुपयुक्त दुबै खालका भिन्न पर्दछन् । जस्तै: $\frac{3}{4}$ र $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{7}$ र $\frac{3}{5}$ आदि ।

$\frac{3}{5}$

$\frac{4}{6}$

एकाइ भिन्न (Unit Fraction)

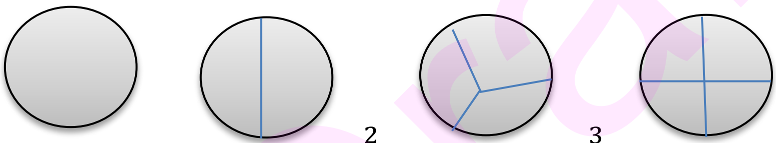
कुनै पनि भिन्नको अंशमा 1 छ भने त्यस्तो भिन्नलाई एकाइ भिन्न (Unit Fraction) भनिन्छ । जस्तै : $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{13}$ आदि ।



$\frac{1}{4}$

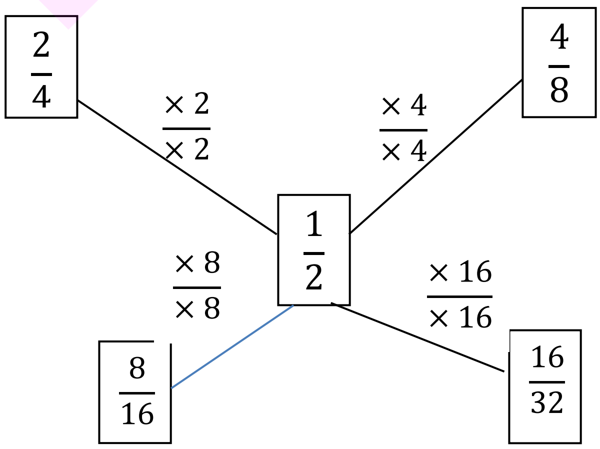
$\frac{1}{3}$

समतुल्य भिन्न (Equivalent Fraction)



1 $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$

समतुल्य भिन्नलाई schematically निम्न अनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :



तसर्थ, $\frac{1}{2} . \frac{2}{4} . \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}$ समतुल्य भिन्नहरू हुन भनी प्रष्ट पार्ने ।

विपरीत भिन्न (Reciprocal Fraction)

कुनै भिन्नलाई अर्को भिन्नले गुणन गर्दा Identity भिन्न आउँछ भने ती भिन्नहरूलाई एक अर्काका विपरीत भिन्न (Reciprocal Fraction) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा यदि दुई भिन्नहरूको गुणनफल एक हुन्छ भने एउटा भिन्न अर्को भिन्नको विपरीत भिन्न हुन्छ । जस्तैः $\frac{4}{7}$ र $\frac{7}{4}$ विपरीत भिन्नहरू हुन् । किनकि $\frac{4}{7}\times\frac{7}{4} = 1$ हुन्छ । अन्य विपरीत भिन्नहरूमा $\frac{1}{5}$ र 5, $\frac{2}{3}$ र $\frac{3}{2}$ आदि हुन्छन् ।

भिन्नहरूको तुलना (Comparision of Fraction)

दुई वा दुईभन्दा बढी भिन्नहरूको तुलना गर्न सकिन्छ । भिन्नहरूको तुलना गर्दा निम्न अवस्थाहरू हुन सक्छन् ।

(क) यदि भिन्नहरूको अंश समान भएमा हर सानो भएको भिन्न ठुलो हुन्छ र हर सानो भएको भिन्न सानो हुन्छ । जस्तैः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ मा $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ हुन्छ ।

(ख) यदि भिन्नहरूको हर समान भएमा अंश ठुलो भएको भिन्न ठुलो हुन्छ र अंश सानो भएको भिन्न सानो हुन्छ । जस्तैः $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ मा $\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ हुन्छ ।

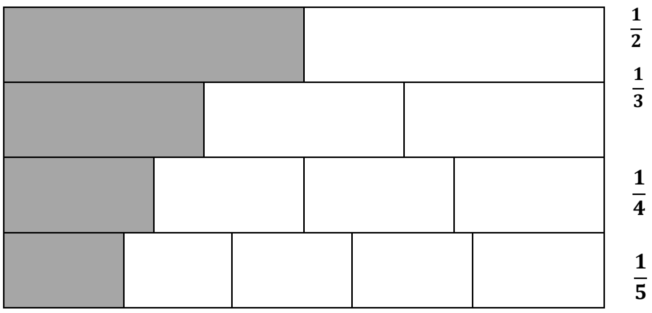
(ग) यदि हर र अंश दुवै असमान भएमा हरमा भएका सङ्ख्याहरूलाई समान हर बनाई भिन्नहरूको तुलना गर्न सकिन्छ । भिन्नमा भएका सङ्ख्याहरूको ल.स. लिई समान हर बनाउन सकिन्छ । जस्तै : $\frac{3}{4}$ र $\frac{5}{7}$ दुई भिन्नमध्ये कुन ठुलो छ सजिलै भन्न सकिदैन । तसर्थ, 4 र 7 को ल.स. $4 \times 7 = 28$ हुन्छ ।

अब, समान हर बनाउँदा

$\frac{3}{4} = \frac{3\times7}{4\times7} = \frac{21}{28}$, $\frac{5}{7} = \frac{5\times4}{7\times4} = \frac{20}{28}$ । यहाँ, समान हर 28 भयो तर अंश $21 > 20$ हुन्छ ।

तसर्थ, $\frac{21}{28} > \frac{20}{28}$ वा $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$ हुन्छ ।

(घ) चित्रद्वारा पनि भिन्नहरूको तुलना गर्न सकिन्छ । जस्तैः

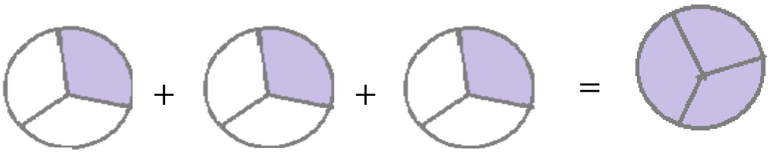


चित्रबाट $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$ भएको प्रष्ट देख्न सकिन्छ ।

नोट : दुई वा दुई भन्दा बढी भिन्नहरूको तुलना गर्न हर समान वा अंश समान हुनुपर्दछ ।

भिन्नहरूको जोड (Addition of Fraction)

उदाहरण : १ समान भिन्न

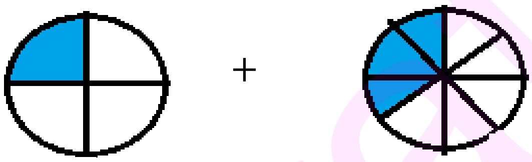


$\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ 1

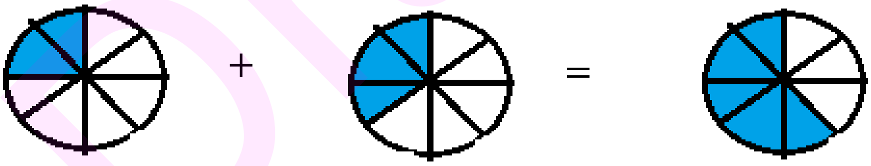
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1+1+1}{3}=\frac{3}{3}=1$ (टुक्राहरूबाट बनेको सिङ्गो)

प्रक्रिया : कुनै पनि समान हर भएका भिन्नहरूको जोड गर्दा हरलाई साझा लिई अंशलाई मात्र जोड क्रिया गर्दा आउने योगफल नै भिन्नको जोड हो ।

उदाहरण : २ असमान भिन्न



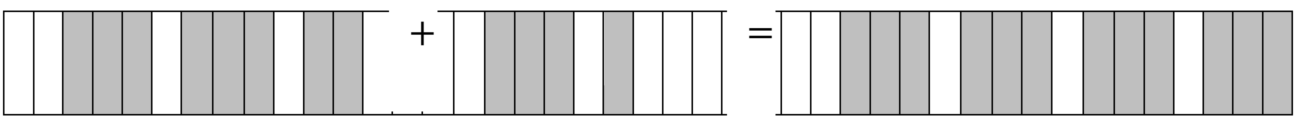
$\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{8}$



$\frac{2}{8}$ $\quad$ $\frac{3}{8}$ $\quad$ $\frac{5}{8}$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 2}{4\times 2}+\frac{3}{8}$$
$$=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

३. मिश्रित भिन्नहरूको जोड



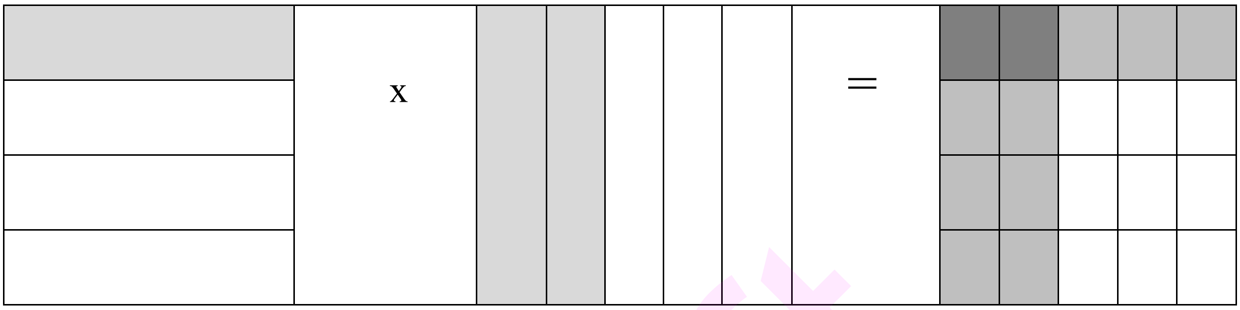
$2\frac{2}{3}$ $\quad$ $1\frac{1}{3}$ $\quad$ 4

$$2\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = (2+1) + (\frac{2}{3} + \frac{1}{3})$$

$$= 3 + (\frac{2+1}{3}) = 3 + \frac{3}{3} = 3 + 1 = 4$$

प्रक्रिया : उस्तै (समान) टुक्राहरूको मात्र जोड क्रिया हुने भएकोले कुनै पनि असमान हर भएका भिन्नहरूको जोड गर्दा हरलाई समान बनाएर मात्र भिन्नहरूको जोड क्रिया गर्न सकिन्छ ।

भिन्नहरूको गुणन (Multiplication of Fraction)



$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

दसमलव भिन्न (Decimal Fraction)

भिन्न र दसमलव भिन्नबिच अन्तर सम्बन्ध रहेको छ । यी दुईबिचको सम्बन्धलाई प्रष्ट्याउन शिक्षकले निम्न क्रियाकलाप गर्नुपर्दछ ।

Step 1. केही भिन्नहरू विद्यार्थीहरूलाई भन्न लगाउने, जस्तै :

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{5}{9}, \frac{7}{20}, \frac{42}{100}, \frac{21}{50}, \frac{135}{1000}$$

Step 2. माथिका भिन्नहरूमध्ये अलि मिल्दा भिन्नहरू छाल्न लगाउने :

$\frac{3}{10}, \frac{42}{100}, \frac{135}{1000}$ (किन ? छलफल गर्ने ।)

Step 3. कुनै पनि भिन्नात्मक सङ्ख्याको हरमा रहेको सङ्ख्याको बनावटमा सबैभन्दा माथिल्लो स्थानमानमा १ र अन्य स्थानमानमा ० (शून्य) छन् भने त्यस्तो भिन्न दसमलव भिन्न (Decimal Fraction) हो भन्न कुरा प्रष्ट पार्ने । दसमलव भिन्नको हरलाई १०/१० को गुणनफल वा घाताङ्कमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

Step 4. दसमलव भिन्नलाई दसमलव सङ्ख्यामा सजिलैसँग लेख्न सकिन्छ । जस्तै :

$\frac{3}{10} = 0.3$, $\frac{42}{100} = 0.42$, $\frac{135}{1000} = 0.135$ (कसरी ? छलफल गर्ने ।)

Step 5. त्यसपछि दसमलव सङ्ख्याको स्थानमानको बारेमा छलफल गर्ने । जस्तै:

(क) $\frac{3}{10} = 0.3$ तीन दसांश (Third tenths)

दशांश (Tenths)

(ख) $\frac{42}{100} = 0.42$ बयालीस दसांश (Forty Two Hundredths)

दशांश (Tenths)

शतांश (Hundredths)

(ग) $\frac{135}{1000} = 0.135$ एकसय पैंतिस हजारांश (One Hundred Thirty five Thousandths)

दसांश (Tenths)

शतांश (Hundredths)

हजारांश (Thousandths)

दसमलव भिन्नका क्रियाहरू (Operation of Decimal Fraction):

दसमलव सङ्ख्यामा व्यक्त गरिएका सङ्ख्याहरूको जोड, घटाउ, गुणन र भाग क्रियाहरू गर्न सकिन्छ । यस्ता क्रिया गर्दा दसमलव सङ्ख्यालाई दसमलव भिन्नमा रूपान्तर गरी सामान्य भिन्नको जस्तै तरिकाबाट सरल गर्न सकिन्छ । जसले गर्दा विद्यार्थीहरूमा भिन्न र दसमलव भिन्नबिचको सम्बन्ध बुझ्न सजिलो हुन्छ । दसमलव सङ्ख्याको क्रियाका उदाहरणहरू तल उल्लेख गरिएको छ ।

(क) जोड : 0.35+ 0.12 (दसमलव सङ्ख्या)

$= \frac{35}{100} + \frac{12}{100}$ (दसमलव भिन्नमा रूपान्तर)

$= \frac{35+12}{100}$ (भिन्नको जोड क्रिया)

$= \frac{47}{100} = 0.47$

(ख) घटाउ : 0.65 - 0.32 (दसमलव सङ्ख्या)

$= \frac{65}{100} - \frac{32}{100}$ (दसमलव भिन्नमा रूपान्तर)

$= \frac{65-32}{100}$ (भिन्नको घटाउ क्रिया)

$= \frac{33}{100} = 0.33$

(ग) गुणन : 0.25 × 0.42 (दसमलव सङ्ख्या)

$= \frac{25}{100} \times \frac{42}{100}$ (दसमलव भिन्नमा रूपान्तर)

$= \frac{25 \times 42}{100 \times 100}$ (भिन्नको गुणन क्रिया)

$= \frac{1050}{10000} = 0.105$

(घ) भाग : 0.14 ÷ 0.2 (दसमलव सङ्ख्या)

$= \frac{14}{100} \div \frac{2}{10}$ (दसमलव भिन्नमा रूपान्तर)

$= \frac{14}{100} \times \frac{10}{2}$ (भिन्नको भाग क्रिया)

$= \frac{7}{10}$ (लघुत्तम पदमा लैजादा)

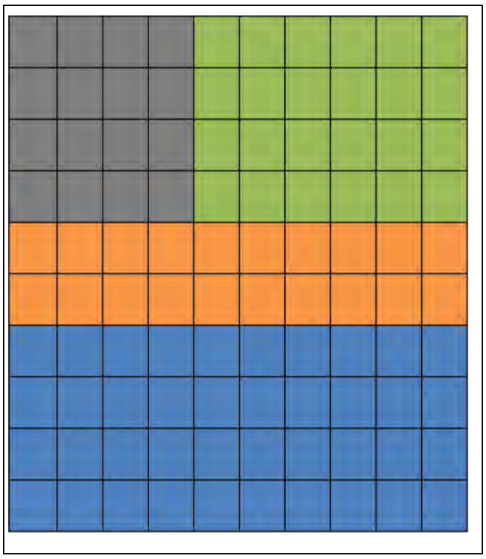
$= 0.7$

नोट : दसमलव सङ्ख्या सम्बन्धी क्रियाहरूको बारेमा अन्य विधिहरू के के हुन्छन् ? छलफल गर्नेे ।

प्रतिशत (Percentage)

प्रतिशत पनि एक भिन्नकै रूप हो । Percent ल्याटिन शब्द Percentum बाट आएको प्रतिशत (Percentage) को शाब्दिक अर्थ **प्रति सय**मा भन्ने हुन्छ । त्यसैले कुनै पनि भिन्न जसको हर सय नै

छ त्यस्तो भिन्नलाई प्रतिशत भनिन्छ । जस्तै एउटा कक्षामा भएका 100 जना विद्यार्थीहरू मध्ये 30 जना छात्रा छन् । यसलाई भिन्नमा लेख्दा $\frac{30}{100}$ हुन्छ, अर्थात् 100 जनामा 30 जना भनेको 30% हो । प्रतिशतलाई तलको चित्रबाट थप प्रष्ट पार्न सकिन्छ,



i) 100 ओटा वर्गहरू मध्ये 16 ओटा वर्ग छन् । जसलाई भिन्न $\frac{16}{100}$ = 16% लेखिन्छ ।

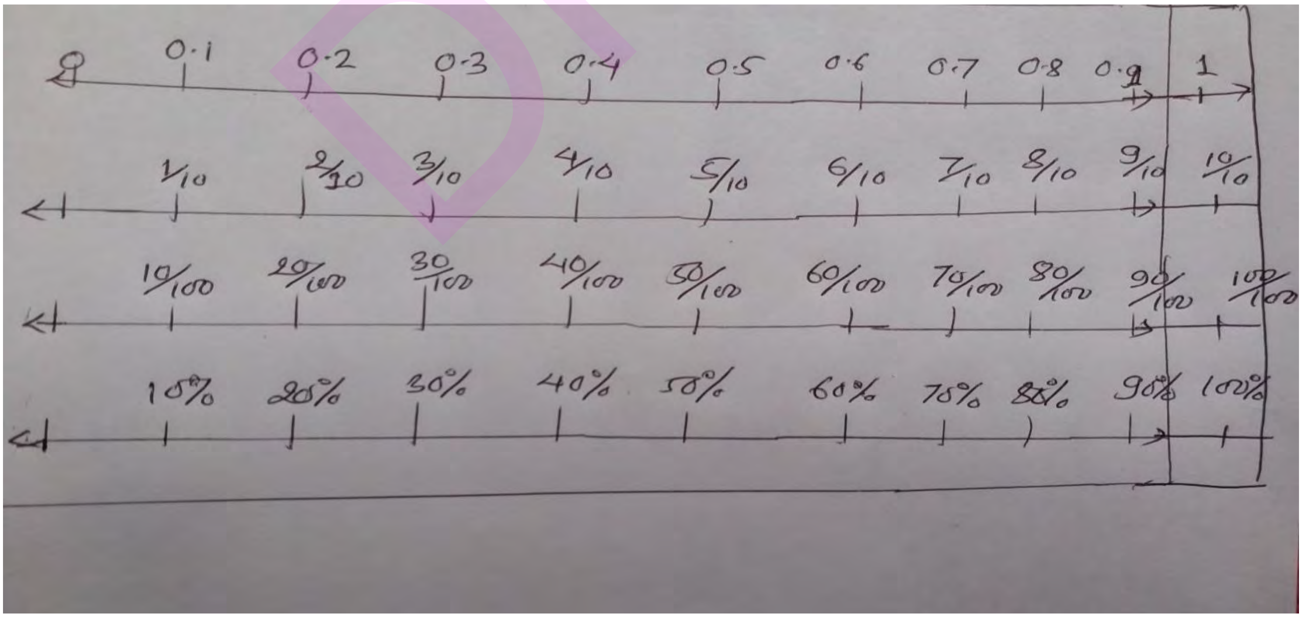
ii) 100 ओटा वर्गहरू मध्ये 24 ओटा वर्ग छन् । जसलाई भिन्न $\frac{24}{100}$ = 24% लेखिन्छ ।

iii) 100 ओटा वर्गहरू मध्ये 20 ओटा वर्ग छन् । जसलाई भिन्न $\frac{20}{100}$ = 20% लेखिन्छ ।

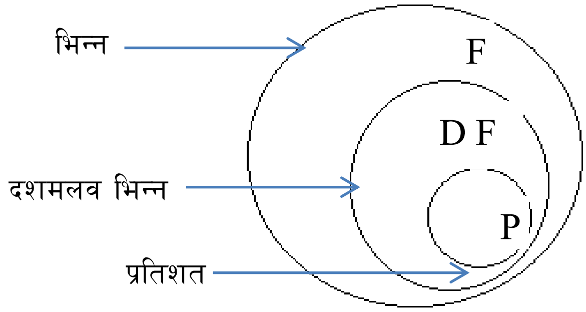
iv) 100 ओटा वर्गहरू मध्ये 40 ओटा वर्ग छन् । जसलाई भिन्न $\frac{40}{100}$ = 40% लेखिन्छ ।

सामान्य भिन्न, दसमलव भिन्न र प्रतिशतबिच सम्बन्ध

भिन्नको सिकाइमा सामान्य भिन्न, दसमलव भिन्न र प्रतिशत अलग अलग नगरी अन्तर सम्बन्धित गराएर सिकाउँदा सिकाइ प्रभावकारी हुन्छ । तिनीहरूबिचको अन्तर सम्बन्धलाई निम्न सङ्ख्या रेखाबाट देखाउन सकिन्छ ।



भिन्न, दसमलव भिन्न र प्रतिशत सबै खाले अभिव्यक्तिहरू समग्रमा भिन्नकै रूप हुन् । भिन्नको सिकाइमा सामान्य भिन्न, दसमलव भिन्न र प्रतिशतको बिच सम्बन्ध प्रष्ट्याउँदा चित्रको प्रयोग पनि उत्तिकै महत्त्वपूर्ण हुन्छ । यिनीहरूबिचको सम्बन्धलाई यसरी चित्रबाट देखाउन सकिन्छ ।



माथिको चित्रबाट के प्रष्ट हुन्छ भने सबै प्रतिशत र दसमलव भिन्नहरू भिन्न हुन् तर सबै भिन्नहरू दसमलव भिन्न र प्रतिशत होइनन् ।

निष्कर्ष: कुनै पनि सिकाइलाई प्रभावकारी तथा यथार्थपरक बनाउन ठोस वस्तुको प्रयोग गर्नुपर्दछ । भिन्नको अवधारणा सिकाइमा त झन ठोस वस्तुको प्रयोगले नै शिक्षणलाई व्यवहारिक र रुचिपूर्ण बनाई सिकाइले मूर्त रूप लिन्छ । जसले गर्दा विद्यार्थीहरूमा सिप तथा धारणाको विकास हुन्छ । तर कुनै सामग्रीको प्रयोग गर्नुअघि प्रयोग विधिबारे शिक्षकले तयारी तथा जानकारी हासिल गर्नु अति आवश्यक हुन्छ ।

सङ्ख्या ढाँचा (Number Pattern)

बालबालिकाहरूका लागि सङ्ख्यामा गरिने क्रियाकलापहरू साह्रै रमाइलो र उत्साहवर्द्धक हुने भएकोले यस किसिमको क्रियाकलाप गराउनु राम्रो हुन्छ । बालबालिकाहरूले अरू खाले खेलहरू भन्दा गणितीय खेल बढी रुचाउने गर्दछन् । यसका लागि क्याल्कुलेटर अति नै सहायक सिद्ध हुन्छ । खेल खेलिसकेपछि यो सधैँ किन सत्य हुन्छ भनी खोज गर्न सकियो भने झन फलदायी भएर आउँछ । प्राथमिक तहका बालबालिकाहरूले विभिन्न खाले फूलका पातहरू गनेर Fibonacci number 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …हरू (314 + 413 = 727) पत्ता लगाउन सक्छन् । कुनै कुनै सङ्ख्याको एक पटकमा सममितीय सङ्ख्या (Palindromic Number) नआउन सक्छ । यो सङ्ख्यालाई कति पटकमा सममितीय सङ्ख्या आउँछ भन्ने कुरा विद्यार्थीहरूलाई अन्वेषण गर्न दिनुपर्दछ । जस्तै 728 + 827 = 1555, 1555 + 5551= 7106, 7106 + 6017 = 13123, 13123 + 32131 = 45254 भएको हुनाले कुनै पनि सङ्ख्यालाई यसै प्रकार जोड्दा Palindromic Number आउँछ । त्यस्तै गरी अरू खालका हिसाबहरू गराउन सकिन्छ । तल दिइएका ५ ओटा सङ्ख्याहरू : 1, 153, 370, 371 र 407 का अङ्कहरूको धनको योगफलको बराबर उही सङ्ख्या आउँछ । जस्तै: $153 = 1^3+5^3+3^3$. तल दिइएका सात ओटा उदाहरण जस्तै अरू थुप्रै उदाहरणहरूको खोजी गर्न विद्यार्थीहरूलाई लगाउनुपर्दछ ।

सममितीय आकृति ल्याउने गुणनखण्डहरू	**एउटै अङ्क ल्याउने गुणनखण्डहरू**
1 × 1 = 1	37 × 3 = 111
11 × 11 = 121	37 × 6 = 222
111 × 111 = 12321	37 × 9 = 333
1111 × 1111 = 1234321	37 × 12 = 444
11111 × 11111 = 123454321	37 × 15 = 555

एउटै अङ्क तर फरक सङ्ख्यामा आउने उत्तर ल्याउने अभिव्यञ्जकहरू

$1 \times 8 + 1 = 9$

$11 \times 8 + 11 = 99$

$111 \times 8 + 111 = 999$

$1111 \times 8 + 1111 = 9999$

$11111 \times 8 + 11111 = 99999$

$1 \times 9 + 2 = 11$

$12 \times 9 + 3 = 111$

$123 \times 9 + 4 = 1111$

$1234 \times 9 + 5 = 11111$

$12345 \times 9 + 6 = 111111$

$9 \times 9 + 7 = 88$

$98 \times 9 + 6 = 888$

$987 \times 9 + 5 = 8888$

$9876 \times 9 + 4 = 88888$

$98765 \times 9 + 3 = 888888$

क्रम मिलाए आउने उत्तर ल्याउने अभिव्यञ्जकहरू

$1 \times 8 + 1 = 9$

$12 \times 8 + 2 = 98$

$123 \times 8 + 3 = 987$

$1234 \times 8 + 4 = 9876$

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

$1 \times 10 + 2 = 12$

$12 \times 10 + 3 = 123$

$123 \times 10 + 4 = 1234$

$1234 \times 10 + 5 = 12345$

$12345 \times 10 + 6 = 123456$

क्रम मिलाए तर बिजोर अङ्क आउने उत्तर ल्याउने अभिव्यञ्जकहरू

$1 \times 11 + 2 = 13$

$12 \times 11 + 3 = 135$

$123 \times 11 + 4 = 1357$

$1234 \times 11 + 5 = 13579$

$12345 \times 11 + 6 = 1357911$

गुणाङ्क र गुणनफलमा आउने अङ्कहरूबिच सम्बन्ध

$12345679 \times 1 = 12345679$

$12345679 \times 2 = 24691358$

$12345679 \times 4 = 49382716$

$12345679 \times 5 = 61728395$

$12345679 \times 7 = 86419753$

$12345679 \times 8 = 98765432$

$142857 \times 1 = 142857$

$142857 \times 2 = 285714$

$142857 \times 3 = 428571$

$142857 \times 4 = 571428$

$142857 \times 5 = 714285$

$142857 \times 6 = 857142$

$1 \times 9 + 2 = 11$

$12 \times 9 + 3 = 111$

$123 \times 9 + 4 = 1111$

$1234 \times 9 + 5 = 11111$

$12345 \times 9 + 6 = 111111$

$123456 \times 9 + 7 = 1111111$

$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

माथिको ढाँचा सँधै एकैनासको आउनाका कारण खोज्नुहोस् । यसलाई Repunit number भनिन्छ । यसमध्ये कुन कुन Repunit prime हुन छुट्ट्याउनुहोस् ।

महत्तम समावर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor and Lowest Common Multiples)

महत्तम समावर्तक वा म.स. (Highest Common Factor)

शिक्षकले विद्यार्थीहरूलाई चौरमा राखी 16 ओटा गुच्चाहरू एक ठाउँमा राख्नुहोस् । एक जना विद्यार्थीलाई 1/1 ओटाको समूह बनाउन लगाउनुहोस् । त्यस्तैगरी अर्को एक जना विद्यार्थीलाई 2/2 ओटाको समूह बनाउन लगाउनुहोस् । त्यस्तै विद्यार्थीलाई 3/3 ओटाको समूह बनाउन दिनुहोस् । यसरी बनाउँदा 3/3 ओटाको समूह बनी 1 ओटा बाँकी रहयो अर्थात 3 ले 16 लाई निःशेष भाग लागेन । त्यस्तै 4/4 ओटाको समूह बनाउन दिनुहोस् । यसपटक निःशेष भाग लाग्यो । तर 5/5 ओटाको समूह बनाउँदा निःशेष भाग लागेन । यसप्रकारको क्रियाकलाप 16 सम्म नै गरी सकेपछि निम्न विषयमा छलफल गर्नुहोस् :

16 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू कुन कुन हुन ? आआफ्नो कापीमा लेख्न लगाउने ।

16 लाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरू 1, 2, 4, 8 र 16 हुन् ।

त्यसैले 16 का गुणनखण्डहरू (Factors) 1, 2, 4, 8 र 16 भयो ।

यस्तै विद्यार्थीहरूलाई 13 ओटा गुच्चा दिएर माथि जस्तै क्रियाकलाप गर्न लगाउनुहोस् । 13 लाई 1 र 13 बाहेक अरू सङ्ख्याले निःशेष भाग जाँदैन । तसर्थ, 13 को गुणनखण्ड 1 र 13 मात्र हो । त्यसैले 13 एउटा रुढ सङ्ख्या (Prime number) हो भनी छलफल गर्नुहोस् ।

महत्तम समावर्त्यको धारणा प्रभावकारी तरिकाले शिक्षण गर्नका लागि विद्यार्थीहरूलाई गुणनखण्ड, साझा गुणनखण्डको धारणा दिनुपर्दछ । यसको लागि विभिन्न सङ्ख्याहरू प्रस्तुत गरी तिनीहरूको गुणनखण्ड निकाल्न लगाउनुपर्दछ । दिइएको सङ्ख्यालाई निःशेष भाग लाग्ने सङ्ख्याहरूलाई त्यस सङ्ख्याको गुणनखण्ड भनिन्छ । कुनै पनि संयुक्त सङ्ख्यामा यस्ता गुणनखण्डहरू दुईभन्दा बढी हुन सक्दछन् । जस्तैं 24 का गुणखण्डहरू 1, 2, 3, 4, 6, 8 र 12 हुन् । 24 लाई गुणनखण्डहरू सबैल निःशेष भाग जान्छ । दुई वा दुई भन्दा बढी गुणनखण्डले निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरूलाई तिनीहरूको साझा गुणनखण्ड भन्दछन् ।

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

दुई वा दुईभन्दा बढी सङ्ख्याहरूलाई निःशेष भाग जाने सङ्ख्याहरूमध्ये जो सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्डलाई महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) भनिन्छ । छोटकरीमा महत्तम समावर्तकलाई म.स. (HCF वा GCD-Greatest Common Divisor) लेखिन्छ ।

विभिन्न उदाहरणहरूबाट म.स.को धारणा सिकाउँदा विद्यार्थीहरू आफैँले म.स.को परिभाषा र यसका गुणहरू पत्ता लगाउन सक्छन् । म.स.को आधारभूत धारणा थाहा पाइसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई म.स. निकाल्ने अरू तरिकाहरू पनि सिकाउनुपर्छ । अब, म.स. कसरी निकाल्ने भन्ने छलफल गरौं ।

36 र 54 को म.स. निकाल्नका लागि 36 एकाइ र 54 एकाइ लम्बाइका डण्डीहरू विद्यार्थीहरूलाई दिने । ती दुवै डण्डीहरूलाई 2 एकाइ, 3 एकाइ, 4 एकाइ, 5 एकाइ, ... लम्बाइका डण्डीहरूले पालैपालो नाप्न लगाउनुहोस् । कुन कुनले दुवैलाई ठिक्क नाप्न सकियो कुनले सकिएन भन्ने पत्ता लगाउन भन्नुहोस् । दुवैलाई ठिक्क नाप्न सकिने सबभन्दा ठुलो नाप 18 एकाइको भएको कुरा विद्यार्थीले नै पत्ता लगाउँछन् । यसबाट 36 र 54 को म.स. 18 कसरी भयो भन्ने प्रष्ट हुन्छ ।

म.स. निकाल्ने केही विधिहरू निम्न छन् ।

१. गुणनखण्डहरूको समूह (Set of Factors)

36 र 54 को महत्तम समापवर्त्य परिभाषाबाट निकाल्ने तरिका यसप्रकार छ ।

36 का गुणखण्डहरू = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

54 का गुणखण्डहरू = {1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54}

36 र 54 का साझा गुणखण्डहरू = {1, 2, 3, 6, 9, 18}

36 र 54 का साझा गुणखण्डहरूको समूहमा सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड 18 हो । तसर्थ 18 लाई 36 र 54 को महत्तम समावतर्त्य (म.स.) भन्दछन् ।

२. रुढ खण्डीकरण विधि (Prime Factrization Method):

रुढ खण्डीकरण विधिबाट म.स. निकाल्ने सरल र प्रचलित विधि हो । यस विधिबाट म.स. निकाल्न विद्यार्थीहरूमा दिइएका सङ्ख्याहरूको रुढ खण्डीकरण गर्ने ज्ञान हुनुपर्दछ । दिइएका सङ्ख्याहरूको साझा गुणनखण्डहरूको गुणनफल निकालेर यस विधिबाट म.स. निकाल्न सकिन्छ । जस्तै 24 र 36 को गुणनखण्ड विधिबाट म.स. निकाल्दा,

24 का रुढ गुणखण्डहरू = $2 \times 2 \times 2 \times 3$

36 का रुढ गुणखण्डहरू = $2 \times 2 \times 3 \times 3$

24 र 36 का साझा गुणखण्डहरू = $2 \times 2 \times 3$

साझा गुणखण्डहरूको गुणनफल = म.स.= $2 \times 2 \times 3 = 12$

तसर्थ म.स. = 12

३. भेनचित्र विधि (Venn Diagram Method)

दिइएका सङ्ख्याहरूको रुढ गुणनखण्डहरूलाई समूह चित्रमा देखाएर पनि म.स.को अर्थपूर्ण ज्ञान दिन सकिन्छ । दिइएका दुई वा सोभन्दा बढी सङ्ख्याहरूको रुढ गुणनखण्डहरूलाई समूहका सदस्यहरूको रूपमा लिएर भेनचित्रमा देखाउनुपर्दछ । भेनचित्रमा साझा गुणनखण्डहरूले देखाउने भाग नै म.स. हो । साझा गुणनखण्डहरू गुणन गरी म.स. निकाल्न सकिन्छ । जस्तैः 24 र 36 को भेनचित्र विधिबाट म.स. निकाल्दा,

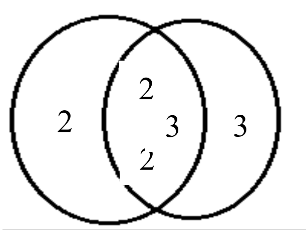
24 रुढ गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 2, 3}

36 रुढ गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 3, 3}

24 र 36 को साझा गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 3}

24 र 54 साझा गुणनखण्डलाई भेनचित्रमा देखाउँदा,

A=24 B=36



भेनचित्रबाट, 24 को रुढ गुणखण्डहरूको समूहलाई = A र 36 को रुढ गुणखण्डहरूको समूहलाई = B भए,

$A \cap B$ ले म.स. जनाउँछ । जसलाई चित्रमा छायाँ पारी देखाइएको छ ।

म.स. = साझा गुणनखण्डको गुणनफल

$= 2 \times 2 \times 3 = 12$

तसर्थ, म.स. = 12

तर यहाँ दोहोरिएका समूहका सदस्य पनि दोहऱ्याइएको छ भन्ने कुरा ख्याल गर्नुपर्दछ ।

४. भाग विधि (Division Method)

भाग विधिबाट म.स. निकाल्नको लागि विद्यार्थीहरूमा भाग सम्बन्धी ज्ञान हुनु आवश्यक छ । भाग विधिबाट म.स. निकाल्दा सानो सङ्ख्याले ठुलो सङ्ख्यालाई भाग गर्ने र बाँकी रहेको शेषले पुन: भाजकलाई भाग गर्दै जानुपर्दछ । अन्त्यमा जुन शेष आएको सङ्ख्याले भाग गर्दा नि:शेष आउँछ । त्यो सङ्ख्या (भाजक) नै ती दुई सङ्ख्याको म.स. हुन्छ । जस्तै: 24 र 36 को भाग विधिबाट म.स. निकाल्दा,

```
       1
24 ) 36
    -24     1
     12 ) 24
         -12
```

तसर्थ, म.स. = 12

यसरी विभिन्न तरिकाबाट हिसाब सिकाउँदा विद्यार्थीहरूलाई म.स. बुझ्न सजिलो मात्र नभई ल.स. सिक्नका लागि पूर्व तयारी गर्दछ ।

म.स.का दुई ओटा गुणहरू हुन्छन् :

(क) दिइएका सङ्ख्याहरूका म.स.ले दिइएका सङ्ख्याहरूलाई नि:शेष भाग लाग्छ ।

(ख) दिइएका सङ्ख्याको सबै साझा गुणनखण्डहरू म.स.का पनि गुणनखण्डहरू हुन्छन् ।

लघुत्तम समापवर्त्य वा ल.स. (Lowest Common Multiple)

लघुत्तम र सम+अपवर्त्य शब्दहरू मिलि लघुत्तम समापवर्त्य बनेको छ । यहाँ लघुत्तमको अर्थ सबभन्दा सानो, समको अर्थ समान र अपवर्त्यको अर्थ नि:शेष भाग जाने सङ्ख्या हो । यसरी लघुत्तम समापवर्त्यको धारणा सबभन्दा सानो नि:शेष भाग जाने सङ्ख्या भनी बुझिन्छ । दिइएको सङ्ख्याले नि:शेष भाग लाग्ने सङ्ख्याहरूलाई त्यस सङ्ख्याको अपवर्त्य भन्दछन् । कुनै पनि संयुक्त सङ्ख्यामा यस्ता अपवर्त्यहरू एकभन्दा बढी हुन सक्दछन् । दुई वा दुईभन्दा बढी सङ्ख्याहरूले नि:शेष भाग जाने जुनसुकै सङ्ख्याहरू ती दिइएको सङ्ख्याहरूका अपवर्त्य भन्दछन् । दुई वा दुई

भन्दा बढी सङ्ख्याहरूको समापवर्त्य धेरै सङ्ख्याहरू हुन सक्दछन् ।

लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

दिइएका सङ्ख्याहरूले निःशेष भाग जाने सबभन्दा सानो सङ्ख्यालाई लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple) भनिन्छ । छोटकरीमा लघुत्तम समापवर्त्यलाई ल.स. (LCM) लेखिन्छ ।

यसरी विभिन्न उदाहरणहरूबाट विद्यार्थीहरूलाई ल.स.को धारणा स्पष्ट गराउनुपर्छ । ल.स.को आधारभूत धारणा थाहा पाइसकेपछि मात्र विद्यार्थीहरूलाई ल.स. निकाल्ने तरिकाहरू सिकाउनुपर्दछ ।

6 र 9 को ल.स. निकाल्नका लागि शिक्षकले 6 एकाइ र 9 एकाइ लम्बाइका केही डण्डीहरू विद्यार्थीहरूलाई दिनुहोस् । ती दुवै डन्डीहरू बराबर नभएकाले 6 एकाइमा अर्को 6 एकाइ जोड्न लगाउनुहोस् । त्यस्तैगरी 9 एकाइमा अर्को 9 एकाइ जोड्न लगाउनुहोस् । यो प्रक्रिया दुबै डन्डीहरू बराबर नभएसम्म जारी राख्नुहोस् । दुबैको लम्बाइ बराबर हुँदा 18 एकाइ हुन्छ । तसर्थ 6 र 9 को ल.स. 18 हुन्छ । ल.स. निकाल्ने केही विधिहरू तल दिइएको छ ।

१. अपवर्त्यहरूको समूहबाट (Set of Multiples)

12 र 18 को ल.स. निकाल्न निम्न तरिका अपनाउनुपर्छ ।

12 का अपवर्त्यहरू = {12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, …}

18 का अपवर्त्यहरू = {18, 36, 54, 72, 90, 108, 126,..}

12 र 18 का साझा अपवर्त्यहरू = {36, 72,108, …}

यी साझा अपवर्त्यहरूको समूहमा 36 सबैभन्दा सानो अपवर्त्य हो । यसलाई 12 र 18 को ल.स. भन्दछन् ।

१.रुढ खण्डीकरण विधि (Prime Factorization Method) :

दिइएका सङ्ख्याहरूको सरल तरिकाबाट ल.स. निकाल्न रुढ खण्डीकरण विधिलाई प्रयोग गरिन्छ । दिईएका दुई वा सोभन्दा बढी सङ्ख्याहरूको साझा र बाँकी रुढ गुणनखण्डहरू गुणन गरी ल.स. निकाल्न सकिन्छ । जस्तैं, 24 र 36 को रुढ खण्डीकरण विधिबाट ल.स. निकाल्न निम्न तरिका अपनाउनुपर्दछ ।

24 रुढ गुणखण्डहरू = $2 \times 2 \times 2 \times 3$

36 रुढ गुणखण्डहरू = $2 \times 2 \times 3 \times 3$

24 र 36 का साझा गुणखण्डहरू = $2\times 2 \times 3$ बाँकी गुणखण्डहरू = 2×3

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणखण्डहरू

$= (2\times 2 \times 3) \times (2 \times 3) = 12 \times 6 = 72$

तसर्थ ल.स. (LCM) = 72

२. भेनचित्र विधि (Venn Diagram Method):

दिइएका सङ्ख्याहरूको रुढ गुणनखण्डहरूलाई समूह चित्रमा देखाएर पनि ल.स.को अर्थपूर्ण ज्ञान दिन सकिन्छ । दुई वा सोभन्दा बढी सङ्ख्याहरूको रुढ गुणनखण्डहरूलाई समूहका सदस्यहरूको रूपमा लिएर भेनचित्रमा देखाई साझा र बाँकी गुणनखण्डहरूको गुणनफलबाट ल.स. निकाल्न सकिन्छ । जस्तै 24 र 36 को भेनचित्र विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

24 को रुढ गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 2, 3}

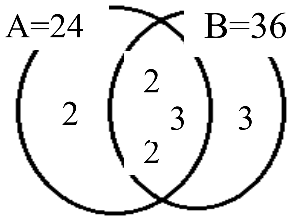
36 को रुढ गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 3, 3}

24 र 36 को साझा गुणखण्डहरूको समूह = {2, 2, 3}

24 को बाँकी रुढ गुणखण्डको समूह = {2}

36 को बाँकी रुढ गुणखण्डको समूह = {3}

24 र 36 का साझा र बाँकी गुणनखण्डलाई भेनचित्रमा देखाउँदा,



भेनचित्रबाट, 24 को रुढ गुणखण्डहरूको समूहलाई = A र 36 को रुढ गुणखण्डहरूको समूहलाई = B भए,

A ∪ B ले ल.स. जनाउँछ । जसलाई चित्रमा छायाँ पारी देखाइएको छ ।

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणखण्डहरू

$= (2\times 2 \times 3) \times (2 \times 3) = 12 \times 6 = 72$

तसर्थ, ल.स. (LCM) = 72

तर यहाँ दोहरिएका समूहका सदस्य पनि दोहऱ्याइएको छ भन्ने कुरा ख्याल गर्नुपर्दछ ।

३. भाग विधि (Division Method):

विद्यार्थीहरूमा ल.स.को प्रारम्भिक धारणा स्पष्ट भइसकेपछि भाग विधिबाट ल.स. शिक्षण गर्नुपर्दछ । भाग विधिबाट ल.स. निकाल्नु अघि सङ्ख्याहरूको रुढ खण्डीकरण बारेमा पनि ज्ञान हुनु आवश्यक हुन्छ । यस विधिबाट हिसाब गर्दा एउटा रुढ सङ्ख्याले दुई वा सोभन्दा बढी दिइएको सङ्ख्यालाई भाग खाने भएमा मात्र भाग गर्नुपर्दछ । अन्त्यमा सबै गुणनखण्डहरूको गुणन गरी ल.स. निकालिन्छ । जस्तै 24 र 36 को भाग विधिबाट ल.स. निकाल्दा,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 24,\ 36 \\ \hline 2 & 12,\ 18 \\ \hline 3 & 6,\ 9 \\ \hline & 2,\ 3 \end{array}$$

ल.स. (LCM) = $2\times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

तसर्थ, ल.स. (LCM) = 72

ल.स.का दुई ओटा गुणहरू हुन्छन्

(क) दिइएका सङ्ख्याहरूको ल.स. ती सङ्ख्याहरूको साझा अपवर्त्य हुन्छ ।

(ख) दिइएका सङ्ख्याहरूको प्रत्येक साझा अपवर्त्य ल.स.को पनि अपवर्त्य हुन्छ ।

म.स. र ल.स. बिचको सम्बन्ध (Relationship between HCF and LCM)

- यदि दुई सङ्ख्याहरूमध्ये एउटा सङ्ख्या अर्को सङ्ख्याको अपवर्त्य (Multiple) छ भने सानो सङ्ख्या म.स. र ठुलो सङ्ख्या ल.स. हुन्छ । मानौँ, पहिलो सङ्ख्या = 5 र दोस्रो सङ्ख्या = 20 छ । यहाँ, 5 को अपवर्त्य 20 हो । 5 र 20 को म.स.= 5 (सानो सङ्ख्या) हुन्छ भने 5 र 20 को ल.स. = 20 (ठुलो सङ्ख्या) हुन्छ ।
- यदि दुई रुढ सङ्ख्याहरू p र q सह-रुढ सङ्ख्याहरू (Co-prime numbers) छन् भने ती सङ्ख्याहरूको म.स. 1 हुन्छ र ल.स. $p \times q$ हुन्छ । जस्तैः 9 र 13 सह-रुढ सङ्ख्याहरू (Co-prime numbers) हुन् । 9 र 13 को म.स.= 1 र 9 र 13 को ल.स. = 117 हुन्छ ।
- कुनै दुई सङ्ख्याहरूको गुणनफल ती दुई सङ्ख्याहरूको म.स. र ल.स.को गुणनफलसँग बराबर हुन्छ । मानौँ, 24 र 36 दुई सङ्ख्याहरू छन् ।

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3, \qquad 36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$

म.स. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

अब, 24 र 36 को गुणनफल $= 24 \times 36 = 864$

म.स. र ल.स.को गुणनफल $= 12 \times 72 = 864$

$\therefore$ 24 र 36 को गुणनफल = म.स. र ल.स.को गुणनफल

वर्ग र वर्गमूल (Square and Square root)

8 को वर्गसङ्ख्या 64 हो भने 64 को वर्गमूल 8 हो ।

के $\frac{1}{64}$ को $\frac{1}{8}$ वर्गमूल हुन्छ ? वर्गसङ्ख्या र त्यसैको वर्गमूलमा कुन ठुलो छ ? वर्गसङ्ख्या र त्यसैको वर्गमूलमा के फरक छ ? त्यसैले वर्ग सङ्ख्या र त्यसैको वर्गमूलमा प्राकृतिक सङ्ख्यामा मात्र वर्ग सङ्ख्या ठुलो हुन्छ तर भिन्न र प्राकृतिक सङ्ख्याको प्रणाली फरक भएकाले गर्दा सानो र ठुलोको तुलना गर्न मिल्दैन । शिक्षकले एउटा विद्यार्थीलाई 20cm लामो रेखा खिच्न लगाउनुहोस् । सो रेखामा एउटा वर्ग खिच्न लगाउनुहोस् । अन्य विद्यार्थीहरूलाई त्यसको क्षेत्रफल कति होला भनी प्रश्न गर्नुहोस् । यस वर्गको क्षेत्रफल $400cm^2$ हुन्छ । त्यसैले वर्गको क्षेत्रफल वा वर्ग निकाल्न त्यसको एक भागलाई त्यति नै परिमाणले गुणन गर्नुपर्दछ । त्यस्तै शिक्षकले विद्यार्थीहरूलाई चौरमा लैजाने र वर्गाकार रूपमा बस्न लगाउनुहोस् । त्यहाँ जम्मा 52 विद्यार्थीहरू थिए । 49 जना वर्गाकार रूपमा बसे तर 3 जना बस्न पाएनन् । उनीहरूलाई अलग अलग राख्ने अनि प्रश्न गर्ने वर्गाकार रूपमा बसेका विद्यार्थीको अगाडि पङ्तिका कति विद्यार्थी छन् ? विद्यार्थीहरूले 7 जना भनेर जवाफ दिए । अर्थात, लम्बाइ तथा चौडाइमा 7/7 जना छन् भनेर जवाफ दिए । त्यसैले 49 को वर्गमूल 7 हो । अर्थात, $\sqrt{49} = 7$ हुन्छ । त्यस्तै 7 को वर्गसङ्ख्या 49 हो । अर्थात, $7^2 = 49$ हुन्छ ।

यस्तै उदाहरणहरू विद्यार्थीहरूलाई दिनुहोस् । वर्ग तथा वर्गमूल एकआपसमा उल्टो क्रिया (Inverse relationship) हुने कुरा विभिन्न उदाहरणहरूबाट प्रष्ट पारिदिनुहोस् ।

पूर्ण वर्ग सङ्ख्या र तिनका केही विशेषताहरू

कुनै पनि सङ्ख्यालाई सोही सङ्ख्याले गुणन गर्दा आउने सङ्ख्यालाई दिइएको सङ्ख्याको वर्गसङ्ख्या

भनिन्छ । पूर्ण सङ्ख्याको वर्ग नै पूर्ण वर्ग सङ्ख्या हो । वर्ग र वर्गमूलसँग सम्बन्धित पूर्ण वर्ग सङ्ख्याका केही विशेषताहरू पहिचान गर्न लगाई विद्यार्थीलाई सिकाइ कार्यमा सरिक गराउन सकेमा सिकाई चिरस्थायी हुनुका साथै विद्यार्थीहरूको सक्रिय सहभागिता कायम पनि गराउन सरल हुने देखिन्छ । त्यसैगरी सिकाइप्रति अभिरुचि पैदा गर्न पनि यस्ता क्रियाकलापबाट सहयोग पुग्ने हुन्छ । यस कुरालाई महसुस गरी वर्ग सङ्ख्याका केही विशेषताहरू प्रस्तुत गरिएको छ ।

सङ्ख्या र तिनीहरूको वर्गको एउटा तालिका तल दिइएको छ :

सङ्ख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
वर्ग	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

माथिको तालिका भएका 1, 4, 9, … ,100 लाई क्रमशः 1, 2, 3, … ,10 को वर्गसङ्ख्या भनिन्छ । यिनीहरू पूर्ण वर्ग हुन् ।

१. माथिको तालिकाबाट के थाहा पाउन सकिन्छ भने वर्ग सङ्ख्याका पछिल्ला अङ्कहरू 0, 1, 4, 5, 6, 9 मात्र हुन्छन् । अर्थात, अन्त्यमा 2, 3, 7 वा 8 आउने सङ्ख्याहरू पूर्ण वर्ग हुन सक्दैनन् । हुन त अन्त्यमा 0, 1, 4, 6 वा 7 आउँदैमा त्यो सङ्ख्या पूर्ण वर्ग नै हुन्छ भन्न पनि सकिदैन । जस्तैं : 10, 11, 14, 15, 26, 17 आदि सङ्ख्याहरू पूर्ण वर्ग होइनन् ।

२. अन्त्यमा शून्य आउने पूर्ण सङ्ख्यामा शून्यको सङ्ख्या जहिले पनि जोर हुन्छ । जस्तै : 100, 10000, 1000000 आदि पूर्ण वर्ग सङ्ख्या हुन् किनकि यिनीहरूको अन्त्यमा शून्यको सङ्ख्या क्रमशः 2, 4, 6 छन् । 30, 1000, 41000 आदि पूर्ण वर्ग सङ्ख्या हुन सक्दैनन् किनकि यिनीहरूको अन्त्यमा शून्यको सङ्ख्या क्रमशः 1, 3, 3 बिजोर सङ्ख्याहरू छन् ।

३. बिजोर सङ्ख्याको वर्ग सङ्ख्या पनि बिजोर नै हुन्छ । $1^2 = 1, 3^2 = 9, 5^2 = 25$ आदि ।

४. जोर सङ्ख्याको वर्ग सङ्ख्या पनि जोर नै हुन्छ । $2^2 = 4, 4^2 = 16, 6^2 = 36$ आदि ।

५. वर्ग सङ्ख्याहरूलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ ।

$2^2 = 4 = 3 \times 1 + 1$ वा 4×1

$3^2 = 9 = 3 \times 3$ वा $4 \times 2 + 1$

$4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$ वा 4×4

$5^2 = 25 = 3 \times 8 + 1$ वा $4 \times 6 + 1$

$6^2 = 36 = 3 \times 12$ वा 4×9

यसबाट निम्न लिखित निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ :

(क) कुनै पनि वर्ग सङ्ख्या 3 को Multiple वा त्यो भन्दा 1 ले कम हुन्छ ।

(ख) कुनै पनि वर्ग सङ्ख्या 4 को Multiple वा त्यो भन्दा 1 ले बढी हुन्छ ।

६. कुनै दुई ओटा वर्गहरूको सम्बन्धअन्तर्गत एउटा अर्काको दोब्बर हुन सक्दैन ।

यदि m र n दुई ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरू भए $m^2 \neq 2n^2$ र $n^2 \neq 2m^2$ हुन्छ ।

७. यदि n कुनै प्राकृतिक सङ्ख्या छ भने $(n+1)^2 - n^2 = (n+1) + n$ लेख्न सकिन्छ ।

८. तिन अङ्कको वर्ग सङ्ख्याको बिचमा 1 वा 3 आउँदैन । जस्तैं :

सङ्ख्या	10	11	12	13	14	15	16	17
वर्ग	100	121	144	169	196	225	256	289

९. त्रिभुजाकार सङ्ख्याहरूमा (Triangular number) प्रत्येक n^{th} तथा $(n+1)^{th}$ पदहरूको योगफल वर्ग सङ्ख्या हुन्छ । जस्तै : 1, 3, 6, 10, 15, 21 सङ्ख्याहरूमा 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, 10 + 15 = 25, 15 + 21 = 36 आदि ।

१०. अन्त्यमा 5 आउने कुनै पनि वर्ग सङ्ख्याको वर्ग निकाल्दा निम्नअनुसार पनि निकाल्न सकिन्छ ।

$15^2 = 1 \times 200 + 5^2 = 225$

$25^2 = 2 \times 300 + 5^2 = 625$

$55^2 = 5 \times 600 + 5^2 = 3025$

$105^2 = 10 \times 1100 + 5^2 = 11025$ आदि ।

११. तिन ओटा प्राकृतिक सङ्ख्याहरू x, y, z मा $x^2 + y^2 = z^2$ को स्वरूपमा व्यक्त गर्न सकिने यस्ता सङ्ख्याहरूलाई Pythagorean Triplets भनिन्छ । जस्तै: $3^2 + 4^2 = 5^2$, $6^2 + 8^2 = 10^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$ आदि ।

यस्ता सङ्ख्याहरू 2 तरिकाले निकाल्न सकिन्छ ।

(क) यदि कुनै बिजोर सङ्ख्या x (1 बाहेक) भए, यसका Triplets सङ्ख्याहरू क्रमशः x, $\frac{x^2-1}{2}$, $\frac{x^2+1}{2}$ हुन्छन् । जस्तैं : x = 3 राख्यो भने Triplets हरू क्रमशः 3, 4 र 5 हुन्छन् ।

(ख) यदि कुनै प्राकृतिक सङ्ख्या x (1 बाहेक) हो भने, यसका Triplets सङ्ख्याहरू क्रमशः 2x, x^2 -1, x^2 +1 हुन्छन् । जस्तैं : x = 3 नै राख्यो भने Triplets हरू क्रमशः 6, 8 र 10 आउँछन् जहाँ, $6^2 + 8^2 = 10$ हुन्छ । यहाँ, 6, 8 र 10 Triplets सङ्ख्याहरू हुन्छन् ।

१२. कुनै पनि सङ्ख्या x र y लाई $(2xy)^2 + (x^2 – y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$ को रूपमा पनि व्यक्त गर्न सकिन्छ । जस्तै, x = 3 र y = 4 राख्यो भने (2×3×4)2 + (32 – 42)2 = (32 + 42)2

अथवा, (24)2 + 72 = 252

अथवा, 576 + 49 = 625

अथवा, 625 = 625

१३. यहाँ, 112 = 121

1112 = 12321

11112 = 1234321

………………………

यसै गरी 1111111112 = 12345678987654321 हुन्छ ।

यसरी आएको दायाँ पक्षको अङ्कहरूको योगफल पनि बायाँ पक्षको वर्ग नै आउँछ । जस्तै :

दायाँ पक्ष	बायाँ पक्ष
1 + 1 = 2	1 + 2 + 1 = 4 = 22

1 + 1 + 1 = 3   1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 32

………………   ………………………

1 + 1 + 1 + … + 1 = 9   1 + 2 + 3 + … + 9 + 8 + … + 2 + 1 = 81 = 92

१४. वर्गहरूको सम्बन्ध निम्नअनुसारको पनि हुन्छ :

12 + 22 + 22 = 32

22 + 32 + 62 = 72

32 + 42 + 122 = 132 आदि ।

१५. प्राकृतिक सङ्ख्याहरूमध्ये वर्ग सङ्ख्याका धनात्मक गुणनखण्डहरूको सङ्ख्या विजोर र अन्यको जोर हुन्छ ।

१६. कुनै पनि धनात्मक पूर्णाङ्क n को वर्ग पहिला n ओटा विजोर सङ्ख्याहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ । जस्तै : 1 + 3 + 5 + 7 = 42

१७. n औँ वर्ग सङ्ख्या (n -1) औं र n औं त्रिभुजाकार सङ्ख्याहरूको योगफलसँग बराबर हुन्छ ।

१८. कुनै पनि पूर्ण वर्ग सङ्ख्यामा भएका अङ्कहरूको योगफल सधैं 1, 4, 7 वा 9 हुन्छ । ठूला सङ्ख्याहरूमा अङ्कहरूको योगफल एक अङ्कको सङ्ख्या नआउँदासम्म जोड्ने प्रक्रिया जारी राख्नु पर्दछ । जस्तै : 7744 मा 7 + 7 + 4 + 4 = 22, 2 + 2 = 4.

विद्यार्थीहरूलाई सङ्ख्या सम्बन्धी माथि उल्लिखित सम्बन्धहरूबाट थप ढाँचाहरूको विकास गर्न लगाउन सकिन्छ । यस्ता क्रियाकलापले विद्यार्थीहरूमा गणितीय प्रारम्भिक सोचाई (Intuitive knowledge) को विकास गराउन सहयोग गर्दछ ।

ऐकिक नियम, नाफा नोक्सान र साधारण व्याज
(Unitary Method, Profit and Loss and Simple Interest)

ऐकिक नियम (Unitary Method)

ऐकिक नियमको पाठ शुरु गर्नुभन्दा अगाडि शिक्षकले प्रत्यक्ष र अप्रत्यक्ष विचरण लेखिएको निम्न अनुसारको चार्ट प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

15 ओटा कलमको मूल्य बराबर रु.225 पर्छ भने 10 ओटा कलमको मूल्य कति पर्ला ?

15 ओटा कलमको मूल्य = रु.225

1 ओटा कलमको मूल्य $= \frac{225}{15}$ हुन्छ

10 ओटा कलमको मूल्य = रु. $\frac{225}{15} \times 10$ हुन्छ ।

यस उदाहरणमा परिमाण घट्दा मूल्य पनि घट्छ र परिमाण बढ्दा मूल्य पनि बढ्छ भन्ने धारणा दिन चार्टमा वाण चिह्न (Arrows) ले स्पष्ट पार्न सकिन्छ । यसका साथै यस्ता परिमाणमा थोरै निकाल्न भाग र धेरै निकाल्न गुणन गर्नुपर्नेबारे पनि छलफल गर्ने । यस्तै उदाहरण विद्यार्थीहरूलाई

बताउन लगाई हल गर्न लगाउन । तर 1 भन्दा सानो भिन्नको परिमाणबाट बढी वा घटी परिमाण निकाल्न के गर्नुपर्दछ भन्ने कुरा निम्नअनुसारका उदाहरणद्वारा छलफल गर्नुहोस् ।

एक बोरा चामलको $\frac{3}{5}$ भागको मूल्य रु. 540 पर्छ भने $\frac{3}{4}$ भागको मूल्य कति पर्ला ?

यस प्रश्नको उत्तर निकाल्न एक जना विद्यार्थीलाई बोर्डमा हल गर्न लगाउनुहोस् ।

$\frac{3}{5}$ भाग बराबर रु. 540

1 भाग बराबर रु. $540 \times \frac{5}{3} =$ रु. 900

$\frac{3}{4}$ भाग बराबर रु.$900 \times \frac{3}{4} =$ रु.675

यसमा $\frac{3}{5}$ भागको मूल्यभन्दा 1 भागको मूल्य बढेको छ । त्यसैले यहाँ बढी मूल्य निकाल्न भाग गर्नुपर्छ । यसैगरी यस्ता प्रत्यक्ष विचरण सम्बन्धी समस्याहरू एक एक ओटा बनाउन लगाउने र समाधान गरेपछि उत्तरहरू नजिकको साथीलाई जाँच्न लगाउनुहोस् ।

शिक्षकले एक जना विद्यार्थीलाई अप्रत्यक्ष विचरणका समस्या बोर्डमा लेख्न लगाउने गर्नुहोस् । 10 जना ज्यामीले 15 दिनमा एउटा टहरा निर्माण गर्न सक्छन् भने 10 दिनमा सिध्याउन कति ज्यामी चाहिएलान् ?

यो प्रश्न किन अप्रत्यक्ष विचरण हो ? छलफल गर्नुहोस् । एउटा परिमाण बढ्यो भने अर्को परिमाण घट्छ पहिलो परिमाण घट्यो भने दोस्रो परिमाण बढ्छ । त्यसैले यस्ता समस्याहरू अप्रत्यक्ष विचरणका हुन भनी छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, 15 दिनमा सो टहरा बनाउन 10 जना ज्यामी चाहिन्छ ।

1 दिनमा सो टहरा बनाउन 10×15 जना ज्यामी चाहिन्छ । (थोरै दिनमा काम सक्न ज्यामी सङ्ख्या धेरै चाहिन्छ, त्यसैले गुणन गरिएको हो ।)

10 दिनमा सो टहरा बनाउन $\frac{10 \times 15}{10} = 15$ जना ज्यामी चाहिन्छ । (धेरै दिनमा काम सक्न थोरै ज्यामी भए

पुग्ने भएकाले भाग गरिएको हो ।)

यसलाई वाण चिह्नद्वारा यस प्रकार देखाउन सकिन्छ ।

यसैगरी तिन ओटा परिमाण भएका ऐकिक नियम तथा समानुपात सम्बन्धी समस्याहरू हल गर्न अपनाउनुपर्ने सतर्कता सम्बन्धी छलफल गर्नुहोस् । दुई परिमाणहरू बीचको सम्बन्धबारे क्रियाहरू भईसकेपछि मात्र तेस्रो परिमाणसँग क्रिया गर्नुपर्छ, जुन दिइएको समस्यामा भर पर्छ । त्यसैले शिक्षकले निम्नअनुसार एउटा उदाहरण प्रस्तुत गरी छलफल गर्नुहोस् ।

यदि 8 जना ज्यामीलाई $\frac{1}{3}$ खेत खन्न 20 दिन लाग्छ भने 10 जना ज्यामीलाई $\frac{2}{3}$ खेत खन्न कति दिन लाग्ला ?

यस प्रकारको उत्तर निकाल्न शिक्षकले पहिले यसप्रकार गरी छोटकरीमा लेख्ने ।

ज्यामी	खेत	दिन
8	$\frac{1}{3}$	20
10	$\frac{2}{3}$	?

ऐकिक नियमद्वारा यसरी समाधान गर्न सकिन्छ ।

8 जना ज्यामीलाई $\frac{1}{3}$ खेत खन्न 20 दिन लाग्छ ।

1 जना ज्यामीलाई $\frac{1}{3}$ खेत खन्न 20×8 दिन लाग्छ ।

10 जना ज्यामीलाई $\frac{1}{3}$ खेत खन्न $\frac{20 \times 8}{10}$ दिन लाग्छ ।

10 जना ज्यामीलाई 1 खेत खन्न $\frac{20 \times 8}{10} \times 3$ दिन लाग्छ ।

10 जना ज्यामीलाई $\frac{2}{3}$ खेत खन्न $\frac{20 \times 8}{10} \times \frac{2}{3} \times 3$ दिन लाग्छ । $= 32$ दिन

ज्यामी	खेत	दिन
8 ↓	$\frac{1}{3}$ ↑	20 ↑
10	$\frac{2}{3}$	?

त्यसैले, यसलाई Chain Rule अनुसार लेख्दा,

$8 \times \frac{2}{3} \times 20 = 10 \times \frac{1}{3} \times x$ हुन्छ ।

अथवा, $x = \frac{8 \times 2 \times 20 \times 3}{10 \times 3}$ दिन $= 32$ दिन

शिक्षकले ज्यामी, खेत र दिनको परस्पर सम्बन्ध प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष कस्तो हुन्छ सोबारे छलफल गर्ने । यस्तै प्रश्नहरू विद्यार्थीहरूलाई बनाउन लगाई समस्याको समाधान छलफल गर्ने ।

नाफा नोक्सान (Profit and Loss)

विद्यार्थीहरूलाई दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित व्यवहारिक उदाहरणहरू दिएर नाफा नोक्सान शिक्षण गर्न सकिन्छ । नाफा नोक्सान व्यापारिक क्षेत्रसँग सम्बन्धित विषयवस्तु भएकाले स्थानीय तहमा रहेको पसलेको सहायताबाट नाफा नोक्सानको अवधारणा दिन सकिन्छ । स्थानीय पसलेको सहयोगले क्रय मूल्य, विक्रय मूल्यको अर्थपूर्ण धारणा प्रष्ट बनाउन सकिन्छ । नाफा वा

नोक्सानको लागि सामान खरिद र बिक्री गर्नुपर्ने हुन्छ । सामान खरिद गरि आफैँ वा अन्य व्यक्तिले प्रयोग गरेमा नाफा वा नोक्सान के भयो निकाल्न मिल्दैन । कुनै पनि वस्तु किन्दा परेको मोल क्रय मूल्य (Cost Price) र सो वस्तु ग्राहकलाई बिक्री वा बेच्ने मूल्य विक्रय मूल्य (Selling Price) हुन्छ ।

नाफा नोक्सानको शिक्षणको लागि शिक्षकले एउटा व्यवहारिक उदाहरण प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

हर्क साहुले एउटा साडी रु.2000 मा किनेर रु.2250 मा विक्री गर्दा के कति नाफा वा नोक्सान भयो होला ?

यहाँ, हर्क साहुले एउटा साडी किन्दा तिरेको मूल्य रु.2000 क्रय मूल्य हो यसलाई छोटकरीमा CP (Cost Price) भनिन्छ भने उनले साडी बिक्री गरेको मूल्य रु.2250 विक्रय मूल्य हो यसलाई छोटकरीमा SP Selling Price) भनिन्छ । उनले साडीलाई किनेको मूल्यभन्दा बेचेको मूल्य बढी भएकाले नाफा हुन्छ ।

यहाँ, साडीको क्रय मूल्य (CP) = रु.2000

साडीको विक्रय मूल्य (SP) = रु.2250

विक्रय मूल्य (SP) > क्रय मूल्य (CP) भएकाले नाफा हुन्छ ।

अब, नाफा (Profit) = विक्रय मूल्य (SP) - क्रय मूल्य (CP)

= रु.2250 - रु.2000 = रु.250

तसर्थ, हर्क साहुलाई रु.250 नाफा हुन्छ ।

यदि हर्क साहुले उक्त साडीलाई रु.1875 मा बिक्री गरेको भए उनलाई के कति नाफा वा नोक्सान हुन्थ्यो ? छलफल गर्नुहोस् ।

यदि क्रय मूल्य (CP), विक्रय मूल्य (SP), नाफा (Profit) र नोक्सान (Loss) भए निम्न सूत्र प्रतिपादन गर्न सकिन्छ :

विक्रय मूल्य (SP) > क्रय मूल्य (CP) भएमा,

,नाफा (Profit) = विक्रय मूल्य (SP) - क्रय मूल्य (CP) ………… (i)

क्रय मूल्य (CP) > विक्रय मूल्य (SP) भएमा,

नोक्सान (Loss) = क्रय मूल्य (CP) - विक्रय मूल्य (SP) …………(ii)

नाफा (Profit)% = $\frac{SP-CP}{Cost\ Price} \times 100\%$ = (Profit)% = $\frac{profit}{Cost\ Price} \times 100\%$ ……..(iii)

नोक्सान (Loss)% = $\frac{CP-SP}{Cost\ Price} \times 100\%$ = (Loss)% = $\frac{Loss}{Cost\ Price} \times 100\%$ ……..(iv)

नाफा नोक्सान सम्बन्धी व्यवहारिक उदाहरणहरू विद्यार्थीहरूलाई दिएर माथिका सूत्रहरू प्रयोग गर्न अभ्यस्त बनाउनुहोस् । कक्षामा नै भूमिका अभिनय विधि र नमुना मुद्रा, सामान आदिको प्रयोगबाट पनि नाफा नोक्सानको अवधारणा विकास गराउन सकिन्छ ।

साधारण व्याज (Simple Interest)

सामान्यतया व्यवहारिक रूपमा गरिने विभिन्न कार्यमा आर्थिक कारोबार गर्ने गरिन्छ । जस्तै घर जग्गा खरिद गर्न, विभिन्न चाडपर्व मनाउन, विवाह व्रतवन्ध जस्ता कार्य गर्न आवश्यक रकम नपुग भएमा व्यक्तिले व्यक्ति तथा वित्तीय संस्थाहरूबाट निश्चित समयको लागि तोकिएको व्याजदर

अनुसार ब्याज तिर्ने गरी ऋण लिने कार्य गरिन्छ । साधारण ब्याज शिक्षणको लागि शिक्षकले एउटा व्यवहारिक उदाहरण प्रस्तुत गर्ने । "विष्णु नारायणले चाडपर्व मनाउनका लागि हिराकाजीसँग रु.5000 ऋण लिएछन् । उनले 1 वर्ष पछि सयकडा 15 को दरले ब्याज सहित कति रकम तिरेछन् ?" छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ, विष्णुनारायणले ऋण स्वरूप लिएको रकम रु. 5000 साँवा हो । उनले रकम फिर्ता गर्ने समय 1 वर्ष हो । उनले तिर्ने ब्याज दर सयकडा 15 अर्थात, रु.100 को एक वर्षको ब्याज रु.15 वा 15% हो । उनले तिर्ने जम्मा रकम निम्न अनुसार निकाल्न सकिन्छ :

सयकडा 15 ब्याजदरले

रु.100 को 1 वर्षपछिको ब्याज रु.15 हुन्छ

रु.1को 1 वर्षपछिको ब्याज रु. $\frac{15}{100}$ हुन्छ

रु.5000 को 1 वर्षपछिको ब्याज रु. $\frac{15}{100} \times 5000$ हुन्छ ।

= रु.750

अर्थात, सावाँ (P) = रु.5000 समय (T) = 1 वर्ष ब्याजदर (R) = 15%

अब, ब्याज (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$

अथवा, ब्याज (I) = $\frac{\text{सावाँ} \times \text{समय} \times \text{ब्याजदर}}{100}$

ब्याज (I) = $\frac{5000 \times 1 \times 15}{100}$ = रु.750

विष्णु नारायणले हिराकाजीलाई तिर्नुपर्ने जम्मा रकम = रु.5000 + रु.750 = रु.5750 हुन्छ ।

यसरी कुनै पनि व्यक्ति वा संस्थाले ऋण बापत लिएको रकमलाई सावाँ (Principle) भनिन्छ । यसलाई P ले जनाइन्छ । त्यस्तैगरी तोकिएको अवधिलाई समय (Time) भनिन्छ । समयलाई वर्षमा राखेर हिसाब गरिन्छ, यसलाई T ले जनाइन्छ । वार्षिक रूपमा तिनुपर्ने थप रकम जुन सयमा कति भनेर हेरिन्छ त्यो ब्याजदर (Interest Rate) हो । यसलाई R ले जनाइन्छ । दिइएको रकममा निश्चित समयपछि थपिएर आउने रकम साधारण ब्याज (Simple Interest) हो । यसलाई I ले जनाइन्छ । तिर्नुपर्ने जम्मा रकम मिश्रधन (Amount) हो । यसलाई A ले जनाइन्छ ।

तसर्थ, यदि सावाँ (P), समय (T), ब्याजदर (R), साधारण ब्याज (I) र मिश्रधन (A) भए, ब्याज निकाल्ने सूत्रबाट अरू सूत्रहरू विद्यार्थीहरूलाई नै प्रतिपादन गर्न लगाउनुहोस् ।

$I = \frac{P \times T \times R}{100}$ …….. (i) $P = \frac{100 \times I}{T \times R}$ …….. (ii) $T = \frac{100 \times I}{P \times R}$ …….. (iii)

$R = \frac{100 \times I}{P \times T}$ …….. (iv) A = P + I ……… (v)

$P = \frac{100 \times A}{100 + T \times R}$ …….. (vi)

रु.7200 लाई 5 वर्षसम्म ब्याजमा लगाउँदा रु.1080 ब्याज पाइन्छ भने ब्याज दर कति होला ?

यहाँ, सावाँ (P) = रु.7200, समय (T) = 5 वर्ष, ब्याज (I) = रु.1080

र ब्याजदर (R) = ?

सूत्र अनुसार, $R = \frac{100 \times I}{P \times T} = \frac{100 \times 1080}{7200 \times 5} = 3\%$

तसर्थ, ब्याजदर 3% हुन्छ ।

माथिका उदाहरणहरू विद्यार्थीहरूलाई नै बनाउन दिई समाधान गर्न समेत अभ्यस्त गराउनुहोस् ।

३. क्षेत्रमिति (Mensuration)

भौतिक संसारमा अहिले हरेक वस्तुको पहिचान त्यसको नापद्वारा गरिन्छ । कोठामा आवश्यक वस्तुहरू कति कति नापका चाहिन्छन् ? घरबाट विद्यालय पुग्न ति दूरी हिड्नु पर्ला ? ८ मिटर लम्बाइ र ५ मिटर चौडाइ भएको कार्पेटले कति ठाउँ ढाक्छ ? आदि दैनिक जीवनसँग सम्बन्धित वस्तुहरू नापसँग सम्बन्धित रहेका छन् । कतिपय वस्तुहरूको नाप सूत्र बिना नै निकाल्न सकिन्छ भने कुनैको सूत्रको प्रयोगद्वारा सहज र सरल हुन्छ । कुनै समतलमा कोरिएका ज्यामितीय आकारहरूको लम्बाइ तथा परिमिति त्यसको भुजाहरूको नापद्वारा निकाल्ने तथा त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुज र वृत्तको क्षेत्रफल निकाल्ने, लागत खर्च आदिका सूत्रको प्रतिपादनका साथै समस्याहरूको समाधान शिक्षण गर्ने तरिका क्षेत्रमितिमा अध्ययन गरिन्छ । त्यसैगरी प्रिज्म, पिरामिड, बेलना, गोला र सोलीको सतहको क्षेत्रफल तथा आयतन सम्बन्धी सूत्रहरूको प्रतिपादन तथा तत्सम्बन्धी समस्याहरूको समाधान गर्ने तरिकाहरू यसअन्तर्गत पर्दछन् । भौतिक संसारका विभिन्न वस्तुहरूमध्ये प्रिज्म, पिरामिड, घन, षडमुखा, सोली, वेलना, टेट्राहेड्रन आदि आकारका वस्तुहरू बनाउन कति परिमाणको धातुहरू आवश्यक पर्दछ भनी थाहा पाउन सतहको क्षेत्रफल तथा त्यसको क्षमता तथा ओगट्ने ठाउँ बुझ्न आयतन निकालिन्छ ।

क्षेत्रमितिको शाब्दिक अर्थ लम्बाइ, क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउने गणितीय नियम अथवा नाप्ने प्रक्रिया भन्ने हुन्छ । त्यसैले विद्यालय तहमा क्षेत्रमिति एकाइमा समतलिय ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल र परिमिति, ठोस आकृतिहरूको सतहको क्षेत्रफल र आयतन पत्ता लगाउने, त्यसैगरी क्षेत्रफल र आयतनसँग सम्बन्धित दैनिक जीवनमा आईपर्ने समस्याहरू समाधान गर्ने जस्ता शैक्षिक उपलब्धि हासिल गराउने लक्ष्य राखिएको छ ।

नेपालको विद्यालय गणित पाठ्यक्रम र पाठ्यपुस्तकमा कक्षा २ देखि कक्षा १० सम्म क्षेत्रमितिलाई क्रमैसँग समावेश गरिएको छ । गणित शिक्षणसिकाइ भनेको हिसाब गर्ने र उत्तर निकाल्ने प्रक्रिया हो भन्ने परम्परागत धारणाबाट प्रेरित भएर क्षेत्रमिति शिक्षण गर्दा एकै पटक सूत्र प्रयोग गरी हिसाब गर्न सिकाएको पाइन्छ । यसरी क्षेत्रमितिको धारणा क्रमैसँग नदिई विधिगत सिप (algorithm skill) विकासमा जोड दिँदा विदयार्थीहरूको सिकाइमा असहजताको विकास भई धेरै बाधाहरू आउँछन् । त्यसैले क्षेत्रमिति शिक्षण गर्दा धेरैभन्दा धेरै शिक्षण सामग्रीहरू प्रयोग गरी क्रियाकलापको माध्यमबाट सूत्र सामान्यीकरण गर्नु राम्रो हुन्छ । त्यसपछि सूत्र प्रयोग गरी हिसाबँ सिकाउदा सिकाइ सरल र सहज बन्छ । क्षेत्रमिति शिक्षणका केही उद्देश्यहरू निम्न लिखित छन ।

- नियमित र अनियमित बहुभुजको परिमिति निकाल्न
- समतलीय आकृतिको क्षेत्रफल कोठा गन्ने विधिबाट पत्ता लगाउन
- आयत र वर्गको क्षेत्रफल निकाल्न
- षड्मुखा र घनको आयतन निकाल्न
- षडमुखा र घनको सतहको क्षेत्रफल निकाल्न आदि

क्षेत्रमिति शिक्षणका लागि शिक्षण विधिका रूपमा आगमन, निगमन, छलफल, समस्या समाधान, प्रयोगात्मक विधिहरू प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

यो पाठ शिक्षण सामग्रीका रूपमा मुख्यतया प्लास्टिकको पारदर्सक सिट, बहुभुजहरूको जाली, षड्मुखा र घनका नमुनाहरू जस्तै काठको ब्लक, टुथपेष्ट र साबुनका खोल, झण्डी बुर्जाका गट्टी

आदि प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

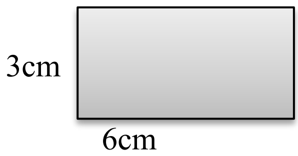
क्षेत्रमितिको व्यवहारिक उपयोग (Implication of Mensuration in Daily life)

दैनिक जीवनमा आईपर्ने समस्याहरू समाधान गर्ने जस्तै कोठाको क्षेत्रफल निकाली कागज टाँस्ने, रङ वा प्लाक्ष्टर गर्ने खर्च अनुमान गर्ने, भूइँमा कार्पेट विछ्याउने, जमिन नाप्ने, सडक बनाउने, बाटोमा ढुङ्गा छाप्ने, पर्खाल बनाउने, काठ नाप्ने तथा क्षेत्रफल र आयतनसँग सम्बन्धित समस्याहरूको लागत अनुमान गर्ने जस्ता कार्यहरूमा क्षेत्रमितिको उपयोग गर्न सकिन्छ ।

१. परिमिति (Perimeter) र क्षेत्रफल (Area)

क्रियाकलाप १

6 cm लम्बाइ र 3 cm चौडाइ भएको आयतको नमुना तयार गरी प्रत्येक विद्यार्थी वा समूह (2-5 जनासम्म) लाई दिने र रुलरको प्रयोग गरी प्रत्येक घेराको नाप लिएर चारैतिरको घेराको लम्बाइ पत्ता लगाउन दिनुहोस् ।



आयतको परिमितिको घेरा $= 6\text{cm} + 3\text{cm} + 6\text{cm} + 3\text{cm}$

$= 18\text{cm}$

यहाँ, आयतको वरिपरिको घेराको नाप 18cm हो । यसका साथै किताब, कापी, डेक्सको वरिपरिको घेराको नाप पत्ता लगाउन दिएर कुनै समतलीय सतहमा बनेका बहुभुजका भुजाहरूको जम्मा लम्बाइलाई परिमिति भनिन्छ भन्ने निष्कर्ष दिन सकिन्छ ।

माथिको समाधानको आधारमा अब आयत र वर्गको परिमिति निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

यदि आयतको लम्बाइ (l) = 6 cm, आयतको चौडाइ (b) = 3cm र आयतको परिमिति = P मान्दा,

$6\text{cm} + 3\text{cm} + 6\text{cm} + 3\text{cm} = 18\text{cm}$

अथवा, $l + b + l + b = P$

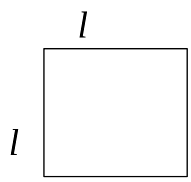
अथवा, $2l + 2b = P$

अथवा, $2(l + b) = P$

$\therefore\ P = 2(l + b)$

त्यसैगरी,

वर्गको लम्बाइ = l मान्दा,



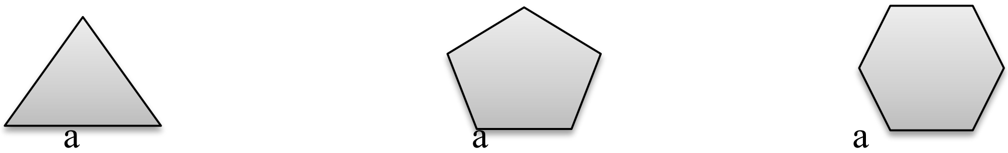
अथवा, $l + l + l + l = P$

अथवा, $4l = P$

$\therefore\ P = 4l$ तसर्थ, वर्गको परिमिति (P) = $4l$ हुन्छ ।

त्यस्तैगरी वर्ग जस्तै अन्य प्रकारका नियमित बहुभुजहरूका नमुना वा चित्र प्रस्तुत गरी परिमिति

निकाल्ने सूत्र पत्ता लगाउन सकिन्छ । नियमित बहुभुजको भुजाको लम्बाइ a मान्दा,



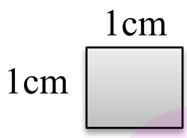
समबाहु त्रिभुजको परिमिति = 3a, नियमित पञ्चभुजको परिमिति = 5a, नियमित षष्टभुजको परिमिति = 6a, यसैगरी, n ओटा भुजा भएको नियमित बहुभुजको परिमिति = na हुन्छ ।

क्रियाकलाप २

समतलीय आकृतिको नमुना वा चित्र प्रस्तुत गरेर कुनले बढी ठाउँ लिएको छ छलफल गर्नुहोस् ।

(i) (ii) (iii) (iv)

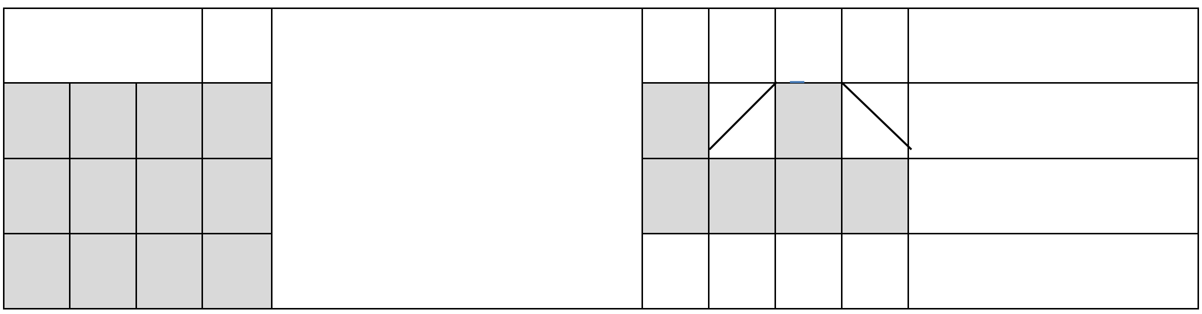
माथिको पहिला दुई चित्रहरूमध्ये चित्र नं. (i) ले बढी ठाउँ लिएको छ । त्यसैले पहिलोको क्षेत्रफल बढी छ । पछिल्ला दुई मध्ये कुन चित्रको क्षेत्रफल बढी छ भन्न गाह्रो छ । यसको सही उत्तर वर्गाकार कोठा भएको पारदर्सक ग्रीड प्रयोग गरेर वा वर्गाकार कोठा बनाई ती कोठाहरू गनेर पत्ता लगाउन सकिन्छ ।



माथिको वर्गको लम्बाइ 1cm र चौडाइ 1cm छ । त्यसैले यो 1cm × 1cm को वर्ग हो र यसको क्षेत्रफल $1cm^2$ (वर्ग से.मी.) छ । यस वर्गलाई वस्तुले समतल सतहमा कति ठाउँ लिएको छ भन्ने तुलना गर्न वा थाहा पाउन प्रयोग गरिन्छ । यसरी समतलल सतहमा वस्तुले ओगटेको ठाउँलाई क्षेत्रफल भनिन्छ भन्ने परिभाषा सामान्यीकरण गर्न तलको उदाहरण हेरौँ ।

उदाहरण १

तल दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल 1 वर्ग से.मि.का कोठा गनेर निकाल्नुहोस् ।



(i) (ii)

आयतको क्षेत्रफल $= 12\ cm^2$

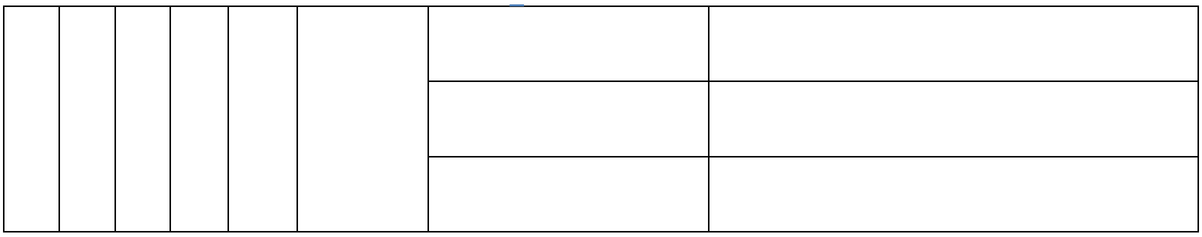
सिङ्गो वर्गको सङ्ख्या = 12

आधा वर्गको सङ्ख्या = 2 = 1 सिङ्गो वर्ग

त्यसैले क्षेत्रफल = $(6 + 1)\ cm^2 = 7\ cm^2$

क्रियाकलाप ३

तल दिइएको चित्रमा जस्तै लम्बाइ 5cm र चौडाइ 3cm भएको एउटा आयतको चित्र वा नमुना प्रस्तुत गर्नुहोस् । यसमा 1 वर्ग से.मी. का कति ओटा वर्गहरू छन् ?



आयतको क्षेत्रफल $= 15\ cm^2$ फेरी, लम्बाइलाई चौडाइले गुणन गरेर हेर्दा,

लम्बाइ × चौडाइ = $5\ cm \times 3cm = 15\ cm^2$

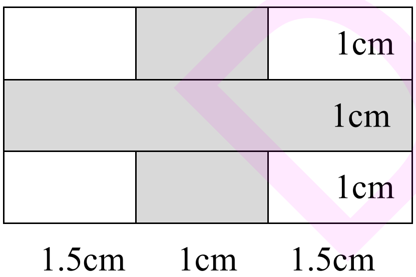
अब, आयतको क्षेत्रफललाई A , लम्बाइलाई l र चौडाइलाई b मान्दा, आयतको क्षेत्रफल $= l \times b$

वर्गको क्षेत्रफल (Area of Square) :

वर्गको लम्बाइ र चौडाइ बराबर हुने भएकाले वर्गको क्षेत्रफल $(A) = l \times l = l^2 =$ (भुजा)^2

उदाहरण २

तल दिइएको चित्रमा छायाँ परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?



समाधानः **पहिलो. तरिका**

यहाँ, तेस्रोपट्टि एउटा 4cm लम्बाइ र 1cm चौडाइ भएको आयतमा छायाँ पारिएको छ । त्यसैगरी, आयतको तल र माथि 1cm लम्बाइ भएका एकएक ओटा वर्ग छन् । त्यसैले,

छायाँ पारेको भागको क्षेत्रफल $= 4\ cm \times 1\ cm + 1\ cm \times 1\ cm + 1\ cm \times 1\ cm$

$= 4\ cm^2 + 1\ cm^2 + 1cm^2$

$= 6\ cm^2$

दोस्रो. तरिका

यहाँ, ठुलो आयतको लम्बाइ $(l_1) = (1.5 + 1 + 1.5)\ cm = 4cm$

ठुलो आयतको चौडाइ $(b_1) = (1 + 1 + 1)\ cm = 3cm$

ठुलो आयतको क्षेत्रफल $(A_1) = ?$

अब, $A_1 = l_1 \times b_1 = 4cm \times 3\ cm = 12\ cm^2$

$\therefore$ ठुलो आयतको क्षेत्रफल $(A_1) = 12\ cm^2$ हुन्छ ।

फेरि, छायाँ नपारेको आयतको लम्बाइ $(l_2) = 1.5\ cm$

छायाँ नपारेको आयतको चौडाइ $(b_2) = 1\ cm$

छायाँ नपारेको आयतको क्षेत्रफल $(A_2) = ?$

अब, $A_2 = l_2 \times b_2 = 1.5cm \times 1\ cm = 1.5\ cm^2$

$\therefore$ छायाँ नपारेको आयतको क्षेत्रफल $(A_2) = 1.5\ cm^2$ हुन्छ ।

चार ओटै छायाँ नपरेका आयतको क्षेत्रफल बराबर हुने भएकाले

चार ओटै छायाँ नपरेका आयतको क्षेत्रफल $(A_3) = 4\ A_2 = 4 \times 1.5\ cm^2 = 6cm^2$

$\therefore$ $(A_3) = 6\ cm^2$

अब, छायाँ परेको भागको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2$

$= 12\ cm^2 - 6cm^2 = 6cm^2$

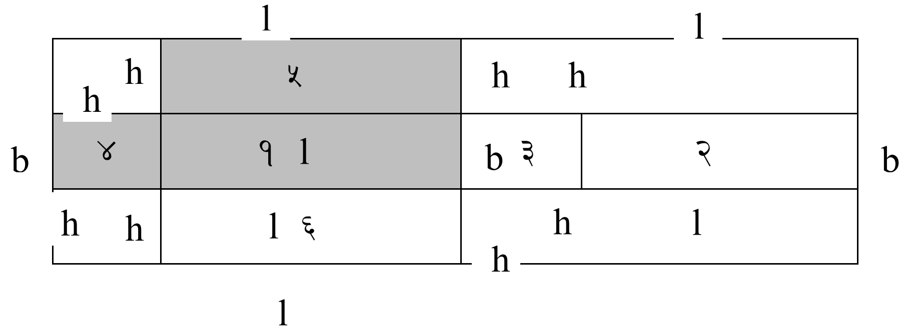
३. षड्मुखा र घनको सतहको क्षेत्रफल (Surface Area of cuboid and cube)

क्रियाकलाप ४

षड्मुखा र घनको सतहको क्षेत्रफल शिक्षणसिकाइ गर्दा टुथपेस्टका खोलहरू, साबुनका खोलहरू, झण्डी बुर्जाका गट्टिहरू जस्ता षड्मुखा र घनका नमुनाहरू सङ्कलन गर्ने । अब विद्यार्थीहरूलाई ती नमुनाहरूका सतहको क्षेत्रफल निकाल्न समूह कार्य दिनुहोस् । विद्यार्थीहरूले रुलरको प्रयोग गरेर प्रत्येक सतहको लम्बाइ l र चौडाइ b पत्ता लगाउने छन् । त्यसैको आधारमा प्रत्येक सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाई छ ओटै सतहको क्षेत्रफल जोडेर जम्मा सतहको क्षेत्रफल निकाल्ने छन् । विद्यार्थीहरूलाई समस्या समाधानको क्रममा आइपरेका समस्याहरू आफैँले समाधान गर्न नसकेमा शिक्षकबाट आवश्यक सहयोग हुनेछ । समूह कार्य गरिसकेपछि विद्यार्थीहरूले षडमुखा (cuboid) का सामुन्नेका मोहोडाहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ र घनको छ ओटै मोहोडाहरूको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ भन्ने कुरा सामान्यीकरण गर्न सक्ने छन् ।

क्रियाकलाप ५

तल दिइएको षड्मुखाको जालीको चित्रबाट षड्मुखा सतहको क्षेत्रफल पत्ता लगाऔँ ।



आयत १ को क्षेत्रफल = आयत २ को क्षेत्रफल = $l \times b$

आयत ३ को क्षेत्रफल = आयत ४ को क्षेत्रफल = $b \times h$

आयत ५ को क्षेत्रफल = आयत ६ को क्षेत्रफल = $l \times h$

अब, छायाँ पारेको भागको क्षेत्रफल = $l \times b + b \times h + l \times h$ वर्ग एकाइ

त्यसैले, पूरै जालीको क्षेत्रफल $(A) = 2(l \times b + b \times h + l \times h)$ वर्ग एकाइ

तसर्थ, षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल $(A) = 2(lb + bh + lh)$ वर्ग एकाइ

घनको सतहको क्षेत्रफल $(A) = 6a^2$ जहाँ, $l = b = h = a$

उदाहरण ३

एउटा षड्मुखाको लम्बाइ 18 cm छ । यसको चौडाइ लम्बाइको एक तिहाइ र उचाइ, चौडाइको दुई तिहाइ छ भने षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल कति होला ?

समाधान

यहाँ, षड्मुखाको लम्बाइ $(l) = 18$ cm

षड्मुखाको चौडाइ $(b) = l \times \frac{1}{3} = 18 \text{ cm} \times \frac{1}{3} = 6$ cm

षड्मुखाको उचाइ $(h) = b \times \frac{1}{3} = 6 \text{ cm} \times \frac{2}{3} = 4$ cm

षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल $(A) = ?$

सूत्रअनुसार, $A = 2(l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2(18 \times 6 + 6 \times 4 + 18 \times 4) \text{ cm}^2$

$= 2(108 + 24 + 72) \text{ cm}^2$

$= 2 \times 204 \text{ cm}^2$

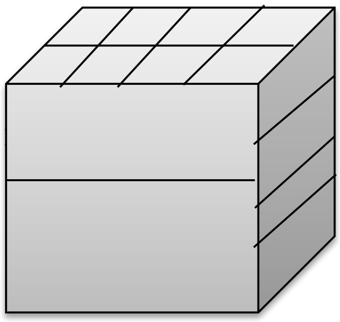
$= 408 \text{ cm}^2$

तसर्थ, षड्मुखाको सतहको क्षेत्रफल $(A) = 408 \text{ cm}^2$ हुन्छ ।

४. षड्मुखा र घनको आयतन (Volume of cuboid and cube)

क्रियाकलाप ६

एउटा 1 cm लम्बाइ, 1 cm चौडाइ र 1 cm उचाइ भएको घनको आयतन 1 cm^3 हुन्छ । त्यस्तैगरी 2 ओटा घनको आयतन 2 cm^3 हुन्छ । त्यस्तैगरी 3 ओटा घनको आयतन 3 cm^3 हुन्छ । तलको चित्रमा 1 cm^3 का घनहरू मिलाएर बनाएको कति ओटा 1 cm^3 का ब्लकहरू छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।



ठुलो ब्लक = 32 ओटा साना ब्लकहरू

त्यसैले ठुलो ब्लकको आयतन = $32\ cm^3$

ठुलो ब्लकको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ नाप्दा, लम्बाइ = 4 cm, चौडाइ = 2 cm र उचाइ = 4 cm छ भने, षड्मुखाको लम्बाइ × चौडाइ × उचाइ = 4 cm × 2 cm × 4 cm

$= 32\ cm^3$

∴ षड्मुखाको आयतन = लम्बाइ × चौडाइ × उचाइ

अथवा, $V = l \times b \times h$ अथवा, $V = A \times h$ जहाँ, A = आधारको क्षेत्रफल

घनको लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर हुने भएकाले,

लम्बाइ = चौडाइ = उचाइ

अथवा, $l = b = h = a$ मान्दा,

$V = a^3$ हुन्छ ।

उदाहरण ४

एउटा षड्मुखाकार ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल $4.5\ m^2$ छ र उचाइ 200 cm छ भने ट्याङ्कीको आयतन कति होला ?

समाधान : यहाँ,

ट्याङ्कीको आधारको क्षेत्रफल (A) = $4.5\ m^2$

ट्याङ्कीको उचाइ (h) = 200 cm = (200÷100) m = 2 m

ट्याङ्कीको आयतन (V) = ?

अब, सूत्रअनुसार

$V = A \times h$

$= 4.5\ m^2 \times 2\ m = 9\ m^3$

तसर्थ, ट्याङ्कीको आयतन $9\ m^3$ छ ।

४. बीज गणित (Algebra)

परिचय

बीज गणित (Algebra) गणितको एउटा शाखा (branch) हो । यसको उत्पति सोह्रौं शताब्दीको अन्त्यतिर युरोपबाट भएको हो । त्यसभन्दा धेरै अगाडि २०० BC देखि नै Babylonians लेवर्ग समीकरण, घन आदिको विकास गरेका थिए । १३ औं शताब्दिमा युरोपमा Fibonacci को महत्त्वपूर्ण देन रहेको छ । उनले त्यस समयमा 'Liberabic' (लिवेराविक) भन्ने प्रसिद्ध पुस्तक प्रकाशन गरे, जसमा Elementary Algebra लाई पनि उल्लेख गरे । त्यस्तै उनले linear quadratic equation को हल गर्ने तरिकाबारे बताए । Greek गणितज्ञहरूको पनि बीज गणितमा महत्त्वपूर्ण योगदान रहेको छ । यसरी प्राचीनकालदेखि बीज गणितको क्षेत्रमा गणितज्ञहरूले योगदान गर्दै आइरहेका छन् ।

बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression)

बीजीय अभिव्यञ्जक बुझ्नका लागि सर्वप्रथम निम्नलिखित पदावलीहरू जान्न आवश्यक हुन्छ :

चलराशी (Variable) : त्यस्तो अक्षर वा सङ्केत हो, जसले एकभन्दा बढी मानलाई बुझाउँछ । यसलाई चलराशी भनिन्छ । जस्तै : u, v, x, y, z आदिले चलराशीलाई बुझाउँछन् ।

अचरराशी (Constant) : अचरराशी त्यस्तो अक्षर हो, जसले एक मात्र मानलाई बुझाउँछ । यसलाई अचरराशी भनिन्छ । सामान्यतया अचर राशीलाई a, b, c, d, ... आदिले जनाइन्छ ।

पद (Terms) : पद हुनको लागि एक वा एकभन्दा बढी सङ्ख्या वा चलराशी हुनुपर्छ । जस्तैः 3x एउटा पद हो । यहाँ 3 एउटा सङ्ख्या र x चलराशी हो । 3 र x को गुणनफल एउटा पद हो ।

सजातीय र बीजातीय पदहरू : त्यस्तो पदहरू जसमा उस्तै खालका चरराशी (Variable) र चरराशीका घाताङ्क समान भएका हुन्छन्, त्यसलाई सजातीय पदहरू (Like terms) भनिन्छ । जस्तै 5x र 2x सजातीय पद हुन् । त्यस्तै त्यस्तो पद जसमा फरक-फरक चलराशीको प्रयोग भएका हुन्छन्, वा एउटै चलराशी भए पनि चलराशीका घाताङ्क समान हुँदैनन्, त्यसलाई बीजातीय पद (Unlike terms) भनिन्छ । जस्तै : 2x र 5y एवम् $3x^2$ र $3x^3$ बिजातीय पदहरू हुन् । किनकि 2x मा चलराशी x र 5y मा चलराशी y छ । त्यस्तै बाँकी दुई पदहरूमा चलराशी उही भए पनि घाताङ्क फरक फरक छन् ।

बीजीय अभिव्यञ्जक

बीजीय अभिव्यञ्जक भनेको चलराशी र अचलराशीको संयोजनलाई दुई ओटा गणितीय क्रियाहरू + or – ले जोड्नु हो । जस्तै : $2x^2 + 3x - 2$ एउटा बीजीय अभिव्यञ्जक हो ।

बीजीय अभिव्यञ्जकका प्रकार

१. **एकपदीय अभिव्यञ्जक (Monomial) :** एउटा मात्र पद समावेश भएको अभिव्यञ्जकलाई एकपदीय अभिव्इञ्जक भनिन्छ । जस्तैः $3x, 5x^2, 2xy, \frac{3a}{5}$ आदि ।

२. **दुई पदीय अभिव्यजक (Binomial) :** दुई ओटा पदहरू समावेश भएको अभिव्यञ्जकलाई दुइपदीय अभिव्यञ्जक (Binomial) भनिन्छ । जस्तै : $2 + x, 2x + 3y, \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$ आदि ।

३. **त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (Trinomial) :** तिन ओटा पदहरू समावेश भएको अभिव्यञ्जकलाई त्रिपदीय अभिव्यञ्जक (Trinomial) भनिन्छ ।

जस्तै : $2x^2 + 3y - 5, 5pqr + 7xy + 92$ आदि ।

४. **बहुपदीय अभिव्यञ्जक (Polynomial) :** दुई वा दुईभन्दा बढी पदहरू समावेश भएको अभिव्यञ्जकलाई बहुपदीय अभिव्यञ्जक (Polynomial/ multinomial) भनिन्छ ।

जस्तै : $3x - y - xy + 52, 7x^2 + 7xy + 8y + 56$ आदि ।

गुणाङ्क (Coefficient): जस्तै : 10xy एउटा एकपदीय अभिव्यञ्जक हो भने यहाँ 10 लाई xy को गुणाङ्क coefficient हुन्छ । यदि गुणाङ्क अक्षरमा भए, यसलाई literal coefficient भनिन्छ । त्यस्तै, xyz मा, xyz को गुणाङ्क 1 हुन्छ ।

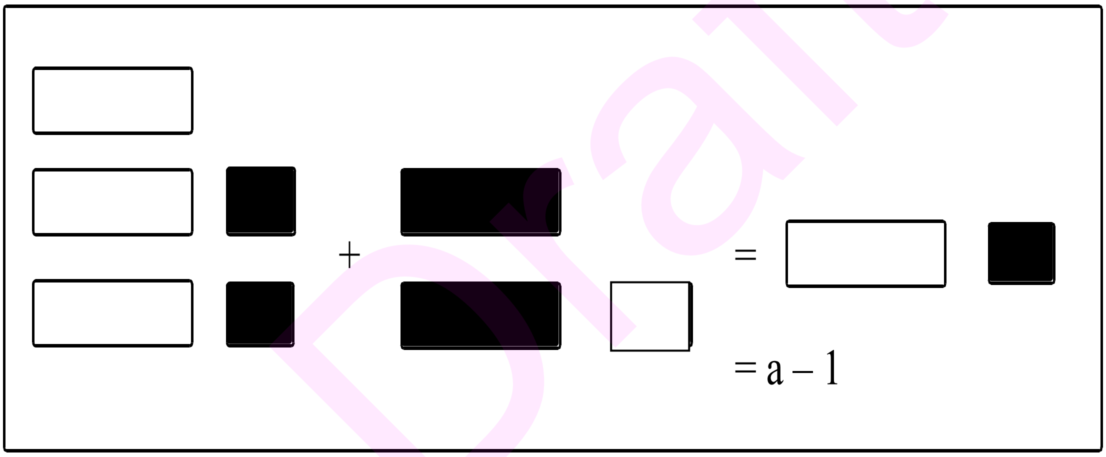
बीजीय अभिव्यञ्जकको जोड (Addition of Algebraic Expression)

यसमा सजातीय पदहरूलाई एक ठाउँमा राखी जोडिन्छ र बीजातीय पदहरूलाई त्यतिकै राखिन्छ । बीजीय अभिव्यञ्जकको जोड, घटाउ, गुणन हामीले तेर्सो (horizontal) गर्न सक्छौं र ठाडो (Vertical) पनि गर्न सक्छौँ ।

उदाहरण 1: $3a - 2$ र $-2a + 1$ को जोड कति हुन्छ ?

समाधान (Solution) :

पहिलो तरिका (First Method)



यहाँ सेतोपट्टिको भागले '+' र कालोपट्टिका भागले '–' जनाउँछ ।

दोस्रो तरिका (Second Method)

तेर्सो जोड्दा : $3a - 2 + (-2a + 1)$

$= 3a - 2 - 2a + 1$

$= 3a - 2a - 2 + 1$

$= a - 1$

तेस्रो तरिका (Third Method):

ठाडो जोड्दा

$$\begin{array}{r} 3a - 2 \\ \underline{+ (-2a) + 1} \\ a - 1 \end{array}$$

उदाहरण 2 : $4x + 7y - 9z$ र $7x - 5y + 4z$ को योगफल कति हुन्छ ?

समाधान (Solution)

पहिलो तरिका (First Method)

तेर्सो जोड तरिकाबाट $4x + 7y - 9z + 7x - 5y + 4z$

$= 4x + 7x + 7y - 5y - 9z + 4z$

$= 11x + 2y - 5z$

दोस्रो तरिका (Second Method):

ठाडो जोड तरिकाबाट

$$\begin{array}{r} 4x + 7y - 9z \\ \underline{+\ 7x - 5y + 4z} \\ = 11x + 2y - 5z \end{array}$$

बीजीय अभिव्यञ्जकको घटाउ (Subtraction of Algebraic Expression)

उदाहरण : $7x^2 - 2y^2 + 5z^2$ बाट $4x^2 - 7y^2 - 3z^2$ घटाउँदा कति हुन्छ ?

समाधान (Solution)

पहिलो तरिका (First Method)

तेर्सो तरिका अनुसार $7x^2 - 2y^2 + 5z^2 - (4x^2 - 7y^2 - 3z^2)$

$= 7x^2 - 2y^2 + 5z^2 - 4x^2 + 7y^2 + 3z^2$

$= 7x^2 - 4x^2 - 2y^2 + 7y^2 + 5z^2 + 3z^2$

$= 3x^2 + 5y^2 + 8z^2$

दोस्रो तरिका (Second Method)

ठाडो घटाउँदा

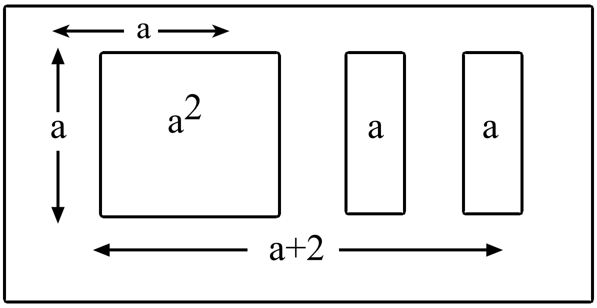
$$\begin{array}{r} 7x^2 - 2y^2 + 5z^2 \\ \underline{(-)\ 4x^2 - 7y^2 - 3z^2} \\ 3x^2 + 5y^2 + 8z^2 \end{array}$$

बीजीय अभिव्यञ्जकको गुणनफल (Multiplication Algebraic Expression)

उदाहरण 1: $a(a + 2) = ?$

समाधान (Solution):

यहाँ a र $a + 2$ को गुणनफल निकाल्नको लागि मानौँ, एउटा आयतको लम्बाइ $a + 2$ र चौडाइ a छ । आयतको क्षेत्रफल $(A) = l \times b = a \times a = a^2$ हुन्छ ।



$\therefore \quad a(a + 2) = a^2 + a + a = a^2 + 2a$

उदाहरण 2 :$(3x + 4)\ (4x + 5) = ?$

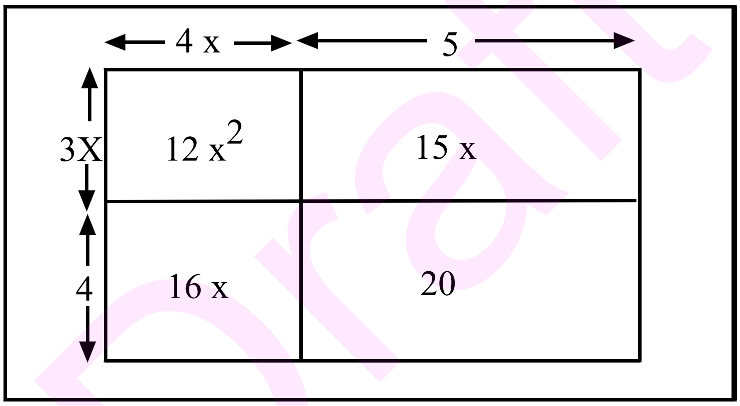
$= 3x\ (4x + 5) + 4(4x + 5)$

$= 3x \times 4x + 3x \times 5 + 4 \times 4x + 4 \times 5$

$= 12x^2 + 15x + 16x + 20$

$= 12x^2 + 31x + 20$

यसलाई चित्रमा यसरी देखाउन सकिन्छ ।



उदाहरण 3 : गुणनफल निकाल : $(2x^2 + 3xy + y^2)\ (x - y)$

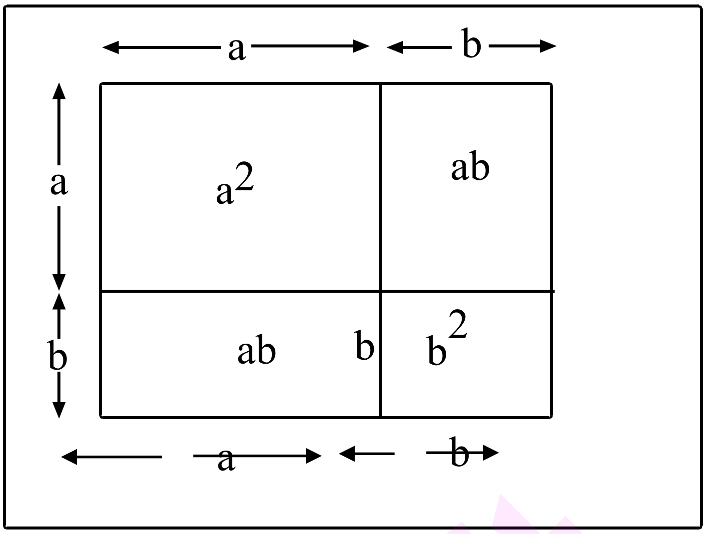
$= 2x^2(x-y) + 3xy\ (x-y) + y^2(x-y)$

$= 2x^3 - 2x^2y + 3x^2y - 3xy^2 + xy^2 - y^3$

$= 2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3$

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।

समाधान

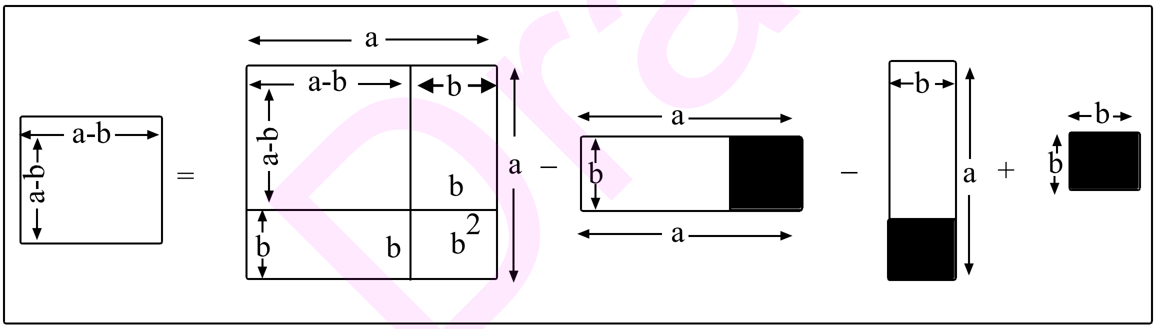


अब, माथिको चित्रबाट,

$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$ (सबै part लाई जोड्दा)

or, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर ।



$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$

$\therefore \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

बीजीय अभिव्यञ्जकको भाग (Division Of Algebraic Expression)

उदाहरण : भागफल निकाल

1. $32a^3b^4$ by $4ab^2$

$\dfrac{32a^3b^4}{4ab^2}$

$= \dfrac{32}{4} \cdot \dfrac{a^3}{a} \cdot \dfrac{b^4}{b^2}$

$= 8a^2b^2$ [घाताङ्कको नियमअनुसार $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ हुन्छ । त्यसैले $a^{3-1} = a^2$, $b^{4-2} = b^2$]

उदाहरण – 2: $(6x^3 + 9x^2 + 18x) \div 3x$

$$= \frac{6x^3}{3x^1} + \frac{9x^2}{3x^1} + \frac{18x}{3x}$$

$$= 2x^{3-1} + 3x^{2-1} + 6x^{1-1}$$

$$= 2x^2 + 3x + 6\,x^0$$

$$= 2x^2 + 3x + 6 \times 1$$

$\therefore$ $x^0 = 1$, जुनसुकै Value को power 0 भएमा value 1 हुन्छ ।

$$= 2x^2 + 3x + 6$$

उदाहरण – 3 : $(x^2 - 5x - 6) \div (x-6)$

समाधान (Solution)

यहाँ $(x - 6)$ ले $x^2 - 5x - 6$ लाई भाग गर्दा

$$\begin{array}{r|l} & \quad x + 1 \\ \hline x - 6 & \quad x^2 - 5x - 6 \\ & \quad x^2 - 6x \\ & \underline{(-)\;(+)} \\ & \quad\; x - 6 \\ & \quad\; x - 6 \\ & \underline{(-)\;\;(+)} \\ & \qquad \times \end{array}$$

$\therefore$ भागफल (Q) = $x + 1$

खण्डीकरण (Factorization)

कुनै पनि बीजीय अभिव्यञ्जकलाई अन्य रुढ गुणनखण्डहरूको गुणनका रूपमा रूपान्तरण गर्ने प्रक्रियालाई खण्डीकरण (Factorization) भनिन्छ ।

जस्तै : 12 लाई खण्डीकरण गर्दा,

$12 = 2 \times 2 \times 3$ हुन्छ । यहाँ 2 र 3, 12 को रुढ गुणनखण्डहरू हुन् ।

त्यस्तैः $x^2 + 5x$ लाई खण्डीकरण गर्दा $x(x + 5)$ हुन्छ । [$\because$ दुवैमा साझा x भएकाले]

उदाहरण 1: तलका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर ।

(a) $12a + 3b$

समाधान (Solution)

$2 \times 2 \times 3 \times a + 3 \times b$

$= 3(4a + b)$

(b) $12x^2 + xy + xz$

समाधान (Solution)

$= x(12x + y + z)$

(c) $2ab + a^2b - 2b - ab$

समाधान (Solution)

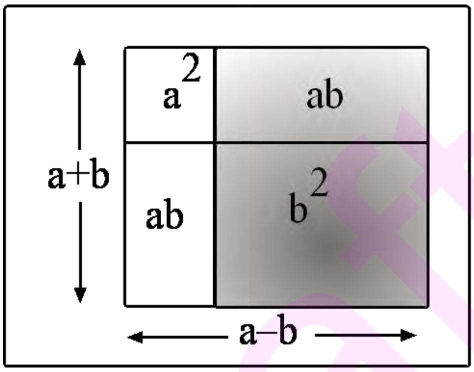
$= b(2a + a^2 - 2 - a)$

$= b\{a(2 + a) - 1(2 + a)$

$= b(2 + a)(a - 1)$

(d) $(a + b)(a - b) = ?$

समाधान (Solution)



यहाँ कालो र सेतो ab हटाउँदा बाँकी $a^2 - b^2$ रहन्छ । त्यसैले $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ हुन्छ ।

उदाहरण : खण्डीकरण गर ।

1. $a^2 - 16b^2$

समाधान (Solution):

यहाँ,

$a^2 - 16b^2$

$= (a)^2 - (4b)^2$

$= (a + 4b)(a - 4b)$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

2. $x^2 - \frac{1}{81y^2}$

समाधान (Solution)

यहाँ,

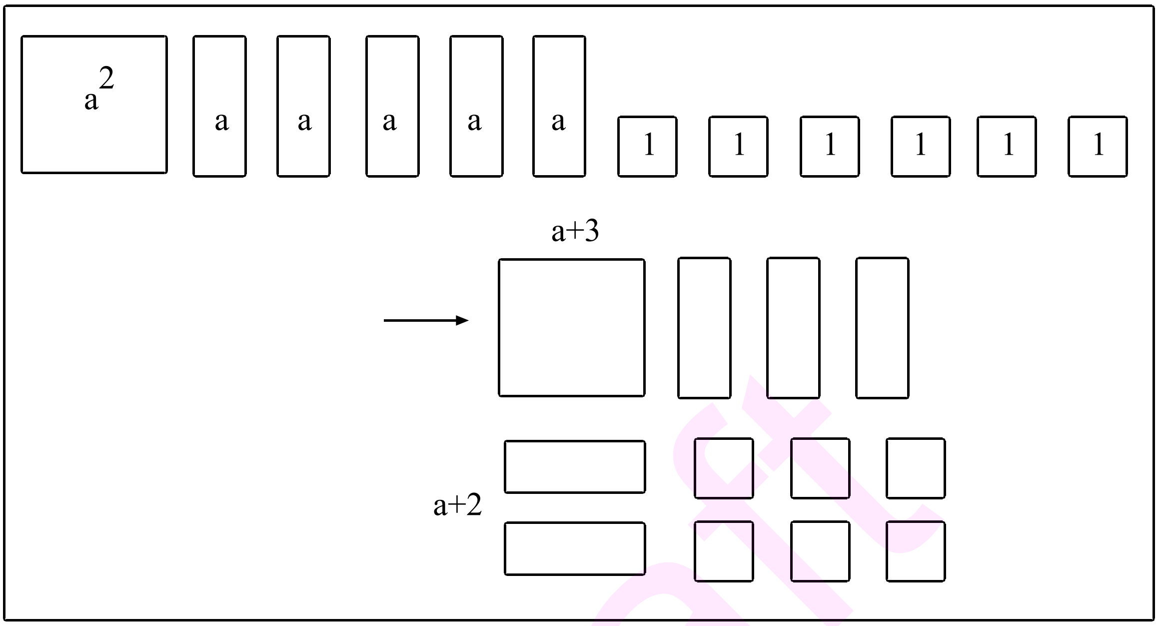
$(x)^2 - \left(\frac{1}{9y}\right)^2$

$= \left(x + \frac{1}{9y}\right)\left(x - \frac{1}{9y}\right)$

अभिव्यञ्जनको खण्डीकरण (Factorization of Algebraic Expression)

1. $a^2 + 5a + 6$ को खण्डीकरण निकाल ।

समाधान (Solution)



यहाँ एउटा a^2 को पत्ती, पाँच ओटा a पत्ती र छ ओटा 1 पत्ती मिलाउँदा लम्बाइ $(a + 3)$ र चौडाइ $(a + 2)$ बन्छ ।

त्यसैले $a^2 + 5a + 6 = (a + 3)(a + 2)$

अर्को तरिकाबाट गर्दा,

$a^2 + 5a + 6$

$= a^2 + (2 + 3)a + 6$

$= a^2 + 2a + 3a + 6$

$= a(a + 2) + 3(a + 2)$

$= (a + 2)(a + 3)$

२. **खण्डीकरण गर**

$3a^2 - ab - 10b^2$

$= 3a^2 - (6 - 5)ab - 10b^2$

$= 3a^2 - 6ab + 5ab - 10b^2$

$= 3a(a - 2b) + 5b(a - 2b)$

$= (a - 2b)(3a + 5b)$

नोट (Note) :

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3ab(a + b) + b^3$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3ab\,(a - b) - b^3$

बीजीय अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक र लघुत्तम समापवर्त्य

(HCF and LCM of Algebraic Expression)

महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor)

दुई ओटा सङ्ख्याहरू 8 र 12 लिऊँ ।

8 का गुणनखण्डहरू 1, 2, $\underline{4}$ र 8 हुन् ।

12 का गुणनखण्डहरू 1, 2, 3, $\underline{4}$, 6 र 12 हुन् ।

8 र 12 का गुणनखण्डमध्ये दुवैको सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड 4 हो । त्यसैले, 4 लाई 8 र 12 को म.स. भनिन्छ ।

त्यस्तै,

$5x^2y^2$ र $10xy^3$ मा हेरौँ ।

$5x^2y^2 = \underline{5x} \times x \times \underline{y} \times \underline{y}$

$10xy^3 = 2 \times \underline{5} \times \underline{x} \times \underline{y} \times \underline{y} \times y$

यी दुई अभिव्यञ्जकबिचको साझा गुणनखण्ड 5, x र y^2 हुन् ।

त्यसैले $5x^2y^2$ र $10xy^3$ को म.स. $5xy^2$ भयो ।

त्यसैले अब हामी भन्न सक्छौँ की,

दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकको सबैभन्दा ठुलो साझा अभिव्यञ्जक (गुणनखण्ड) लाई ती अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक (Highest common factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा HCF लेखिन्छ । त्यसैले, म.स. = साझा गुणनखण्ड हुन्छ ।

उदाहरण

$x^2 - 11x + 10$ र $x^3 - x$ को म. स. निकाल ।

समाधान (Solution)

यहाँ,

पहिलो अभिव्यञ्जक

$= x^2 - 11x + 10$

$= x^2 - (10 + 1)\,x + 10$

$= x^2 - 10x - x + 10$

$= x(x - 10) - 1(x - 10)$

$= (x - 10)(x - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक

$= x^3 - x$

$= x(x^2 - 1)$

$= x(x^2 - 1^2)$

$= x(x + 1)(x - 1)$

$\therefore$ म.स. (H.C.F.) $= (x - 1)$

लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple)

6 र 9 को अपवर्त्यहरू क्रमश :

$M_6 = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$

र $M_9 = \{9, 18, 27, 36, 45, ...\}$

यहाँ 6 र 9 का साझा अपर्वत्यहरू 18, 36, ... हुन्छन् । त्यसमध्ये सबैभन्दा सानो साझा अपवर्त्य 18 हो ।

त्यसैले 6 र 9 को लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) = 18 हुन्छ ।

त्यस्तै,

$4x^2$ र $6xy$ को लघुत्तम समापवर्त्य कति हुन्छ हेरौँ ।

$4x^2 = 2.2.x.x$

र $6xy = 2.3.x.y$

ल.स. $= \underline{2 \times x} \times \underline{2 \times 3 \times x \times y}$

साझा बाँकी

$= 12x^2y$

$\therefore$ $4x^2$ र $6xy$ को ल.स. $= 12x^2y$ हुन्छ ।

त्यसैले, अब हामी भन्न सक्छौँ की,

दुई वा दुईभन्दा बढी बीजीय अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्त्य भनेको ती अभिव्यञ्जकको निःशेष भाग जाने सबैभन्दा सानो बीजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरिमा ल. स. (L.C.M.) लेखिन्छ ।

त्यसकारण, ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड हुन्छ ।

उदाहरण : दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको म.स. र ल.स. निकालः

$a^2 - 1$, $a^2 + a - 2$ र $a^2 - 2a + 1$

समाधान (Solution)

यहाँ,

पहिलो अभिव्यञ्जक $= a^2 - 1^2$

$= a^2 - 1^2$

$= (a + 1)(a - 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= a^2 + a - 2$

$= a^2 + (2 - 1)\,a - 2$

$= a^2 + 2a - a - 2$

$= a(a + 2) - 1\,(a + 2)$

$= (a + 2)\,(a - 1)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= a^2 - 2a + 1$

$= a^2 - (1 + 1)\,a + 1$

$= a^2 - a - a + 1$

$= a\,(a - 1) - 1\,(a - 1)$

$= (a - 1)\,(a - 1)$

$\therefore$ म.स. $= (a - 1)$

र ल.स. $= (a - 1)\,(a + 1)\,(a + 2)\,(a - 1)$

$= (a - 1)^2\,(a + 1)\,(a + 2)$

वा $(a^2 - 1)\,(a - 1)\,(a + 2)$

बीजीय अभिव्यञ्जकको सरलीकरण

उदाहरण : सरल गर ।

1. $\frac{3x}{x-3} - \frac{9}{x-3}$

समाधान (Solution)

$= \frac{3x-9}{x-3}$

$= \frac{3(x-3)}{(x-3)}$

$= 3$

2. $\frac{3xy}{4ab} \div \frac{6y}{5b}$

समाधान (Solution):

यहाँ,

$\frac{3xy}{4ab} \times \frac{5b}{6y}$

$= \frac{5x}{8a}$ [$\because$ तलमाथि साझा कटाउँदा बाँकी $\frac{5x}{8a}$ हुन्छ ।]

3. $\frac{x^2-y^2}{x+y} \div \frac{x-y}{x+y}$

समाधान (Solution)

$$\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}\times\frac{x+y}{x-y}$$

$= (x + y)$ [∵ तलमाथि साझा कटाउँदा बाँकी $x + y$ हुन्छ ।]

4. $\dfrac{x}{x^2+3x+2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

समाधान (Solution):

$$=\frac{x}{x^2+(2+1)\,x+2}-\frac{2}{(x)^2-(1)^2}$$

$$=\frac{x}{x^2+2x+x+2}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x}{x(x+2)+1(x+2)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x}{(x+2)(x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-x-2x-4}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-3x-4}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-(4-1)\,x-4}{(x+1)\,(x-1)\,(x+2)}$$

$$=\frac{x^2-4x+x-4}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x(x-4)+1(x-4)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x-4}{(x-1)(x+2)}$$

घताङ्क (Indices)

तलको उदाहरण हेरौँ,

$x^1 \times x^1 \times x^1$ बराबर कति हुन्छ ?

यहाँ, x लाई आधार भनिन्छ र 1 लाई घाताङ्क (Power/exponent) भनिन्छ ।

अब, $x^{1+1+1} = x^3$ हुन्छ ।

यसरी एउटै सङ्ख्या वा चललाई सोही सङ्ख्या वा चलले दुई वा सोभन्दा बढी पटक गुणन गर्दा उक्त गुणनलाई छोटकरीमा लेख्ने सङ्केतलाई घताङ्क (Indices) भनिन्छ ।

त्यस्तै, अर्को उदाहरण पनि हेरौँ,

$y \times y \times y \times y \times y = y^{1+1+1+1+1} = y^5$

त्यसैले, $x \times x \times x \times \ldots\ldots \times \ldots . n\ times = x^n$ हुन्छ ।

घताङ्कका केही नियमहरू (Some laws of Indices)

1. $x^m \times x^n = x^{m+n}$

2. $x^m \div x^n = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

3. $x^\circ = 1$ [जतिको Power, शून्य भए पनि मान 1 नै हुन्छ । जस्तै, $10^\circ = 1$, $1000^\circ = 1$, $(5xy)^\circ = 1$ आदि]

   जस्तै: $x^\circ = x^{2-2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$

4. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ र $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$

5. $\left(x^m\right)^n = x^{mn}$

6. $(xy)^m = x^m \times y^m$, x, y $\neq 0$

र $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$, $y \neq 0$

7. $\sqrt[n]{x^m} = (x^m)^{1/n} = x^{m/n}$

उदाहरणहरू : घाताङ्कको नियम प्रयोग गरी सरल गर ।

1. $2^5 \times 2^7$

समाधान (Solution)

2^{5+7}

$= 2^{12}$

2. $P^4 \div P^3 = \frac{p^4}{p^3}$

समाधान (Solution)

$= P^{4-3}$

$= P^1$

$= P$

3. $8x^2y \div 4x^2$

समाधान (Solution)

$$= \frac{8x^2y}{4x^2}$$

$$= 2x^{2-2} \times y$$

$$= 2x^{\circ} \times y$$

$$= 2 \times 1 \times y$$

$$= 2y$$

4. $\left(x^2\right)^3$

समाधान (Solution)

$$= x^{2\times 3}$$

$$= x^6$$

5. $(16)^{1/2}$

समाधान (Solution):

$$= \left(4^2\right)^{1/2}$$

$$= 4^{2\times\frac{1}{2}}$$

$$= 4^1$$

$$= 4$$

6. $(-125p^7) \div (-25p^6)$

समाधान (Solution)

$$= \frac{125p^7}{25p^6}$$

$$= \frac{5^3 \times p^7}{5^2 \times p^6}$$

$$= 5^{3-2} \times p^7 \times p^{-6}$$

$$= 5p^{7-6}$$

$$= 5p$$

7. $\dfrac{x^{p+q-1} \bullet x^{2p+q+2}}{x^{p+q}}$

समाधान (Solution)

$$= \frac{x^{p+q-1+2p+q+2}}{x^{p+q}}$$

$$= \frac{x^{3p+2q+1}}{x^{p+q}}$$

$$= x^{3p+2q+1-p-q}$$

$$= x^{2p+q+1}$$

8. $\left(\dfrac{pq^2}{q^3}\right)^3$

समाधान (Solution)

$$= \frac{p^3 \times q^{2\times 3}}{q^{3\times 3}} = \frac{p^3 \times q^6}{q^9}$$

$$= \frac{p^3}{q^{9-6}} = \frac{p^3}{q^3} = \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

समीकरण, असमानता र लेखाचित्र (Equation, Inequality and Graph)

गणितीय खुला वाक्यहरू (Mathematical open sentences)

तलका वाक्यहरू हेरौँ :

१. x एउटा वर्ग सङ्ख्या हो ।

२. x लाई २ ले निःशेष भाग जान्छ ।

३. y+3=5

यहाँ माथिका वाक्यहरू साँचो वा झुटा के हुन् एकिन गरेर भन्न सकिँदैन किनकि वाक्य (१) मा x=1, 4, 9, 16 आदि वर्ग सङ्ख्याहरू भएमा मात्र यो वाक्य साँचो हुन्छ ।

त्यस्तै (२) मा x = 2, 4, 6, 8, 10 आदि जोर सङ्ख्याहरू भएमा मात्र यो वाक्य साँचो हुन्छ नत्र झुटो हुन्छ ।

त्यस्तै (३) मा, y = 2 भएमा मात्र यो साँचो हुन्छ । त्यसैले साँचो वा झुटो यकिन गरेर भन्न नसकिने गणितीय वाक्यहरूलाई खुला वाक्य (Open sentences) भनिन्छ ।

समीकरण (Equation) : समीकरण भनेको त्यस्तो खुला गणितीय वाक्य हो, जसमा दुई ओटा बीजीय अभिव्यञ्जकलाई Equal sign (=) ले जोडेको हुन्छ ।

जस्तै : $x + 3 = 5$, $2x + 5 = 9$, समीकरणका उदाहरणहरू हुन् ।

एक चलयुक्त रेखीय समीकरणको हल

उदाहरण 1: हल गर ।

(a) $x + 5 = 8$

or, $x = 8 - 5$

$\therefore$ $x = 3$

(b) $12 - 8x = 4$

or, $-8x = 4 - 12$

or, $-8x = -8$

or, $x = \frac{-8}{-8}$

$\therefore$ $x = 1$

(c) $8y = 96$

or, $y = \frac{96}{8}$

$\therefore$ $y = 12$

(d) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{4}{3}$

or, $3(x - 2) = 4(x + 2)$

or, $3x - 6 = 4x + 8$

or, $3x - 4x = 8 + 6$

or, $-x = 14$

$\therefore$ $x = -14$

उदाहरण 2 : एउटा आयतकार चउरको लम्बाइ र चौडाइ ३:२ को अनुपातमा छन् । यदि उक्त चउरको परिमिति २०० मिटर भए उक्त चउरको

(क) परिमिति जनाउने समीकरण लेख,

(ख) लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाऊ

(ग) क्षेत्रफल पत्ता लगाऊ ।

समाधान (Solution):

यहाँ, मानौँ आयतकार चौरको लम्बाइ (l) = 3x

र आयतकार चौरको चौडाइ (b) = 2x छन् । जहाँ x साझा छ ।

(क) परिमिति (P) = 2(l + b) [$\because$ आयतको परिमिति (P) = 2(l + b)]

$= 2(3x + 2x)$

$= 2 \times 5x$

$= 10x$

अब, प्रश्न अनुसार,

$$10x = 200$$

or, $x = \frac{200}{10}$

$\therefore$ $x = 20$

(ख) उक्त आयतकार चौरको लम्बाइ (l) $= 3 \times 20$ m

$= 60$ m

र आयतकार चौरको चौडाइ (b)$= 2 \times 20$ m

$= 40$ m

(ग) उक्त आयतकार चौरको क्षेत्रफल (A) $= l \times b$

$= 60 \text{ m} \times 40 \text{ m}$

$= 2400 \text{ m}^2$

असमानता (Inequality)

असमानताका चिह्नहरू $<, >, \geq, \leq$ प्रयोग गरेर पनि गणितीय वाक्यहरू बनाउन सकिन्छ र $<, >, \geq, \leq$ लाई असमानताका चिह्नहरू भनिन्छ ।

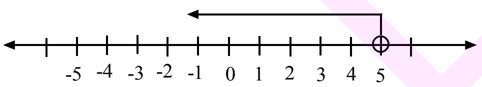
उदाहरण: हल गर र सङ्ख्या रेखामा देखाऊ ।

(क) $2x < 10$

or, $x < \frac{10}{2}$

[दुवै तर्फ 2 ले भाग गर्दा]

or, $x < 5$

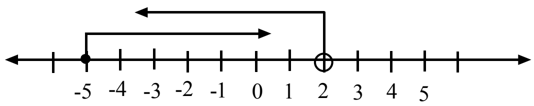


(ख) $-5 \leq x < 2$

समाधान (Solution)

यहाँ, $-5 \leq x < 2$ लाई दुई भागमा बाँड्न सकिन्छ, जस्तै, एउटा $-5 \leq x$ अर्थात् $x \geq -5$ र अर्को $x < 2$

यसलाई सङ्ख्यारेखामा देखाउँदा



दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरणको लेखाचित्रद्वारा हल

(Solution of two variables linear equations by Graphical Method)

उदाहरण: लेखाचित्रद्वारा हल गर ।

$x + y = 8$ र $x - y = 4$

समाधान (Solution)

यहाँ, मानौँ

$x + y = 8$ .... (i)

र $x - y = 4$ ....(ii)

अब, समीकरण (i) बाट,

$x + y = 8$

or, $x = 8 - y$

x र y का मानहरू निकाल्दा

x	6	5	4	3
y	2	3	4	5

(कम्तीमा दुई ओटा मानहरू निकाल्ने)

त्यस्तै

समीकरण (ii) बाट

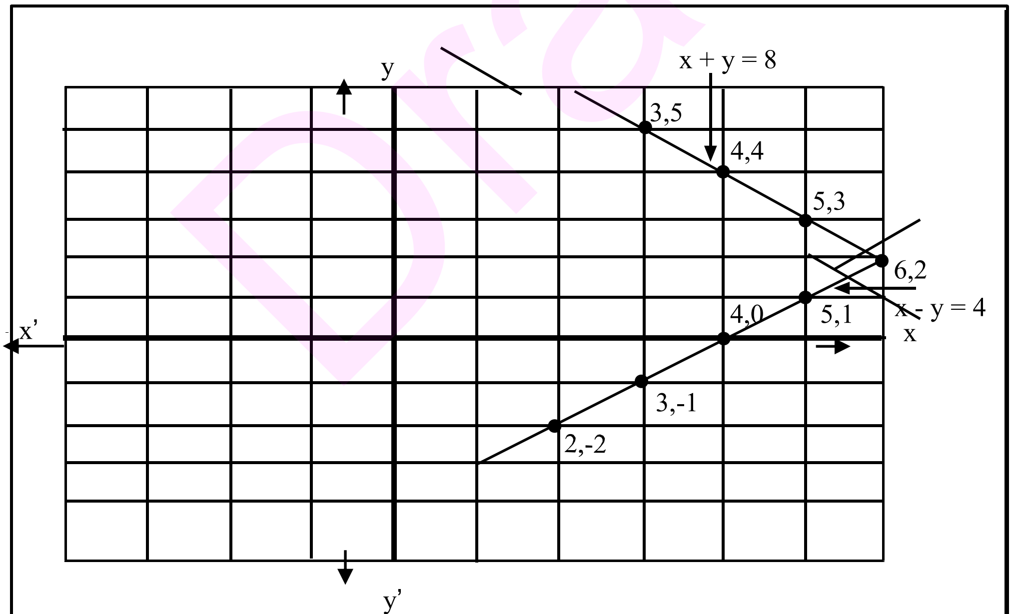
$x - y = 4$

or, $x = y + 4$

x र y का मानहरू निकाल्दा,

x	4	3	2	5	6
y	0	-1	-2	1	2

अब, माथिका जोडा बिन्दुहरूलाई तलको लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा



माथिको लेखाचित्रमा, समीकरणहरू

$x + y = 8$ र $x - y = 4$, बिन्दु (6, 2) मा काटिएका (Intersect) छन् । त्यसैले $x = 6$ र $y = 2$ हुन्छ । तसर्थ $(x, y) = (6, 2)$ हुन्छ ।

त्यसकारण यदि कुनै दुई रेखीय समीकरणहरू लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा प्रतिच्छेदित हुन्छन् वा काटिन्छन् भने उक्त समीकरणहरूलाई युगपतरेखीय समीकरण (simultaneous equation) भनिन्छ ।

वर्ग समीकरण (Quadratic Equation)

डिग्रि 2 भएका समीकरणलाई वर्ग समीकरण (quadratic equation) भनिन्छ ।

जस्तै : $x^2 + 2x - 5 = 0$, एउटा वर्ग समीकरण हो । यदि वर्ग समीकरणमा चलराशी 'x' को डिग्री 2 भएको पद मात्र छ र चलराशीको घाताङ्क 1 भएको पद छैन भने, उक्त वर्ग समीकरणलाई शुद्ध वर्ग समीकरण (Pure quadratic equation) भनिन्छ । जस्तैः $x^2 - 16 = 0$ शुद्ध वर्ग समीकरण हो । यो $x^2 + c = 0$, स्वरूपको हुन्छ ।

त्यस्तै, डिग्री 2 र डिग्री 1 समेत भएका पदहरू समावेश भएको वर्ग समीकरणलाई मिश्रित वर्ग समीकरण (Mixed quadratic equation) भनिन्छ । जस्तै : माथिको उदाहरण $x^2 + 2x - 5 = 0$ मिश्रित वर्ग समीकरण हो । यो $ax^2 + bx + c = 0$, स्वरूपको हुन्छ ।

उदाहरण : हल गर ।

1. $x^2 - 4x = 0$

   or, $x(x - 4) = 0$

   Either, $x = 0$ Or, $x - 4 = 0$

   $\therefore$ $x = 4$ $\therefore$ $x = 0, 4$

2. $x^2 + 8x + 16 = 0$

   or, $x^2 + (4 + 4)x + 16 = 0$

   or, $x^2 + 4x + 4x + 16 = 0$

   or, $x(x + 4) + 4(x + 4) = 0$

   or, $(x + 4)(x + 4) = 0$

   Either, $x + 4 = 0$ Or, $x + 4 = 0$

   $\therefore$ $x = -4$ $\therefore$ $x = -4$

   $\therefore$ $x = -4, -4$

बीजगणितमा प्रयोग गरिने केही शैक्षणिक सामग्रीहरू यसप्रकार छन् :

१. एकपदीय, द्विपदीय र बहुपदीय अभिव्यञ्जक लेखिएका केही कार्डहरू

२. विभिन्न लम्बाइका लठ्ठीका टुक्राहरू, स्केल, कैँची चक्कु, आयतकार र वर्गाकार बाक्ला कागजहरू, चार्टहरू

३. तराजु, चकको बट्टा, गुच्चाहरू, मिटर स्केल

शिक्षण विधि

बीज गणितको धारणा दिनका लागि शिक्षकले कक्षाकोठामा विद्यार्थी केन्द्रित शिक्षण विधिहरू प्रयोग गर्नुपर्छ । ती हुन् :

१. आगमन विधि

२. प्रदर्सन विधि

३. प्रयोगात्मक विधि

४. समूह छलफल विधि/समूहकार्य

५. परियोजना कार्य विधि

६. समस्या समाधान विधि

५. ज्यामिति

ज्यामिति शब्दकलाई अङ्ग्रजीमा Geometry भनिन्छ । जुन ग्रीक शब्द Geometron बाट लिइएको हो । Geo को अर्थ पृथ्वी र Metron को अर्थ मापन हुन्छ । परापूर्व समयमा ज्यामितीय चित्रहरू, कला, वास्तुकला र मापनको आवश्यकता पूरा गर्न विकास भएको हो । जमिनको वितरण गर्दा, शानदार महल, मन्दिरहरू, सडकहरू र शहरहरूको विकासमा ज्यामिति प्रयोग हुँदै आएको छ । पुरातन सम्भयताहरू इजिप्ट, वेविलियोन, चीन, भारत, ग्रीस आदि सभ्यतामा विभिन्न किसिमले ज्यामितिको अध्ययन गरिएको थियो । यी सभ्यताका मानिसहरूले सामना गरेका धेरै व्यावहारिक समस्याहरूलाई समाधान गर्न ज्यामितिको विकासको आवश्यकता महसुस गरेका थिए ।

उदाहरणको लागि नाइल नदिले वार्षिक रूपमा गर्ने क्षतिपछि जग्गा धनिहरूको सिमाना छुट्याउन ज्यामितिको प्रयोग गरिन्थ्यो । यस प्रयोजनको लागि इजिप्सियनहरूले ज्यामितीय विधिको विकास, साधारण क्षेत्रफल निकाल्न प्रयोग गर्ने नियम र साधारण ज्यामितीय रचनाको प्रयोग गरेका थिए ।

ज्यामितिको विकास र प्रयोग संसार भरिनै भैरहेको भएतापनि यसलाई व्यवस्थित रूप दिइएको थिएन । ज्यामितिको विकास प्राचिन समयमा मौखिक रूपमा एक पुस्तावाट अर्को पुस्तामा हस्तान्तरण गरिन्थ्यो । इजिप्सियनहरूले विकास गरेको ज्यामितिमा मुख्यतया परिणामहरूको वयानहरू समावेश थिए । वेवोलियन र इजिप्टहरूले प्रयोगात्मक उद्देश्यहरूले ज्यामितिको विकास गरे तर व्यवस्थित विकासको लागि भने थोरै मात्र काम गरे । ग्रीक सम्भयताले भने प्रत्येक ज्यामितीय तथ्यमा तर्कको प्रयोग सुरु गरे । ग्रीकहरूले प्रत्येक कथनको सत्यता स्थापित गर्न निगमन विधिको प्रयोग गरेका थिए ।

ग्रीक गणितिज्ञ थेल्स (Thales) ले ज्यामितिमा पहिलो पटक ज्ञात प्रमाण दिएका थिए । उनले वृत्तलाई व्यासद्वारा दुई बराबर भागमा विभाजन गर्न सकिन्छ भन्ने प्रमाण दिएका थिए । उनको सबैभन्दा लोकप्रिय विद्यार्थी पारथागोरस र उनका समूहले धेरै ज्यामितीय गुणहरू, सिद्धान्तहरूको विकास ठुलो हदसम्म गरे । यो प्रक्रिया ३०० BC सम्म जारी रह्यो । त्यो समयमा युक्लिड, इटली र भारतका अलेकजन्डेरन शिक्षकले सबै ज्यामितीय ज्ञानहरू सङ्कलन गरेर आफ्नो पुस्तक 'The Elements' मा लिपिबद्ध गरे । उनले 'The Elements' लाई तेर अध्यायमा विभाजित गरेका थिए, ती प्रत्येकलाई पुस्तक भनिन्छ । यो किताबले सम्पूर्ण संसारलाई ज्यामितीय ज्ञान बुझाउन प्रभावित गऱ्यो ।

युक्लिडको परिभाषा (axiom र postulates)

Eulid को समयका गणितज्ञहरूले ज्यामितिलाई अमूर्त मोडलको रूपमा लिएका थिए । बिन्दु, रेखा, सतह आदिलाई वरपर देखेको आधारमा व्याख्या गरेका थिए । वरपर रहेका ठोस वस्तुको प्रयोगले ज्यामितीय धारणा विकास गरिएको थियो । ठोस भनेको जसको आकार, प्रकार र स्थिति हुन्छ जसलाई एक स्थानबाट अर्को स्थानमा सार्न सकिन्छ भन्ने थियो । ठोसको सिमाहरूलाई सतह, सतहको सीमानालाई रेखा तथा वक्र र यिनीहरू बिन्दुहरूमा समाप्त हुन्छन् भनिएको थियो ।

ठोसमार्फत बिन्दुसम्म आइपुग्ने तिन चरणलाई विचार गर्दै प्रत्येक चरणमा एउटा dimension हुने विचार विकास गरेका थिए । Solid लाई तिन आयामिक, सतहलाई दुई आयामिक र बिन्दुलाई विना आयामिकको रूपमा व्याख्या गरेका थिए । Euclid ले यी परिभाषाहरूलाई सारांशको रूपमा प्रस्तुत गरे, जुन Book 1 मा समेटिएको थियो । केही यस प्रकार छन्

१. बिन्दु त्यो हो, जसको कुनै भाग हुँदैन ।

२. रेखा एउटा चौडाइ विनाको लम्वाइ हो ।

३. रेखाको अन्त्य बिन्दुहरू हुन् ।

४. सिधा रेखा एक लाइन हो, जुन आफैँमा बिन्दुहरूसँग समाप्त छ ।

५. सतह भनेको केवल लम्बाइ र चौडाइ मात्र हो ।

६. सतहका किनारहरू रेखाहरू हुन ।

७. Plane सतह एक सतह हो, जुन आफैँमा सिधा रेखाहरू समाप्त छ ।

आफ्नो परिभाषा सुरु गर्दै Eulid ले केही गुणहरू जसलाई प्रमाणित गरिएको थिएन जुन आफैँमा Obvious universal turth थियो, त्यसलाई उनले दुई भागमा विभाजन गरेका थिए । जुन ज्यामितिका लागि विशिष्ट थियो, त्यसलाई Postulate र समग्र गणितसँग सम्बन्धित Obvious universal turth लाई axiom को रूपमा व्याख्या गरेका थिए ।

ती मध्ये केही Euclid axiom यस प्रकार छन् ।

१. चिजहरू जो एउटै कुरासँग बराबर छ, एक अर्कासँग बराबर हुन्छन् ।

२. यदि बराबरमा बराबर जोडे, थोकहरू बराबर हुन्छन् ।

३. यदि बराबरमा बराबर घटाए, शेषहरू बराबर हुन्छन् ।

४. सम्पूर्ण भाग भन्दा ठुलो हुन्छ ।

५. चिजहरू जुन एकअर्कासँग मेल खान्छन्, एकअर्कासँग बराबर हुन्छन् ।

६. चिजहरू जुन एउटै चिजहरूको दोब्बर हुन् । एक अर्कासँग बराबर हुन्छन् ।

७. चिजहरू जो एउटै चिजहरूको आधार हुन् । एक अर्कासँग बराबर हुन्छन् ।

Euclid Fifth Postulate

१. सिधा रेखा कुनै एक बिन्दुवाट अर्को बिन्दुसम्म जोडिएको हुन्छ ।

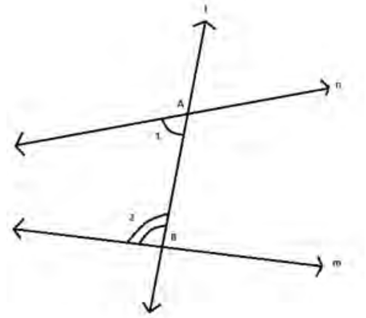
२. एक समाप्त गरिएको लाइन अनिश्चितकालीन रूपमा अघि बढाउन सकिन्छ ।

३. कुनै पनि केन्द्र बिन्दु र अर्धव्यासको आधारमा वृत्त बनाउन सकिन्छ ।

४. सबै समकोणहरू एकअर्कासँग बराबर हुन्छन् ।

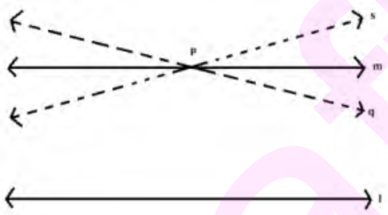
५. यदि एउटा सिधा रेखाले दुई ओटा सिधा रेखाहरूलाई प्रतिछेदन गर्दा एउटै दिसामा रहेका आन्तरिक कोणहरूको योग $180°$ भन्दा कम भए त्यही दिसामा रेखाहरूलाई अनिश्तिकलीन बढाई एकआपसमा भेटिन्छन् ।

उदाहरको लागि चित्रमा PQ ले AB र CD लाइ प्रतिक्षेत्र गर्दा $\angle 1$ र $\angle 2$ को योग $180°$ भन्दा कम भएकोले PQ को बायाँ दिसामा AB र CD लाई अनिश्चितकालीन रूपमा बढाउँदा एक आपसमा भेट हुन्छ ।



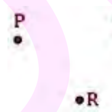
Euclid को पाँचौ Postulate को समतुल्य संस्करण

Euclid को पाँचौ Postulate गणितको इतिहासमा धेरै महत्त्वपूर्ण छ । यस Postulate को धेरै समकक्ष संस्करणहरू छन् । तिनीहरूमध्ये एउटा हो "Playfair axiom" (1729) । स्कटिस गणितज्ञ जोन लिफियरद्वारा दिइएको Axiom लाई “प्रत्येक रेखा l र हरेक बिन्दु P जुन l मा पर्दैन त्यहाँ एउटा मात्र रेखा m खिच्न सकिन्छ । भनिएको थियो जुन l सँग समानान्तर र P बाट पास भएर जान्छ ।



ज्यामितिका आधारभूत धारणाहरू

बिन्दु



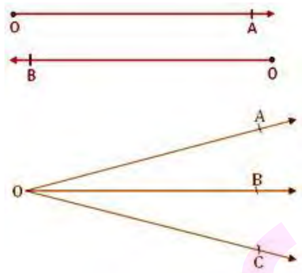
- बिन्दु स्थान र वास्तविक location को लागि प्रयोग हुन्छ ।
- बिन्दु लम्बाइ, चौडाइ र मोटाइ हुँदैन ।
- बिन्दुलाई पेन्सिललाई तिखो बनाई डट गरेर बनाइन्छ ।
- बिन्दुलाई Capital Letter ले जनाइन्छ ।
- चित्रमा P, Q, R ले बिन्दुहरूलाई जनाउँछ ।

रेखा

- रेखा एउटा सिधा बाटो हो, जसलाई दुवै दिसातर्फ निरन्तर अगाडि बढाउन सकिन्छ ।

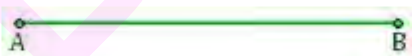
- विपरीत दिशातर्फ arrowheads गरेर रेखालाई जनाइन्छ ।
- रेखाको निश्चित लम्बाइ हुँदैन ।
- यसको निश्चित अन्त्य बिन्दुहरू हुँदैन ।
- रेखामा अनगिन्ति बिन्दुहरू रहेका हुन्छन् ।
- रेखालाई $\overleftrightarrow{AB}$ ले जनाइन्छ ।

Ray



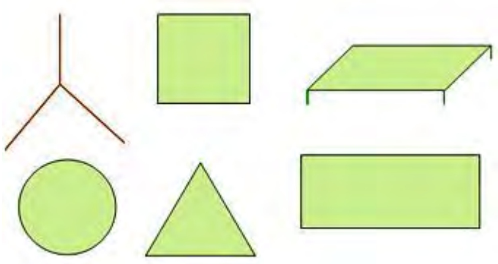
- यो एउटा सिधा बाटो हो, जसलाई एउटा दिशातर्फ निरन्तर अगाडि बढाउन सकिन्छ भने अर्को अन्त्य निश्चित हुन्छ ।
- यसको एउटा मात्र अन्त्य बिन्दु हुन्छ । जसलाई प्रारम्भिक बिन्दु भनिन्छ ।
- यसको लम्बाइ नाप्न सकिँदैन ।
- एउटै प्रारम्भिक बिन्दुबाट धेरै Ray खिच्न सकिन्छ ।
- O बाट A तर्फ गएको Ray लाई $\overleftrightarrow{OA}$ ले जनाइन्छ ।

रेखाखण्ड



- यो एउटा सिधा बाटो हो, जसको निश्चित लम्बाइ हुन्छ ।
- यसको दुई ओटा अन्त्य बिन्दुहरू हुन्छन् ।
- यो रेखाको एउटा अंश हो ।
- यसलाई AB वा BA जनाइन्छ ।
- बिन्दु A देखि बिन्दु B सम्मको दुरीलाई AB को लम्बाइ भनिन्छ ।
- एउटा रेखाखण्डमा अनगिन्ति बिन्दुहरू रहेका हुन्छन् ।
- यदि दुई ओटा रेखाखण्डहरूको लम्बाइ उही छ भने ती रेखाखण्डहरूलाई बराबर रेखाखण्ड भनिन्छ ।

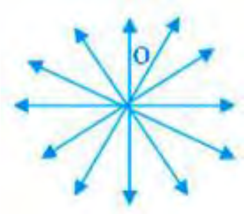
Plane



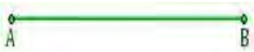
एउटा समतल सतहले plane को धारणा दिन्छ । टेबल,भित्ता, शैक्षणिकापीको समतल सतह हुन्छ र यसलाई सबै दिसातर्फ अनन्त रूपमा बढाउन सकिन्छ । माथि चित्रमा plane को केही अंश मात्र देखाइएको छ । वर्ग, त्रिभुज, वृत्त जस्ता चित्रहरू हामी Plane मा बनाउन सक्छौं । त्यसैले यस्ता चित्रलाई plane figure भनिन्छ ।

रेखाको Incidence **गुणहरू**

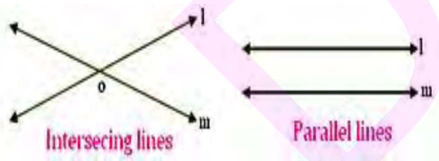
- एउटा plane मा एउटा बिन्दुबाट अनगिन्ति रेखाहरू पास भएर जान सक्छन् ।



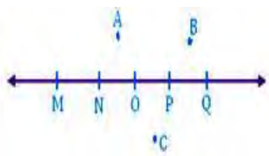
- दुई ओटा निश्चित बिन्दुबाट एउटा मात्र रेखा बनाउन सकिन्छ ।



- दुई ओटा रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर वा प्रतिच्छेदन हुन्छ ।



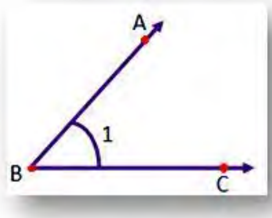
- एउटै रेखामा पर्ने दुई वा बढी बिन्दुहरूलाई रेखीय बिन्दुहरू भनिन्छ ।



- दुई ओटा बिन्दुहरू जहिले पनि रेखीय हुन्छन् ।

कोण

दुई ओटा ray हरू एउटा साझा अन्त्य बिन्दुमा भेट हुँदा कोण बन्छ । दिइएको चित्रमा ray हरू AB र BC लाई ∠ABC को arms भनिन्छ । साझा अन्त्य बिन्दुलाई कोणको शीर्षबिन्दु भनिन्छ । कोणलाई डिग्रीमा नाप्ने गरिन्छ । Protractor को प्रयोग गरेर कोणको मान पत्ता लाग्दछ ।



डिग्री, मिनेट र सेकेन्डको सम्बन्ध

60 second = 1 minute

60 minute = 1 degree

360 degree = 1 rotation

कोणको अर्धक

कुनै पनि कोणलाई अर्धक गर्नु भनेको त्यो कोणलाई दुई बराबर कोणमा विभाजन गर्नु हो । कोणलाई दुई बराबर कोणमा विभाजन गर्ने Ray लाई अर्धक भनिन्छ । कोणको अर्धक तिन फरक तरिकाबाट पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

क) कागजलाई पट्याएर

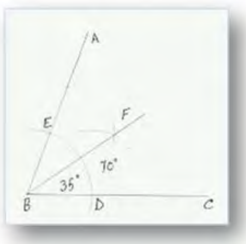
मानौँ $\angle$LMN एउटा कोण हो । LM लाई MN रेखाखण्ड माथि पर्ने गरेर फोल्ड गर्दा LM र MN को बिचमा बँन्ने क्रिज प्रयोग गरेर एउटा Ray खिच्नुहोस् । त्यो Ray नै $\angle$LMN को अर्धक हो ।

ख) प्रोट्याक्टर प्रयोग गरेर

मानौँ $\angle$XYZ लाई दुई बराबर कोणमा विभाजन गर्नु छ । सर्वप्रथम प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी $\angle$XYZ को मान निकाल्नुहोस् । मानौ $\angle XYZ = 72°$ छ । हामीलाई थाहा छ, 72° को आधा 36° हुन्छ । तसर्थ $\angle XYW = 36°$ बनाऔं जसमा YW, $\angle$XYZ कोभित्र पर्दछ । तसर्थ YW, $\angle$XYZ को अर्धक हो ।

ग) कम्पासको प्रयोग गरेर

$\angle$ABC लाई बराबर कोणमा विभाजन गर्नको लागि सर्वप्रथम B बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु मानेर चापले BC र AB मा क्रमशः D र E बिन्दुमा काट्नुपर्दछ । अब D र E लाई केन्द्रबिन्दु मानेर एउटै अर्धव्यास हुने गरी चापहरू एकआपसमा काट्नुहोस् । मानौँ त्यो काटिएको बिन्दु E हो । अब B र E लाई जोडेर बन्ने BE, $\angle$ABC को अर्धक हो ।



कोणका प्रकार

(क) न्यूनकोण : 0° भन्दा ठुलो तर 90° भन्दा सानो कोण

(ख) समकोण : 90° कोण

(ग) अधिककोण : 90° भन्दा ठुलो तर 180° भन्दा सानो कोण

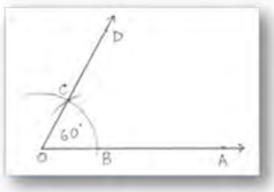
(घ) सरलकोण : 180° कोण

(ङ) बृहतकोण : 180° भन्दा ठुलो तर 360° भन्दा सानो कोण

(च) पुरा कोण : 360° कोण

60° कोण रचना

एउटा रेखाखण्ड OA खिचौँ । बिन्दु O लाई केन्द्र मानी कम्पासको मदतले एउटा चाप खिचौँ । सो चापले रेखा OA रेखाण्डमा B मा काट्छ । बिन्दु B बाट अघिकै अर्धव्यासको चाप लिई पहिले खिचिएको चापलाई C मा काटौँ र C लाई जोडी D सम्म तानौँ । यसरी $\angle DOA = 60°$ हुन्छ ।

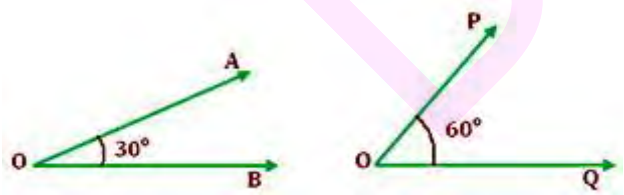


$\angle DOA = 60°$ **हुन्छ कसरी हुन्छ ?**

कुनै वृत्तमा अर्धव्यास बराबरको चापले पूरा वृत्तलाई 6 बराबर भागमा विभाजन गर्न सकिन्छ । तसर्थ पूरा वृत्तले केन्द्रमा बनाउने कोण 360° लाई 6 भागमा विभाजन गर्दा 60° हुन्छ । तसर्थ $\angle DOA = 60°$ हुन्छ ।

कोणहरूको सम्बन्ध

समपूरक कोणहरू



दुई ओटा कोणहरूको योग एक समकोण हुन्छ भने ती कोणहरूलाई समपुरक कोणहरू भनिन्छ । जस्तै : 30° र 60°

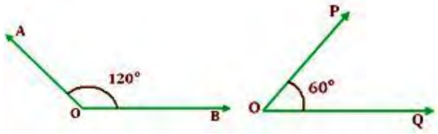
40° को समपूरक 50° हो किनभने 40° + 50° = 90° हुन्छ ।

- $x°$ को समपूरक $90° - x°$ हो किनभने $x° + 90° - x° = 90°$

परिपूरक कोणहरू

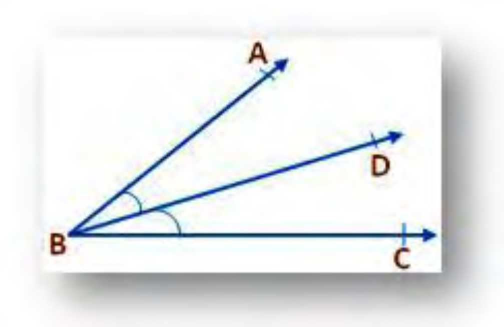
दुई ओटा कोणहरूको योग दुई समकोण हुन्छ भने ती कोणहरूलाई परिपूरक कोणहरू भनिन्छ । जस्तै : 60° र 120°

- x को परिपूरक कोण $180° - x$ हो किन भने $x + 180° - x = 180°$



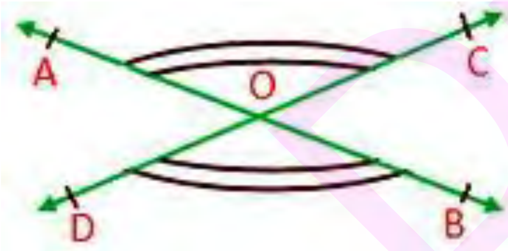
आसन्न कोण

शीर्षबिन्दु र एउटा भुजा साझा भएको र आपसमा नखप्टिएका कोणहरूलाई आसन्न कोणहरू भनिन्छ । जसमा साझा नभएका भुजाहरू साझा भुजाको विपरीत दिसामा पर्दछन् । चित्रमा $\angle ABD$ र $\angle CBD$ आसन्न कोणहरू हुन्, जसमा साझा शीर्ष बिन्दु B र साझा भुजा BD छ । $\angle ABC$ र $\angle ABD$ मा साझा शीर्ष बिन्दु B र साझा भुजा AB भएर पनि आपसमा खप्टिएकाले आसन्न कोणहरू होइन । त्यसरी नै $\angle ABC$ र $\angle DBC$ पनि आसन्न कोणहरू होइनन् ।



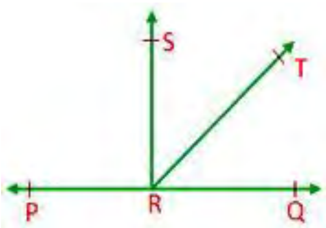
शीर्षाभिमुख कोणहरू

दुई ओटा सिधा रेखाहरू आपसमा काटिँदा बन्ने कोणहरू जसको भुजाहरू विपरीत दिशामा हुन्छन्, ती कोणहरूलाई शीर्षाभिमुख कोणहरू भनिन्छ । शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।



सम्बन्धित कोणहरू बारे साध्यहरू

1. यदि एउटा ray रेखामा stand गर्छ भने आसन्न कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।



दिइएको : एउटा ray RT रेखा PQ मा अडिएको छ । दुई ओटा कोणहरू $\angle PRT$ र $\angle QRT$ बनेका छन् ।

जुक्ति : $RS \perp PQ$ खिच्नुहोस् ।

प्रमाण :

$\angle PRT = \angle PRS + \angle SRT$ ------------ (i)

$\angle QRT = \angle QRS - \angle SRT$ ------------ (ii)

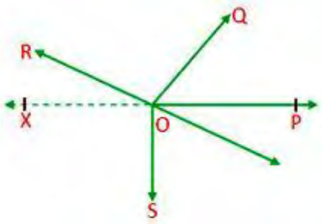
समीकरण (i) र (ii) लाई जोडौँ

$\angle PRT + \angle QRT = \angle PRS + \angle SRT + \angle QRS - \angle SRT$

$= \angle PRS + \angle QRS$

$= 90° + 90° = 180°$

2. एउटा बिन्दुको वरपर बनेका कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।



दिइएको : बिन्दु 0 र ray हरू $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OT}$ ले बिन्दु O को वरपर कोणहरू बनाएका छन् ।

जुक्ति : ray $\overrightarrow{OP}$ को विपरीतमा OX खिचौँ ।

प्रमाण : $\overrightarrow{OQ}$ ray $\overrightarrow{XP}$ मा stand गरेकाले, $\angle POQ + \angle QOX = 180°$

$\angle POQ + \angle QOR + \angle ROX = 180°$ ------------ (i)

फेरि $\overrightarrow{OS}$ ray $\overrightarrow{XP}$ मा stand गरेकोले,

$\angle XOS + \angle SOP = 180°$ ------------ (ii)

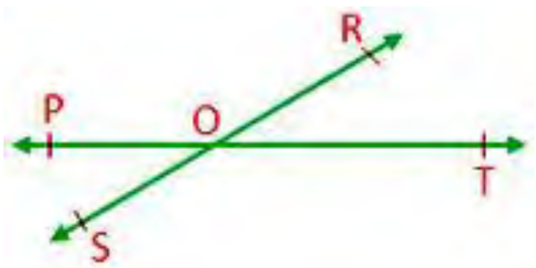
$\angle XOS + \angle SOT + \angle TOP = 180°$ ------------- (ii)

समीकरण (i) र (ii) लाई जोडौँ,

$\angle POQ + \angle QOR + \angle ROX + \angle XOS + \angle SOT + \angle TOP = 180° + 180°$

$\angle POQ + QOR + \angle ROS \;\; \angle SOT + \angle TOP = 360°$

3. दुई ओटा सिधा रेखाहरू एकआपसमा काटिँदा बन्ने शीर्षाभिमुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।



दिइएको : PQ र RS रेखा एकआपसमा O मा काटिएका छन् ।

प्रमाण : $\overrightarrow{OR}$ ray PQ मा stand गरेकाले,

$\angle POR + \angle ROQ = 180°$ -------------- (i)

$\overrightarrow{PO}$ raw RS मा stand गरेकाले,

$\angle POR + \angle POS = 180°$ -------------- (ii)

समीकरण (i) र (ii) बाट

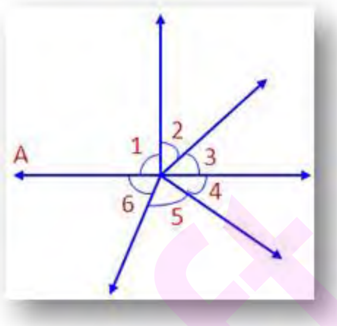
$\angle POR + \angle ROQ = \angle POR + \angle POS$

त्यसकारण, $\angle ROQ = \angle POS$, त्यसरी नै $\angle POR = \angle QOS$ प्रमाणित हुन्छ । यसलाई कागज पट्याउने विधि, जियोबोर्ड वा प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

केही ज्यामितीय शब्द र नतिजा (Terms and Result)

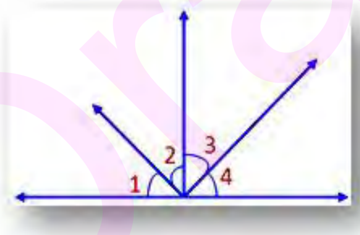
1. एउटा बिन्दुमा बनेका सबै कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

   i.e. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$

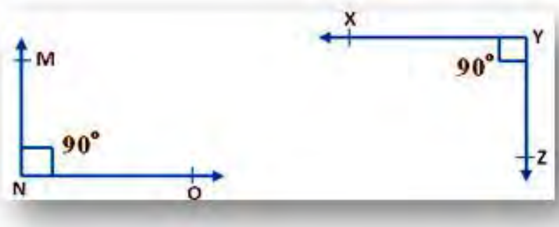


2. एउटा रेखाको एउटा बिन्दुमा बनेको कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

   i.e. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$



3. दुई ओटा कोणहरूको नाप उही भए ती कोणहरूलाई बराबर भनिन्छ । $\angle MNO = \angle XYZ$

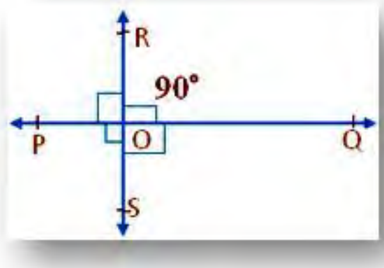


4. एउटा रेखाखण्ड जसले दिइएको कोणलाई बराबर कोणमा विभाजन गर्दछ भने त्यो रेखाखण्ड लाई कोणको अर्धक भनिन्छ ।

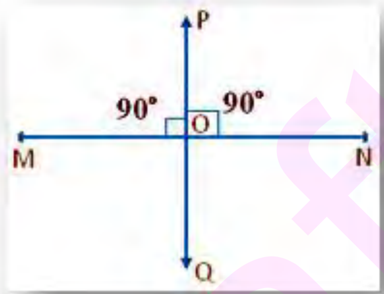
   यहाँ $\angle ABD = \angle CBD$ भएकोले रेखाखण्ड $\overrightarrow{BD}$ अर्धक हो ।

5. दुई ओटा रेखाहरू एकआपसमा लम्ब हुँदा रेखाहरूबिचको कोण एक समकोण हुन्छ ।

   यहाँ, $\angle POS = \angle QOS = \angle ROQ = \angle ROP = 90°$ भएकोले PQ र RS एकआपसमा लम्ब छन् । i.e. $PQ \perp RS$

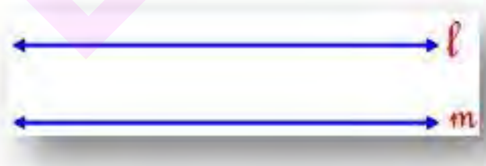


6. यदि एउटा रेखा अर्को रेखाखण्डको मध्यबिन्दु भएर जान्छ, साथै एकआपसमा लम्ब पनि हुन्छन् भने त्यस्तो रेखालाई रेखाखण्डको लम्बार्धक भनिन्छ । यहाँ, O बिन्दु MN को मध्यबिन्दु र $\angle PON = \angle POM = 90°$ भएकाले रेखा $\overleftrightarrow{PQ}$ रेखाखण्ड MN को लम्बार्धक हो ।



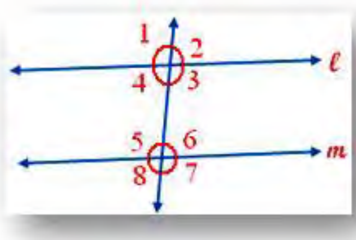
समानान्तर रेखाहरू

दुवै दिसातर्फ अनन्त रूपमा अघि बढाउँदा पनि एकआपसमा भेट नहुने रेखाहरूलाई समानान्तर रेखाहरू भनिन्छ । समानान्तर रेखाहरू बिचको दुरी हरेक ठाउँमा समान हुन्छ । समानान्तर रेखाहरूलाई // सङ्केतले जनाइन्छ । यदि दुई ओटा रेखाहरू l र m समानान्तर छन् भने $l \| m$ लेखिन्छ ।



छेदकले दुई ओटा रेखाहरूलाई काट्दा बन्ने कोणहरू

दुई ओटा समानान्तर रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा बन्ने सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् ।



($\angle 2 = \angle 6$); ($\angle 3 = \angle 7$); ($\angle 1 = \angle 5$); ($\angle 4 = \angle 8$)

- भित्री एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

  ($\angle 4 = \angle 6$); ($\angle 3 = \angle 5$)

- बाहिरी एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

  ($\angle 1 = \angle 7$); $9\angle 2 = \angle 8$)

- क्रमागतभित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

  $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ र $\angle 4 + \angle 5 = 180°$

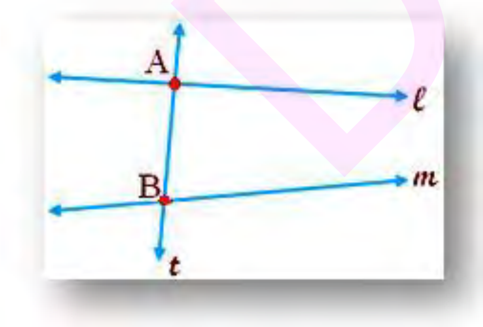
  दुई ओटा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा यदि

- सङ्गत कोणहरू बराबर भए, रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् ।
- भित्री एकान्तर कोणहरू बराबर भए, रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् ।
- बाहिरी एकान्तर कोणहरू बराबर भए, रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् ।
- क्रमागतभित्री कोणहरूको यागफल 180° भए रेखाहरू एकआपसमा समानान्तर हुन्छन् ।

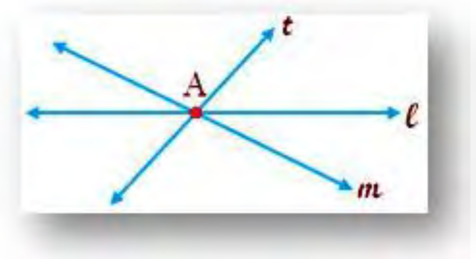
त्यसकारण दुई ओटा रेखाहरूलाई समानान्तर छन् भनी प्रमाणित गर्न सङ्गत कोणहरू बराबर वा एकान्तर कोणहरू बराबर वा क्रमागत भित्री कोणको योगफल दुई समकोण हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुपर्दछ ।

छेदक

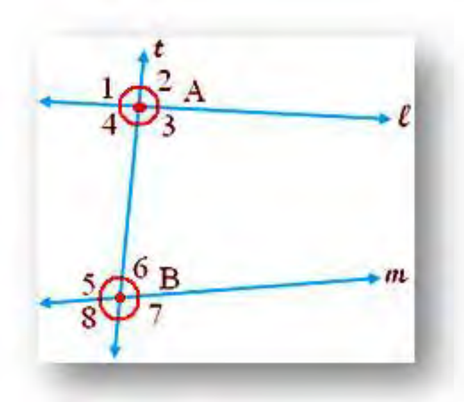
यदि एउटा रेखाले दुई ओटा रेखाहरूलाई दुई ओटा बिन्दुमा भेट्दछ भने त्यो रेखालाई छेदक भनिन्छ । तलको चित्रमा t रेखाले *l* र m रेखाहरूलाई दुई ओटा बिन्दुमा काटेको हुँदा t रेखालाई छेदक भनिन्छ ।



तर यो चित्रमा t रेखा छेदक होइन किनभने t रेखाले *l* र m रेखालाई एउटा मात्र बिन्दुमा काटेको छ ।



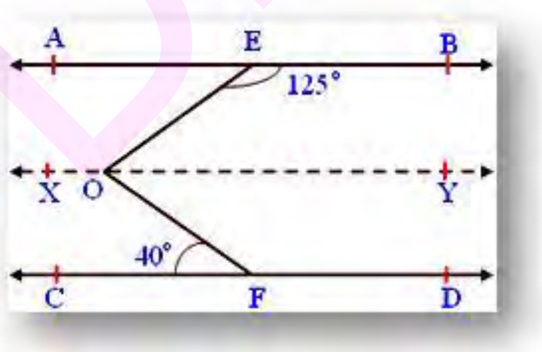
छेदकले दुई ओटा रेखाहरूलाई काट्दा बन्ने कोणहरू



चित्रमा l र m दुई ओटा रेखाहरूलाई t छेदकले A र B बिन्दुमा काट्दा बनेका कोणहरू ∠1, ∠2, ∠3, ∠4, ∠5, ∠6, ∠7, ∠8 छन् । जसमध्ये :

- ∠3, ∠4, ∠5, ∠6 हरूभित्री कोणहरू हुन् ।
- ∠1, ∠2. ∠7, ∠8 हरू बाहिरी कोणहरू हुन् ।
- जोडा (∠2, ∠6); (∠3, ∠7); (∠1, ∠5);)(∠4, ∠8) हरू सङ्गत कोणहरू हुन् ।
- जोडा (∠4, ∠6), (∠3, ∠5) हरूभित्री एकान्तर कोणहरू हुन् ।
- जोडा (∠1, ∠7), (∠2, ∠8) हरू बाहिरी एकान्तर कोणहरू हुन् ।
- जोडा (∠3, ∠6), (∠4, ∠5) हरू क्रमागतभित्री कोणहरू हुन् ।

उदाहरण : दिइएको चित्रमा AB||CD, ∠BEO = 125°, ∠CFO = 40° छ । अब ∠EOF को मान निकाल ।



उत्तर : O बिन्दुबाट जाने गरी AB र CD सँग समानान्तर हुने गरी रेखा XY खिचौं । अब,

$\angle BEO + \angle YOE = 180°$ (क्रमागतभित्री कोणहरू)

or, $125° + \angle YOE = 180°$

$\angle YOE = 55°$

y, $\angle CFO = \angle YOF$ (एकान्तर कोण)

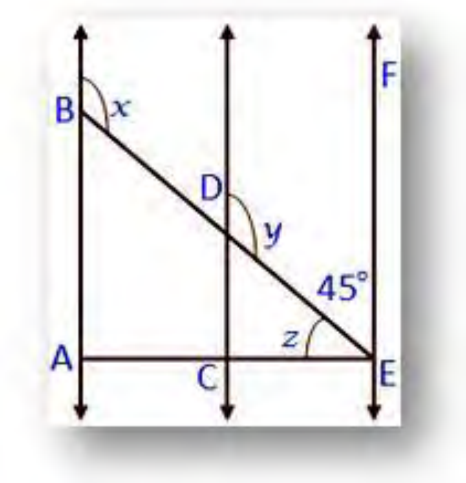
$40° = \angle YOF$

or, $\angle YOF = 40°$

अब, $\angle EOF = \angle EOY + \angle FOY$

$= 55° + 40° = 95°$

उदाहरण : दिइएको चित्रमा AB//CD//EF र $\angle BAE = 90°$ भए $\angle x, \angle y, \angle z$ को मान निकाल ।



उत्तर : $y + 45° = 180°$ (क्रमागतभित्री कोणहरू)

or, $y = 135°$

yk $\angle y = \angle x$ (सङ्गत कोणहरू)

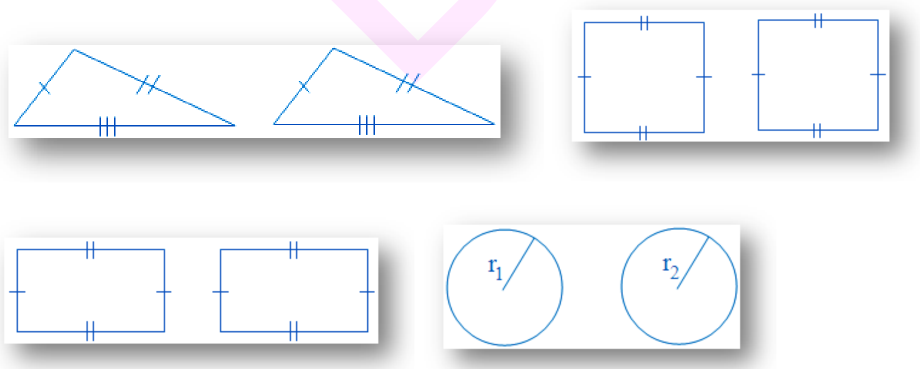
or, $\angle x = 135°$

अब, $90° + z + 45° = 180°$ (क्रमागतभित्री कोणहरू)

$\angle z = 180° = 135°$

$= 45°$

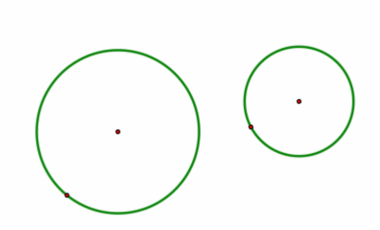
अनुरूप आकारहरू



दुई ओटा चित्र वा आकारहरू एकआपसमा अनुरूप हुँदा ती चित्रहरू एउटै आकार र नापका हुन्छन् । अनुरूप आकारका चित्रहरू एकै ठाउँमा राख्दा exacty overlap हुन्छन् । अनुरूपतालाई $\cong$ ले जनाइन्छ । उदाहरण :

- बराबर लम्बाइ भएका दुई ओटा रेखाखण्डहरू अनुरूप हुन्छन् ।
- बराबर अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्तहरू अनुरूप हुन्छन् ।

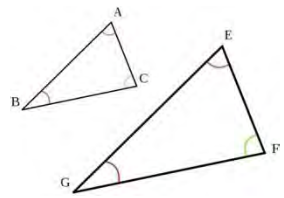
- भुजाका लम्बाइहरू बराबरभएका दुई ओटा त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।
- सङ्गत भुजाहरू बराबर भएका दुई ओटा आयतहरू अनुरूप हुन्छन् ।
- भुजाको लम्बाइ बराबर भएका दुई ओटा वर्गहरू अनुरूप हुन्छन् ।



समरूप आकारहरू

दुई ओटा चित्र वा आकारहरू एकआपसमा समरूप हुँदा ती चित्रहरू एउटै आकार तर फरक नापका हुन्छन् । समरूप आकारका चित्रहरू खप्ट्याएर राख्दा बराबर हुँदैनन वा नहुन सक्छन् । समरूपतालाई ~ ले जनाइन्छ । उदाहरण :

- फरक अर्धव्यास भएका दुई ओटा वृत्तहरू समरूप हुन्छन।
- फरक लम्बाइ भएका दुई ओटा रेखाखण्डहरू समरूप हुन्छन् ।



नोट : सबै अनुरूप चित्रहरू समरूप हुन्छन् । तर सबै समरूप चित्रहरू अनुरूप हुँदैन ।

त्रिभुजको अनुरूपता

यदि दुई ओटा त्रिभुजहरू जुन एकआपसमा exactly overlap हुन्छन् भने ती त्रिभुजहरू अनुरूप त्रिभुजहरू हुन् । मानौं ΔABC र ΔDEF दुई ओटा अनुरूप त्रिभुजहरू हुन् । यी दुई त्रिभुजहरू exactly overlap हुँदा ΔABC का शीर्ष बिन्दुहरू क्रमशः A, B, C, ΔDEF का शीर्ष बिन्दुहरूसँग D, E र F सँग मिल्न आउँछन् । यसको आधारमा सङ्गत भुजा र कोण पत्ता लगाउन सकिन्छ । जुन एकआपसमा बराबर हुन्छन् ।

सङ्गत भुजाहरू क्रमशः $AB = DE, BC = EF, CA = FD$

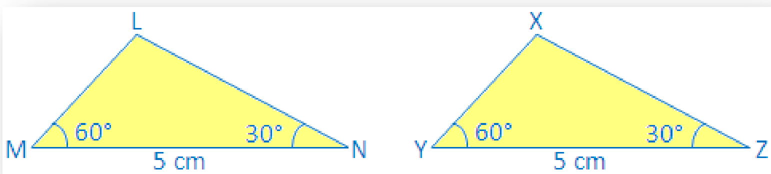
सङ्गत कोणहरू क्रमशः $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

नोट : दुई त्रिभुजहरू अनुरूप छन् भने पहिलो त्रिभुजको तिन ओटा भुजा र कोणहरू, दोस्रो त्रिभुजको तिन ओटा र कोणहरूसँग अलग अलग बराबर हुन्छन् । एकआपसमा बराबर हुने भुजाहरू र कोणहरूलाई सङ्गत भुजा र कोणहरू भनिन्छ ।

त्रिभुजहरू अनुरूप हुने अवस्थाहरू (Conditions for the Congruence of Triangles)

त्रिभुजहरू अनुरूप हुने अवस्थाहरू त्रिभुजको तिन ओटा भुजा र कोणहरूमा निर्भर रहन्छ । अनुरूप देखाइसकेपछि एउटा त्रिभुजको 6 ओटा भाग अर्को त्रिभुजको 6 ओटा भागसँग अलग अलग बराबर
हुन्छ । त्रिभुजहरू अनुरूप देखाउन प्रयोग हुने 5 ओटा तथ्यहरू छन् ।

(क) कोण भुजा कोण तथ्य (को.भु.को.)

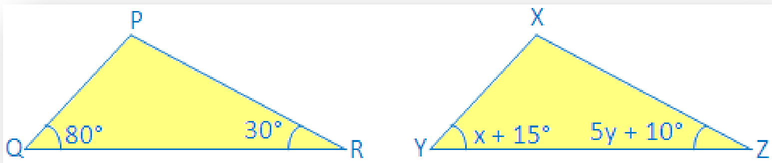


यदि एउटा त्रिभुजको दुई ओटा कोण र ती कोणहरूबिचको भुजा अर्को त्रिभुजको दुई ओटा कोण र ती कोणहरू बिचको भुजासँग आपसमा अलग अलग बराबर भए ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।

मानौँ एउटा ΔLMN मा $\angle M = 60°$, $MN = 5$ cm र $\angle N = 30°$ छन् ।

अर्को ΔXYZ मा $\angle Y = 60°$, $YZ = 5$ cm, $\angle Z = 30°$ भए यी दुई त्रिभुजहरूलाई एकआपसमा L मा X, M मा Y र N मा Z हुने गरी खप्ट्याउँदा एउटा त्रिभुजले अर्को त्रिभुजलाई पूर्ण रूपमा लुकाउँदछ । त्यसकारण $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$ हुन्छ ।

उदाहरण : यदि $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ भए x र y को मान पत्ता लगाऊ ।



यहाँ, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ भएकोले

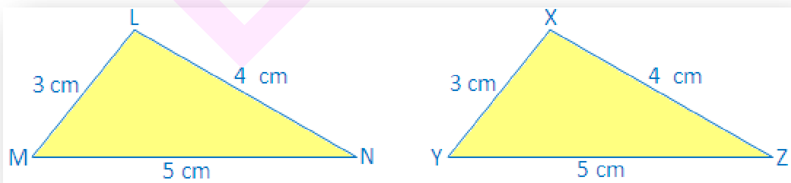
$\angle Q = \angle Y$ i.e. $x + 15 = 80°$ त्यसैले $x = 65°$

र $\angle R = \angle Z$ i.e $5y + 10 = 30°$ त्यसैले $y = 4°$

नोट : अनुरूप त्रिभुजहरूमा सङ्गत भुजाहरू र सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् । सङ्गत भुजा पत्ता लगाउन बराबर भएको कोणको प्रयोग र कोण पत्ता लगाउन बराबर भएको भुजाको प्रयोग गरिन्छ । माथि $PR = XZ$ छ किनभने यी दुवै भुजाहरू अनुरूप त्रिभुजको बराबर कोणहरू $\angle PQR$ र $\angle XYZ$ को सम्मुख भुजाहरू हुन् ।

ख) भुजा भुजा भुजा तथ्य (भु.भु.भु.)

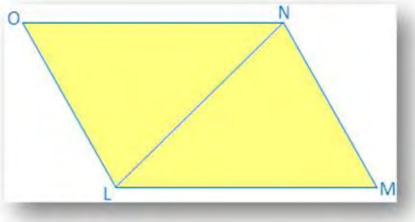
यदि एउटा त्रिभुजका तिन ओटा भुजाहरू अर्को त्रिभुजका तिन ओटा भुजासँग अलग अलग आपसमा बराबर भए ती त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।



मानौँ ΔLMN मा $\angle M = 3$ cm, $\angle N = 4$ cm, $MN = 5$ cm छ र ΔXYZ मा $XY = 3$ cm, $XZ = 4$ cm, YZ 5 cm छन् ।

यी दुई त्रिभुजहरू एकआपसमा L मा X, M मा Y, र N मा Z हुने गरी खप्ट्याउँदा एउटा त्रिभुजले अर्को त्रिभुजलाई पूर्ण रूपमा लुकाउँदछ त्यसकारण $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$ हुन्छ । (भु.भु.भु. तथ्यको प्रयोग)

उदाहरण : सम्मुख भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



यहाँ, LMNO एउटा चतुर्भुज हो । जसमा $LM = ON$ र $LO = MN$ छ विकर्ण LN खिचौँ ।

प्रमाण : ΔLMN र ΔNOL मा

$LM = ON$, $OL = MN$ (दिइएको)

$LN = LN$ (साझा भुजा)

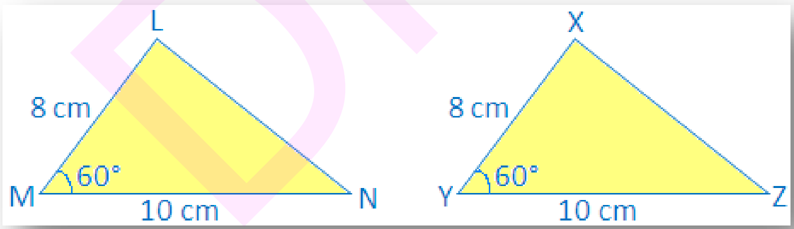
त्यसकारण $\Delta LMN \cong \Delta NOL$ (भु.भु.भु. तथ्य)

त्यसकारण $\angle MLN = \angle LNO$ (सङ्गत कोणहरू)

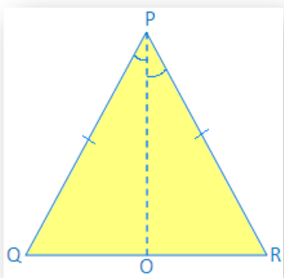
यी दुवै कोणहरू बराबर भुजाहरू MN र OL का सम्मुख कोणहरू हुन् । त्यसकारण $LO \| MN$ एकान्तर कोण बराबर भएकाले LMNO एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

भुजा कोण भुजा तथ्य (भु.को.भु.)

यदि एउटा त्रिभुजको दुई ओटा भुजाहरू र यिनीहरूबिचको कोणसँग अर्को त्रिभुजको दुई ओटा भुजाहरू र तिनीहरूबिचको कोण अलग अलग आपसमा बराबर भए त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् । अत: $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$. (भु.को.भु. तथ्यको प्रयोग)



उदाहरण : समद्विबाहु त्रिभुजमा बराबर भुजाका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा ΔPQR समद्विबाहु त्रिभुज हो । जसमा $PQ = PR$ छ । $\angle QPR$ को अर्धक OP खिचौँ ।

अब ΔQPO र ΔRPO मा

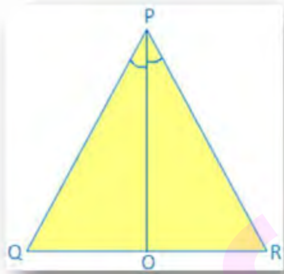
$PQ = PR$ दिइएको, $PO = PO$ (साझा भुजा)

$\angle QPO = \angle RPO$ (रचना अनुसार)

यसकारण $\Delta QPO \cong \Delta RPO$ (भु.को.भु. तथ्य)

त्यसकारण $\angle PQO = \angle PRO$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

उदाहरण : समद्विबाहु त्रिभुजमा vertical angle को अर्धक आधारको लम्बार्धक हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा ΔPQR समद्विबाहु त्रिभुज हो, जसमा PO ले $\angle QPR$ लाई बराबर भागमा बाडेको छ ।

अब, ΔPOQ र ΔPOR मा

$PQ = PR$ (दिइएको), $\angle QPO = \angle RPO$ (दिइएको)

$PO = PO$ (साझा भुजा)

यसकारण $\Delta POQ \cong \Delta POR$

त्यसकारण $OQ = OR$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू)

त्यसकारण $\angle POQ = \angle POR$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

हामीलाई थाहा छ,

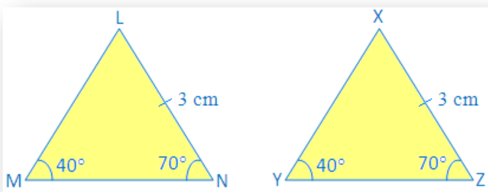
$\angle POQ + \angle POR = 180°$ (सिधा कोण)

$2\angle POQ = 180° \Rightarrow \angle POQ = 90°$

यसकारण $\angle POQ = \angle POR = 90°$

(घ) कोण कोण भुजा तथ्य (को.को.भु. तथ्य)

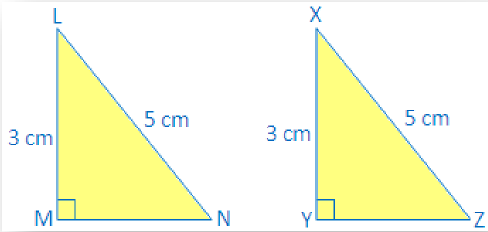
एउटा त्रिभुजको कुनै दुई ओटा कोण र एउटा भुजा अर्को त्रिभुजको कुनै दुई ओटा कोण र एउटा भुजासँग आपसमा अलग अलग बराबर भए त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।



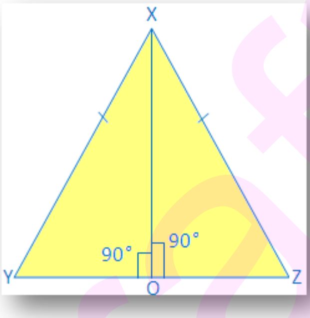
$\Delta LMN \cong \Delta XYZ$

(ङ) समकोण कर्ण भुजा तथ्य (स.क.भु.)

यदि एउटा त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा अर्को त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजासँग आपसमा अलग अलग बराबर भए भने त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन् ।



उदाहरण : समद्विबाहु त्रिभुज ΔXYZ मा $XY = XZ$ छ । त्रिभुजको उचाइ XO ले YZ लाई बराबर भागमा विभाजन गर्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



यहाँ, त्रिभुज ΔXOY र ΔXOZ मा

$\angle XOY = \angle XOZ$ (दुवै $90°$ भएकोले)

$XY = XZ$ (दिइएको)

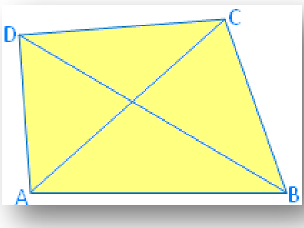
$XO = XO$ (साझा)

यसकारण $\Delta XOY \cong \Delta XOZ$

त्यसकारण $YO = OZ$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजाहरू)

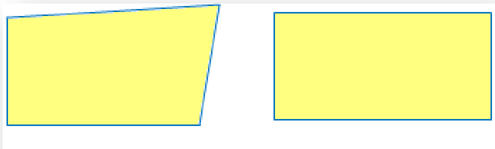
चतुर्भुज (Quadrilaterals)

चार ओटा रेखाखण्ड मिलेर बनेको बन्द सरल आकृतिलाई चतुर्भुज भनिन्छ । यसमा 4 ओटा भुजा, 4 ओटा कोणहरू, 4 ओटा शीर्षबिन्दुहरू र दुई ओटा विकर्णहरू हुन्छन् । यसमा रहेको 4 ओटा शीर्षबिन्दु मध्ये कुनै तिन ओटा शीर्षबिन्दुहरू रेखीय बिन्दुहरू हुँदैनन् ।



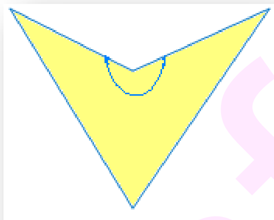
उन्नतोदर चतुर्भुज (Convex Quadrilateral)

यदि चतुर्भुजको प्रत्येक कोणहरू 180° भन्दा सानो भए त्यो चतुर्भुज Convex चतुर्भुज हो ।


Convex Quadrilaterals

नतोदर चतुर्भुज (Concave Quadrilateral)

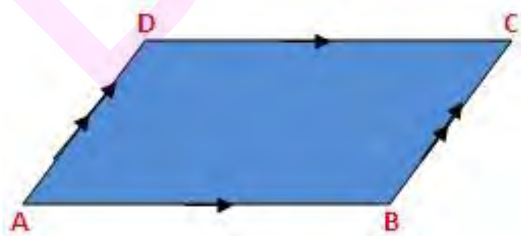
यदि कुनै चतुर्भुजको कम्तिमा एउटा कोण 180° भन्दा ठुलो भए त्यो चतुर्भुज concave चतुर्भुज हो ।


Concave Quadrilateral

विभिन्न किसिमका चतुर्भुजहरू

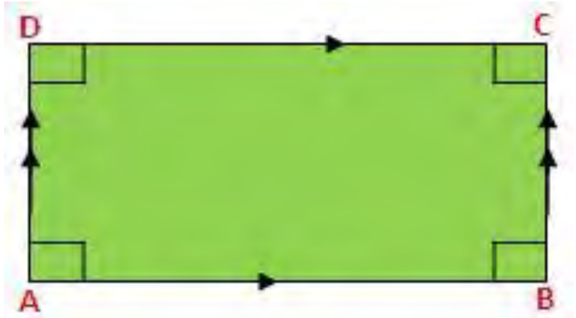
(क) समानान्तर चतुर्भुज

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भएका चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ । चित्रमा चतुर्भुज ABCD मा AB||DC र AD||BC भएकोले चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो । समानान्तर चतुर्भुजका मुख्य विशेषताहरू यस प्रकार छन् :



- एक जोडी सम्मुख भुजा बराबर र समानान्तर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।
- समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरूको नाप बराबर हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजका क्रमागतभित्री कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।
- समानान्तर चतुर्भुजमा एउटा विकर्णले समानान्तर चतुर्भुजलाई दुई अनुरूप त्रिभुजमा विभाजन गर्दछ ।

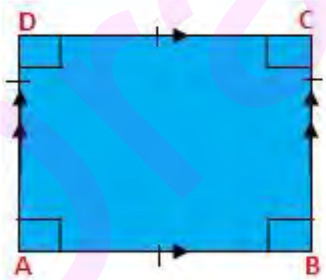
(ख) आयत : यदि समानान्तर चतुर्भुजको प्रत्येक कोणहरू एक समकोण छन् भने त्यो समानान्तर चतुर्भुजलाई आयत भनिन्छ ।



चित्रमा चर्तुभजु ABCD मा AB||DC, AD||BC र $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ भएकाले ABCD आयत हो । आयतका मुख्य विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- आयतका विपरीत भुजाहरू बराबर र समानान्तर हुन्छन् ।
- आयतका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।
- आयतका विकर्णहरू समद्विभाजित हुन्छन् ।
- आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) वर्ग : यदि समानान्तर चतुर्भुजको सबै भुजाहरू बराबर र प्रत्येक कोण एक समकोण छ भने त्यो समानान्तर चतुर्भुजलाई वर्ग भनिन्छ ।

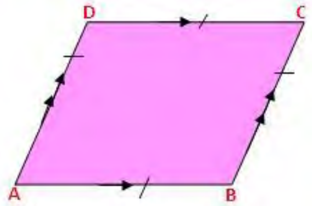


चित्रमा चतुर्भुज ABCD मा AB||DC, AD||BC, AB = BC = CD = AD र $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$ भएकोले ABCD वर्ग हो । वर्गका मुख्य विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- वर्गका सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।
- वर्गका सबै कोणहरू बराबर र समकोणी हुन्छन् ।
- वर्गका विकर्णहरू आपसमा समकोणी हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।
- वर्गको प्रत्येक विकर्णले शीर्ष कोणलाई आधा गर्दछन् ।
- वर्गलाई यसको दुई विकर्णले चार बराबर भागमा विभाजन गर्छन् ।

(घ) समबाहु चतुर्भुज

सबै भुजाहरू बराबर भएको समानान्तर चतुर्भुजलाई समबाहु चतुर्भुज भनिन्छ ।



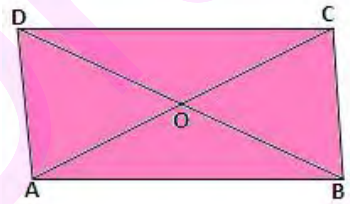
चित्रमा चतुर्भुज ABCD मा AB||DC, AD||BC र AB = BC = CD = AD भएकाले ABCD समबाहु चतुर्भुज हो । समबाहु चतुर्भुजका मुख्य विशेषताहरू यस प्रकार छन् :

- समबाहु चतुर्भुजको सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।
- समबाहु चतुर्भुजको सम्मुख भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।
- समबाहु चतुर्भुजको क्रमागतभित्री कोणहरू परिपूरक हुन्छन् ।
- समबाहु चतुर्भुजको विकर्णहरू एकआपसमा समकोणी हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।
- समबाहु चतुर्भुजको प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्दछ ।

समानान्तर चतुर्भुज, **आयत र समबाहु चतुर्भुजका गुणहरू**

आयतको विकर्णको गुण

१. आयतको विकर्णहरू एकआपसमा बराबर र समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा आयत ABCD मा विकर्णहरू AC र BD एकआपसमा O बिन्दुमा काटिएका छन् ।

अब, ΔABC र ΔBAD मा

AB = BA (साझा)

$\angle ABC = \angle BAD$ (दुवै 90° भएकाले)

BC = AD (आयतको सम्मुख भुजा)

त्यसकारण, $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (भु.को.भु. तथ्य)

यसैले AC = BD (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत भुजा)

त्यसकारण आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् ।

फेरि, ΔAOB र ΔDOC मा

$\angle AOB = \angle DOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle ABO = \angle CDO$ (एकान्तर कोण)

$AB = CD$ (सम्मुख भुजा)

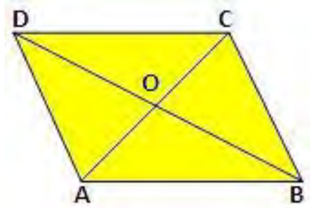
त्यसकारण $\Delta AOB \cong COD$ (भु.को.को. तथ्य)

यसैले $AO = OC$ र $OB = OD$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गती भुजा भएकोले)

त्यसकारण आयतका विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् ।

समबाहु चतुर्भुजको विकर्णको गुण

२. समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा समकोण र समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा ABCD एउटा समबाहु चतुर्भुज हो । जसमा AC र BD विकर्णहरू O बिन्दुमा काटिएका छन् । हामीलाई थाहा छ समानान्तर चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् । अनि हामीलाई यो पनि थाहा छ सबै समबाहु चतुर्भुजहरू समानान्तर चतुर्भुज हुन् ।

यसैले समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् । यसकारण $OA = OC$ र $OB = OD$ हुन्छ ।

अब ΔCOB र ΔCOD मा

$CD = CB$ (समबाहु चतुर्भुजका भुजाहरू)

$CO = CO$ (साझा भुजा)

$OB = OD$ (प्रमाणित)

त्यसकारण $\Delta COB \cong \Delta COD$ (भु.भु.भु.)

यसैले $\angle COB = \angle COD$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

तर $\angle COB + \angle COD =$ दुई समकोण

त्यसकारण $\angle COB = \angle COD =$ एक समकोण

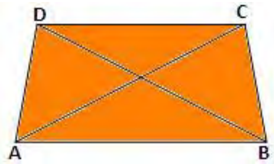
त्यसकारण समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा लम्ब हुन्छन् ।

वर्गको विकर्णको गुण

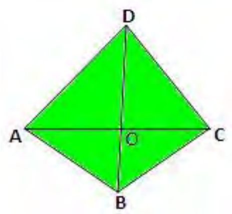
क) वर्गका विकर्णहरू बराबर र एकआपसमा समकोण र समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

आयतका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् । वर्ग एउटा आयत हो । त्यसैले वर्गका विकर्णहरू बराबर हुन्छन् । समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा लम्ब र समद्विभाजन हुन्छन् र सबै वर्गहरू समबाहु चतुर्भुज हो । यसैले विकर्णहरू एकआपसमा लम्ब र समद्विभाजन हुन्छन् । त्यसकारण वर्गका विकर्णहरू बराबर र एकआपसमा लम्ब र समद्विभाजन हुन्छन् ।

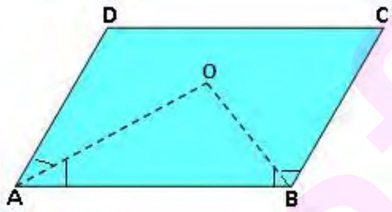
Note 1 : यदि चतुर्भुजका विकर्णहरू बराबर छन् भने त्यो चतुर्भुजलाई आयत नै हो भनेर सधैं भन्न सकिँदैन ।



Note 2 : यदि चतुर्भुजका विकर्णहरू बराबर छन् भने त्यो चतुर्भुजलाई समबाहु चतुर्भुज नै हो भनेर सधै भन्न सकिदैन ।



उदाहरण : दिइएको चित्रमा ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो । OA र OB क्रमशः $\angle A$ र $\angle B$ का अर्धकहरू हुन् । $\angle AOB = 90°$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



उत्तर : $\angle A + \angle B = 180°$

$\angle OAB = \frac{1}{2}\angle A$ & $\angle ABO = \frac{1}{2}\ \angle B$

अब ΔOAB मा

$\angle OAB + \angle AOB + \angle ABO = 180°$

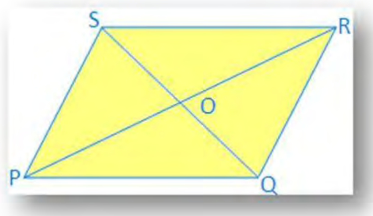
$\frac{1}{2}\angle A + \angle AOB + \frac{1}{2}\angle B = 180°$

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + \angle AOB = 180°$

$\frac{1}{2} \times 180° + \angle AOB = 180°$

$\angle AOB = 90°$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण : चतुर्भुज PQRS मा $PQ + QR + RS + SP < 2\ (PR + QS)$ हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



उत्तर : ΔPOS मा $PO + OS > PS$

ΔSOR मा $SO + OR > SR$

ΔQOR मा $QO + OR > QR$

ΔPOQ मा $PO + OQ > PQ$

यी सबै सम्बन्धहरूलाई जोडौं

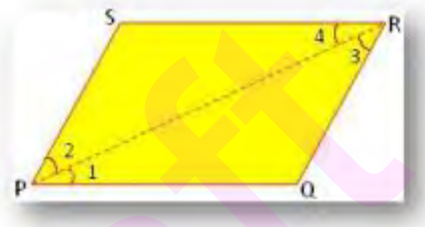
$PO + OS + OS + OR + OQ + OR + OP + OQ > PS + SR + QR + PQ$

$2(OP + OQ + OR + OS) > PQ + QR + RS + SP$

$\therefore 2(PR + QS) > PQ + QR + RS + SP$ प्रमाणित भयो ।

$\therefore PQ + QR + RS + SP < 2(PR + QS)$

उदाहरण : समानान्तर चतुर्भुजमा सम्मुख भुजा तथा सम्मुख कोणहरू बराबर र विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



मानौं PQRS एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो । विकर्ण PR खिचौं ।

अब ΔPQR र ΔRSP मा

$\angle 1 = \angle 4$ (एकान्तर कोण)

$\angle 3 = \angle 2$ (एकान्तर कोण)

$PR = RP$ (साझा कोण)

$\therefore \Delta PQR \cong \Delta RSP$ (को.भु.को.)

त्यसकारण $PQ = RS$, $QR = SP$ र $\angle Q = \angle S$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजा र कोण भएकाले)

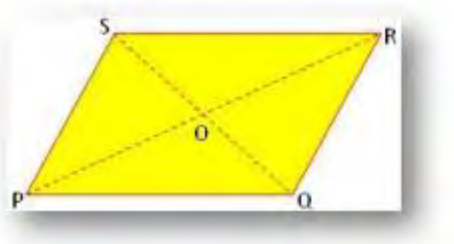
त्यसरी नै विकर्ण QS खिचौ अनि

$\Delta PQS \cong \Delta RSQ$ प्रमाणित गर्न सकिन्छ ।

त्यसकारण $\angle P = \angle R$

त्यसकारण समानान्तर चतुर्भुजका सम्मुख भुजाहरू र सम्मुख कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

अब समानान्तर चतुर्भुज PQRS मा विकर्णहरू PR र QS खिचौ यी दुई विकर्णहरू 0 बिन्दुमा काटिएको छ ।



अब, ΔOPQ र ΔORS मा

$PQ = RS$ (प्रमाणित)

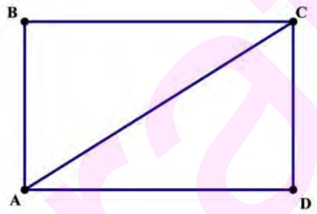
$\angle POQ = \angle ROS$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$\angle OPQ = \angle ORS$ (एकान्तर कोण)

त्यसकारण $\Delta OPQ \cong \Delta ORS$ (को.भु.को)

त्यसकारण $OP = OR$ र $OQ = OS$ विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन भए ।

उदाहरण : एकजोडी सम्मुख भुजाहरू बराबर र समानान्तर भएको चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा $AB = CD$ र $AB \| DC$ छ

विकर्ण AC खिचौँ । अब

ΔABC र ΔACD मा $AB = CD$ (दिइएको)

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकान्तर कोण, $AB \| DC$)

$AC = AC$ (साझा)

त्यसकारण $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (भु.को.भु.)

त्यसकारण $\angle BCA = \angle DAC$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

त्यसकारण $AD \| BC$ (एकान्तर कोण बराबर भएकोले)

त्यसकारण ABCD समानान्तर चतुर्भुज हो । ($AB \| DC$ र $AD \| BC$)

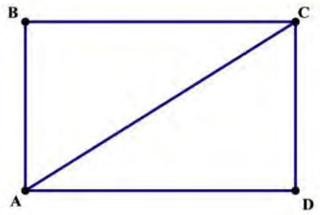
Note :

a) सम्मुख भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ ।

b) सम्मुख कोणहरू बराबर भएको चतुर्भुजलाई समानान्तर चतुर्भुज भनिन्छ ।

c) यदि कुनै चतुर्भुजका विकर्णहरू एकआपसमा समद्विभाजन हुन्छन् भने त्यो समानान्तर चतुर्भुज हो ।

उदाहरण : सम्मुख भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुज, समानान्तर चतुर्भुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



चित्रमा ABCD एउटा चतुर्भुज हो, जसमा AB = CD र AD = BC छन् । अब, विकर्ण AC खिचौं ।

अब ΔABC र ΔACD मा

AB = CD, AD = BC (दिइएको)

AC = AC (साझा भुजा)

यसैले $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (भु.भु.भु. तथ्य)

त्यसकारण, $\angle BAC = \angle DCA$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

$\angle BCA = \angle DAC$ (अनुरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

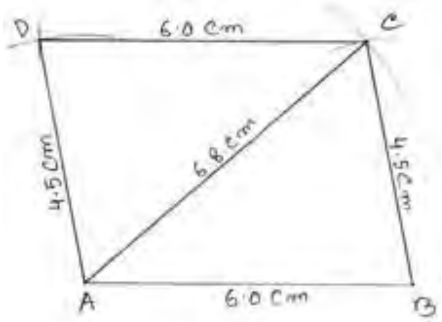
तसर्थ AB||DC, AD||BC (एकान्तर कोण बराबर भएकाले)

$\therefore$ ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

विभिन्न किसिमका चतुर्भुजको रचना

१. AB = 6cm, BC = 4.5cm र विकर्ण AC = 6.8cm भएको ABCD समानान्तर चतुर्भुज रचना गर्नुहोस् ।

समाधान



(क) एउटा AB = 6 cm भएको रेखा खण्ड खिचौं ।

ख) A बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र 6.8cm अर्धव्यास मानेर एउटा चाप खिचौं ।

((ग) B बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र 4.5cm अर्धव्यास मानेर नयाँ चापले पहिलेको चापलाई काटौ । जसले बिन्दु C पत्ता लगाउँछ ।

(घ) AC र BC लाई जोडौं ।

(ङ) A बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र 4.5cm अर्धव्यास मानेर एउटा चाप खिचौं ।

(च) C बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र 6cm अर्धव्यास मानेर बन्ने चापले अगाडिको चापलाई काट्छ जसले बिन्दु D पत्ता लगाउँछ ।

(छ) अब DA र DC लाई जोडौं । समानान्तर चतुर्भुज ABCD तयार भयो ।

२. BC = 5cm र विकर्ण BD = 6.2cm भएको आयत ABCD रचना गर्नुहोस् ।

(क) एउटा BC = 5cm भएको रेखाखण्ड खिचौं ।

(ख) CX⊥BC खिचौं ।

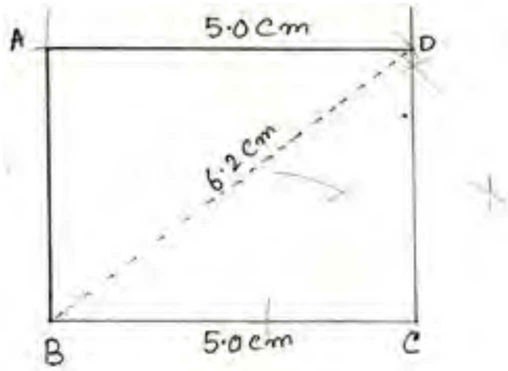
(ग) B लाई केन्द्र बिन्दु र 6.2cm अर्धव्यास मानेर बन्ने चापले CX लाई D मा काटौं ।

(घ) BD लाई जोडौं ।

(ङ) D लाई केन्द्र बिन्दु र 5cm अर्धव्यास मानेर एउटा चाप खिचौं ।

(च) बिन्दु B लाई केन्द्र बिन्दु र CD लाई अर्धव्यास मानेर बन्ने चापले अगाडिको चापलाई A बिन्दुमा काटौं ।

(छ) AB र AD जोडौं । यसरी आयत ABCD तयार भयो ।



३. विकर्णहरू 5.2cm भएको वर्ग ABCD रचना गर्नुहोस् ।

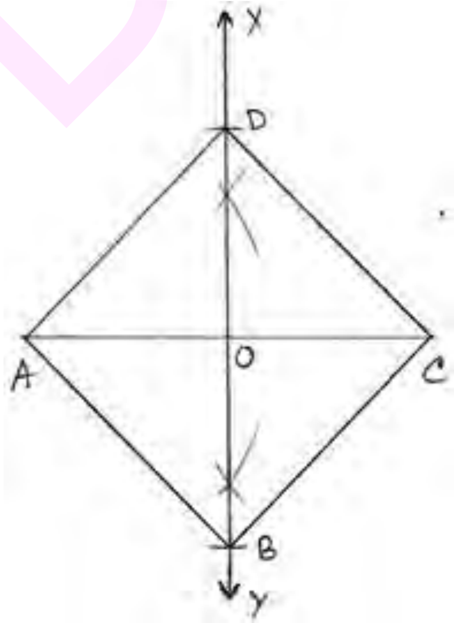
समाधान :

(क) AC = 5.2cm भएको रेखाखण्ड खिचौं ।

(ख) AC रेखाखण्डको समकोणी लम्बार्धक XY खिचौं । जसले AC लाई O बिन्दुमा काट्दछ ।

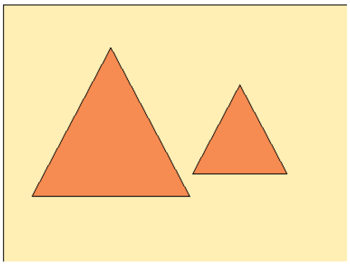
(ग) O बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र $\left(\frac{5.2}{2} = 2.6 \text{ cm}\right)$ लाई अर्धव्यास मानेर XY मा चापले काटौं । जसलाई B र D भनौं । (वर्गका विकर्णहरू एकआपसमा समकोणी हुने गरी विभाजित हुन्छन् ।)

(घ) अब AB, BC, CD र AD जोडौं । वर्ग ABCD तयार भयो ।



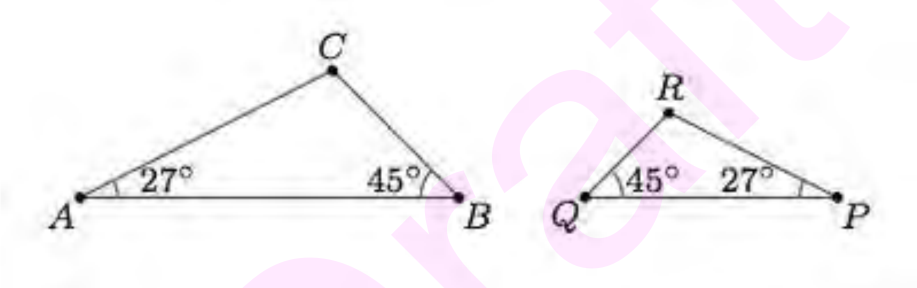
समरूप त्रिभुजहरू

दुई ओटा त्रिभुजहरू एउटै आकार तर फरक फरक नापका हुन्छन् भने ती त्रिभुजहरूलाई समरूप त्रिभुज भनिन्छ । समरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन् साथै सङ्गति भुजाहरूको अनुपात बराबर हुन्छन् । समरूपलाई ~ चिह्नले जनाइन्छ ।



त्रिभुजहरू समरूप हुने अवस्थाहरू

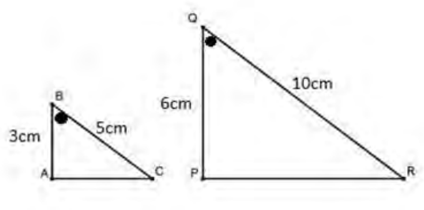
(क) यदि एउटा त्रिभुजका दुई ओटा कोणहरू अर्को त्रिभुजको दुई ओटा कोणसँग अलग अलग बराबर छन् भने त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । ΔABC र ΔPQR मा यदि $\angle A = \angle P$ र $\angle B = \angle Q$ भए $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हुन्छ ।



(ख) यदि एउटा त्रिभुजको एउटा कोण अर्को त्रिभुजको एउटा कोणसँग बराबर र त्यो कोण बनाउन प्रयोग भएका भुजाहरूको अनुपात बराबर भए त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् । i.e.

ΔABC र ΔPQR भए $\angle A = \angle P$ र $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$ भए

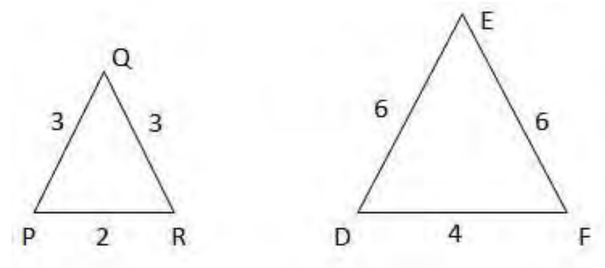
$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हुन्छ ।



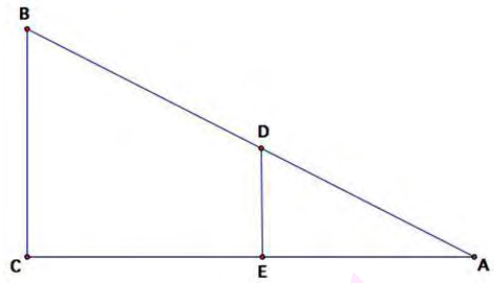
ग) दुई ओटा त्रिभुजहरूमा सङ्गत भुजाहरूको अनुपात बराबर भए त्रिभुजहरू समरूप हुन्छन् ।

ΔABC र ΔPQR मा यदि

$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ भए $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ हुन्छ ।



उदाहरण : तलको चित्रमा DE||BC, BC = 6cm, AB = 4cm, AD = 1cm भए DE को मान निकाल ।



उत्तर : ΔABC र ΔADE मा

$\angle ABC = \angle ADE$ (सङ्गत कोण)

$\angle BAC = \angle DAE$ (साझा कोण)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta AXY$ (को.को. तथ्य)

त्यसैले, $\frac{BC}{XY} = \frac{AB}{AX}$

or, $\frac{6}{XY} = \frac{4}{1}$

$\therefore XY = \frac{6}{4} = 1.5cm.$

उदाहरण : OP.OQ = OR.OS भए $\angle P = \angle R$ र $\angle Q = \angle S$ प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर : यहाँ

OP.OQ = OR.OS

$\Rightarrow \frac{OP}{OR} = \frac{OS}{OQ}$

ΔPOS र ΔROQ मा

$\angle POS = \angle ROQ$ (शीर्षभिमुख कोणहरू)

$\frac{OP}{OR} = \frac{OS}{OQ}$

$\therefore \Delta POS \sim \Delta ROQ$ (भु.को.भु. तथ्य)

अत: $\angle P = \angle R$ र $\angle S = \angle Q$ (समरूप त्रिभुजका सङ्गत कोणहरू)

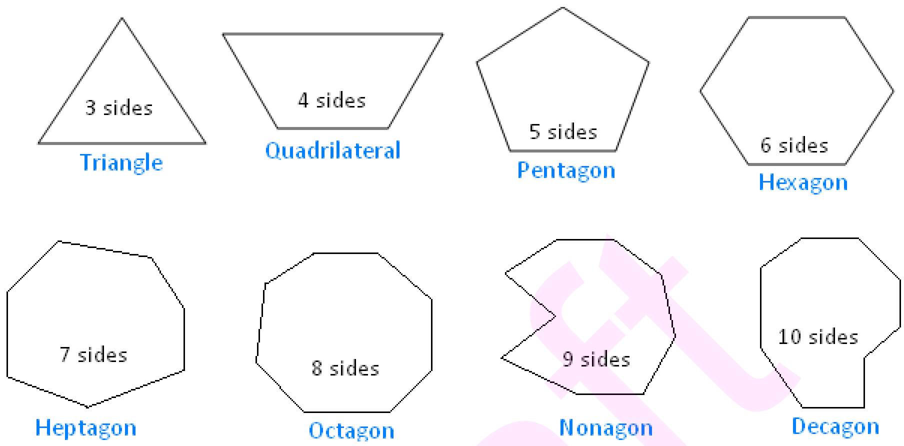
बहुभुज

तिन वा तिनभन्दा बढी भुजाहरूले बनेको सरल बन्द समतलीय आकृतिलाई बहुभुज भनिन्छ । बहुभुजमा बहुभुजको भुजा, शीर्षबिन्दु, विकर्ण,भित्री कोणहरू र बाहिरी कोणहरू प्रष्ट रूपमा परिभाषित गर्न सकिन्छ ।

नोट : कुनै पनि बहुभुजमा भुजा र शीर्षबिन्दुको सङ्ख्या बराबर हुन्छन् ।

बहुभुजको वर्गीकरण

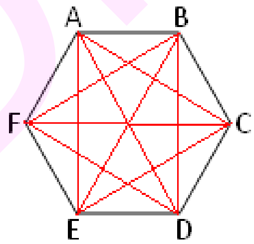
भुजा तथा शीर्षबिन्दुको आधारमा बहुभुजको वर्गीकरण गरिन्छ । जस्तै :



बहुभुजको विकर्ण

बहुभुजको कुनै दुई ओटासँगै नरहेका शीर्षबिन्दुहरू जोडेर बन्ने रेखाखण्डलाई विकर्ण भनिन्छ ।

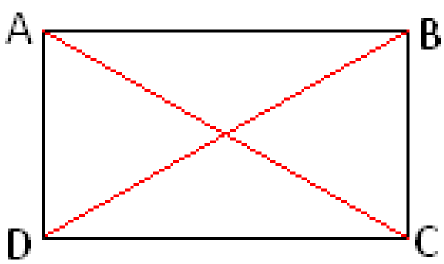
दिइएको चित्रमा AC, AD, FC, EB, BF, DB, FD, EC विकर्णहरू हुन् ।



बहुभजको विकर्णहरूको सङ्ख्या निकाल्न तलको सूत्र प्रयोग गरिन्छ ।

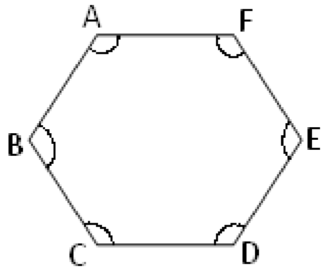
विकर्णहरूको सङ्ख्या $= \dfrac{n(n-3)}{2}$ जसमा n ले बहुभुजको भुजाहरूको सङ्ख्या जनाउँदछ ।

नोट : बहुभुजहरूमध्ये त्रिभुजको कुनै विकर्ण हुँदैन । चतुर्भुजको दुई ओटा विकर्णहरू हुन्छन् ।



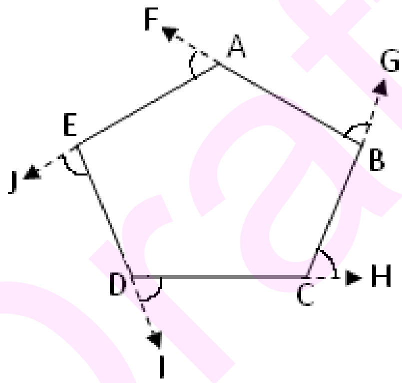
बहुभुजकोभित्री कोण

बहुभुजको दुई ओटासँगै रहेका रेखाखण्डहरू मिलेर बन्नेभित्र रहेको कोणलाई बहुभुजकोभित्री कोण भनिन्छ । षड्भुजमा जम्मा 6 ओटाभित्री कोणहरू हुन्छन् । दिइएको चित्रमा ∠ABC, ∠BCD, ∠CDE, ∠DEF, ∠EFA र ∠FAB षड्भुजकाभित्री कोणहरू हुन् ।



बहुभुजको बाहिरी कोण

बहुभुजको कुनै भुजालाई बाहिरतिर लम्ब्याउँदा सँगै रहेको भुजासँग लम्बिएको रेखाखण्डले बनाउने कोणलाई बहुभुजको बाहिरी कोण भनिन्छ । पञ्चभुजमा पाँचओटा बाहिरी कोणहरू हुन्छन् । दिइएको चित्रमा ∠EAF, ∠ABG, ∠BCH, ∠CDI र ∠DEJ बाहिरी कोणहरू हुन् ।

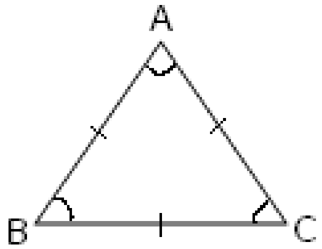


नोट : बहुभुजको कुनै बाहिरी कोण र सँगै रहेकोभित्री कोणको योगफल दुई समकोण हुन्छ ।

नियमित बहुभुज

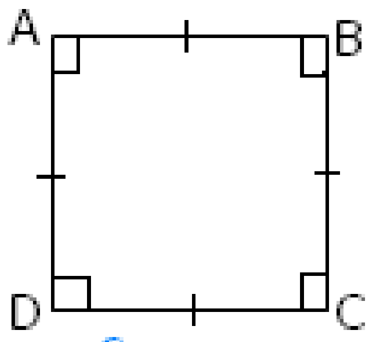
सबै भुजाहरू र सबैभित्री कोणहरू बराबर भएको बहुभुजलाई नियमित बहुभुज भनिन्छ । उदाहरण :

(क) समबाहु त्रिभुजको सबै भुजाहरू र सबैभित्री कोण बराबर हुन्छन् । तसर्थ यो नियमित बहुभुज
हो ।



Equilateral triangle

(ख) वर्गको सबै भुजाहरू र सबैभित्री कोणहरू बराबर हुन्छन् । तसर्थ वर्ग नियमित बहुभुज हो ।

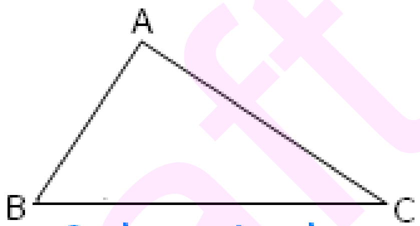


Square

अनियमित बहुभुज

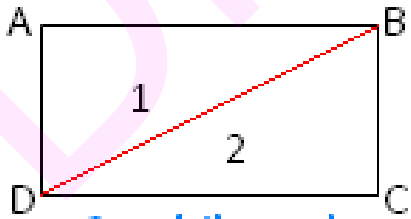
सबै भुजाहरू र कोणहरू बराबर नभएको बहुभुज अनियमित बहुभुज हो ।

उदाहरण : विषमवाहु त्रिभुज अनियमित बहुभुज हो । समलम्ब चतुर्भुज अनियमित बहुभुज हो ।



Scalene triangle

नोट : कुनै बहुभुजलाई जम्मा कति ओटा त्रिभुजमा छुट्याउन सकिन्छ भन्ने कुरा (n - 2) सूत्र प्रयोग गरेर निकाल्न सकिन्छ । जसमा n ले बहुभुजमा जम्मा भुजाहरूको सङ्ख्या जनाउँछ । जस्तै : चतुर्भुजलाई दुई त्रिभुजमा छुट्याउन सकिन्छ ।



Quadrilateral

बहुभुजकोभित्री कोणहरूको योगफल

एउटा n ओटा भुजा भएको बहुभुजलाई (n - 2) त्रिभुजहरूमा छुट्याउन सकिन्छ । एउटा त्रिभुजकोभित्री कोणहरूको योगफल $180°$ हुन्छ । त्यसकारण बहुभुजकोभित्री कोणको योगफल $180° \times (n - 2)$ हुन्छ ।

उदाहरण : हामीलाई थाहा छ चतुर्भुजमा जम्मा 4 ओटा भुजाहरू हुन्छन् र यसमाभित्री कोणहरूको योगफल $360°$ हुन्छ ।

यही कुरा $180° \times (n - 2)$ सूत्र प्रयोग गरी निकाल्दा

यहाँ, $180° \times (4 - 2) = 180° \times 2 = 360°$ हुन्छ ।

उदाहरण : एउटा 19 ओटा भुजा भएको बहुभुजकोभित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर :भित्री कोणहरूको योगफल $= 180° \times (n - 2)$

$= 180° \times (19 - 2)$

$= 180° \times 17$

$= 3060°$

नियमित बहभुजहरूकोभित्री कोणको नाप

कुनै n ओटा भुजा भएको नियमित बहुभुजको प्रत्येकभित्री कोणको मान $\theta = \frac{180 \times (n - 2)}{n}$ प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ ।

उदाहरण : भित्री कोण 135° भएको नियमित बहुभुजमा जम्मा भुजाहरूको सङ्ख्या कति हुन्छ ?

उत्तर : मानौं, जम्मा भुजाहरूको सङ्ख्या = n

प्रत्येकभित्री कोणहरूको मान $= \frac{180° \times (n - 2)}{n}$

$135° = \frac{180° (n - 2)}{n}$

or, $135n = 180n - 360$

or, $45n = 360°$

or, $n = 8$

नियमित बहुभुजको बाहिरी कोणको नाप

एउटा n ओटा भुजा भएको नियमित बहुभुजको प्रत्येक बाहिरी कोणको मान $\alpha = \frac{360°}{n}$ प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ ।

अनि नियमित बहुभुजको भुजाको जम्मा सङ्ख्या $= \frac{360°}{\text{प्रत्येक बराबरी बाहिरी कोण}}$

बहुभुजको बाहिरी कोणहरूको योगफल

हामीलाई थाहा छ,

एउटाभित्री कोण + सँगैको बाहिरी कोण = 180°

यदि बहुभुजको जम्मा भुजाहरूको सङ्ख्या n भए,

बाहिरी कोणहरूको योगफल +भित्री कोणहरूको योगफल = n.180°

त्यसकारण बाहिरी कोणहरूको योगफल = n.180° -leql कोणहरूको योगफल

$= n.180° - (n - 2).180°$

$= n.180° - n.180° + 360°$

$= 360°$

त्यसकारण कुनै पनि बहुभुजको बाहिरी कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।

उदाहरण : यदि एउटा पञ्चभुजको बाहिरी कोणहरू क्रमशः $(m + 5)°$, $(2m + 3)°$, $(3m + 2)°$, (4m

+ 1)° र (5m + 4)° भए प्रत्येकको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर : $(m + 5)° + (2m + 3)° + (3m + 2)° + (4m + 1)° + (5m + 4)° = 360°$

$15m + 15 = 360°$

$15m = 345°$

$m = 23°$

त्यसकारण पहिलो कोण = 28°, दोस्रो कोण = 49°, तेस्रो कोण = 71°, चौथो कोण = 93° र पाँचौं कोण = 119° हुन्छ ।

तीन आयामी चित्र (Three Dimensional Figures)

ठोस : निश्चित क्षेत्र ओगट्ने, निश्चित आकार र प्रकारका वस्तुहरूलाई ठोस भनिन्छ । ठोस वस्तुका विभिन्न ज्यामितीय आकारहरू हुन्छन् । ती आकारहरूलाई तिन आयामी चित्रहरू भनिन्छ । षड्मुखा, बेलना, गोला, पिरामिड, प्रिज्महरू तिन आयामी आकारहरू हुन् ।

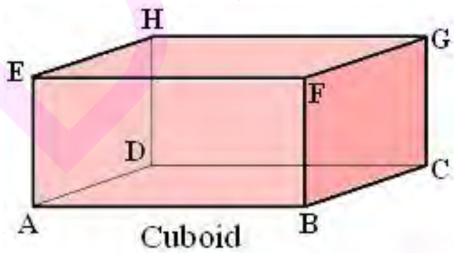
ठोस आकृतिका कुना, किनारा र मोहडाहरू हुन्छन् ।

मोहडा : ठोस वस्तुको प्रत्येक समतल सतहलाई मोहडा भनिन्छ ।

किनारा : दुई सतह मिलेर बनेको रेखाखण्डलाई किनारा भनिन्छ ।

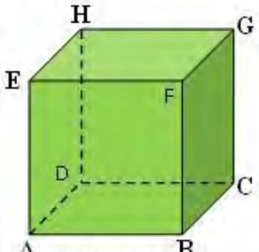
कुना : तिन ओटा सतहहरू भेट हुने एउटा बिन्दुलाई कुना भनिन्छ ।

षडमुखा : छ ओटा आयतकार सतह मिलेर बनेको बन्द ठोस वस्तुलाई षडमुखा भनिन्छ । जस्तै : किताब, इँटा, बाकस, इत्यादि । चित्रमा ABCDEFGH एउटा षड्मुखा दिइएको छ । एउटा षड्मुखामा 6 ओटा आयतकार मोहडा, 8 ओटा कुनाहरू र 12 ओटा किनाराहरू हुन्छन् ।



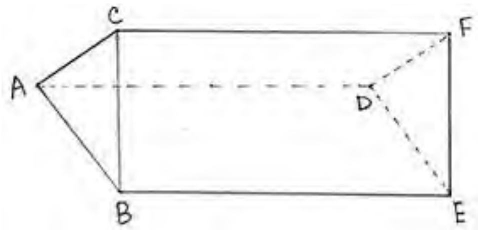
Cuboid

घन : लम्बाइ, चौडाइ र उचाइ बराबर भएको षड्मुखालाई घन भनिन्छ । जस्तै : लुडोको गोटी । चित्रमा ABCDEFGH एउटा घन हो । घनमा 6 ओटा वर्गाकार मोहडा, 8 ओटा कुनाहरू र 12 ओटा किनाराहरू हुन्छन् ।



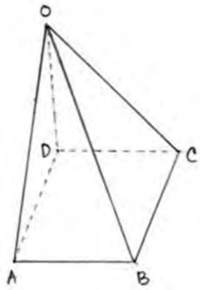
Cube

त्रिभुजकार प्रिज्म : दुई ओटा समानान्तर त्रिभुजाकार आकृतिहरू र तिन ओटा आयतकार आकृतिहरू मिलेर बनेको ठोस आकृतिलाई त्रिभुजकार प्रिज्म भनिन्छ । दिइएको चित्रमा ABCDEF एउटा त्रिभुजाकार प्रिज्म हो । यसमा 2 ओटा त्रिभुजकार मोहडा र 3 ओटा आयतकार मोहडाहरू हुन्छन् । 6 ओटा कुना र 9 ओटा किनाराहरू हुन्छन् ।

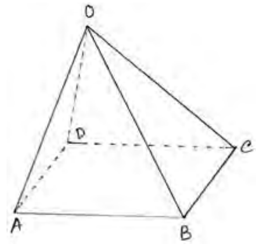


नोट : षड्मुखालाई आयतकार प्रिज्म पनि भनिन्छ र घनलाई वर्गाकार प्रिज्म पनि भनिन्छ ।

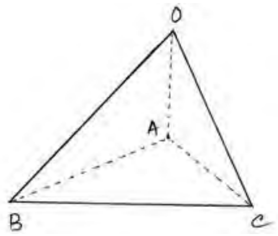
पिरामिड (Pyramid)



कुनै एउटा बहुभुज आधार भएको र अन्य सतहहरू त्रिभुजकार भएको ज्यामितीय ठोस आकृतिलाई पिरामिड भनिन्छ ।



वर्गाकार पिरामिड : आधार वर्ग र अन्य त्रिभुजकार सतहहरूको साझा शीर्षबिन्दु भएको पिरामिडलाई वर्गाकार पिरामिड भनिन्छ । चित्रमा OABCD एउटा वर्गाकार पिरामिड दिइएको छ । यसमा 1 ओटा वर्गाकार र 4 ओटा त्रिभुजकार मोहडा हुन्छ । 8 ओटा किनाराहरू र 5 ओटा शीर्षबिन्दु हुन्छन् ।



आयतकार पिरामिड : आधार आयत र अन्य त्रिभुजकार सतहहरूको साझा शीर्षबिन्दु भएको पिरामिडलाई आयतकार पिरामिड भनिन्छ । चित्रमा OABCD आयतकार पिरामिड हो । जसमा 5 ओटा शीर्षबिन्दु, 8 ओटा किनारा र 5 ओटा मोहडाहरू छन् ।

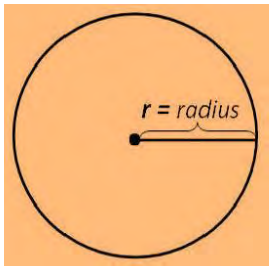
त्रिभुजकार पिरामिड (टेट्राहेड्रन) : आधार त्रिभुज र अन्य त्रिभुजकार सतहहरूको साझा शीर्षबिन्दु भएको पिरामिडलाई त्रिभुजकार पिरामिड भनिन्छ । चित्रमा OABC त्रिभुजकार पिरामिडमा चार ओटा शीर्षबिन्दुहरू, चारओटा मोहडा र 6 ओटा किनाराहरू छन् ।

वृत्त

एउटा स्थिर बिन्दुदेखि बराबर दुरीमा रहेका बिन्दुहरूको बिन्दुपथलाई वृत्त भनिन्छ । स्थिर बिन्दुलाई केन्द्रबिन्दु र स्थिर (बराबर) दुरीलाई अर्धव्यास भनिन्छ । पूर्ण चन्द्रमाको आकृति वृत्तको एउटा उदाहरण हो ।

वृत्तको भित्री र बाहिरी बिन्दुहरू

कुनै बिन्दुको दुरी केन्द्रबिन्दुबाट निकाल्दा अर्धव्यासभन्दा सानो भए बिन्दु वृत्तकोभित्र, अर्धव्यास भन्दा ठुलो भए बिन्दु वृत्तको बाहिर र अर्धव्याससँग बराबर भए बिन्दु वृत्तको परिधिमा पर्दछ । केन्द्रबिन्दु वृत्तकोभित्र पर्दछ ।



चित्रमा A, B र M वृत्तभित्र पर्ने बिन्दुहरू हुन् । त्यस्तै D, P र X वृत्तको बाहिर र R, Q, N परिधिमा पर्ने बिन्दुहरू हुन् ।

वृत्तको केन्द्रबिन्दु : कम्पासको प्रयोग गरेर वृत्त बनाउँदा कम्पासको टुप्पो पर्ने बिन्दुलाई वृत्तको केन्द्रबिन्दु भनिन्छ ।

वृत्तको परिधि : वृत्तको वरिपरीको घेराको लम्बाइलाई वृत्तको परिधि भनिन्छ ।

वृत्तको अर्धव्यास : वृत्तको केन्द्रबिन्दु र परिधिको कुनै बिन्दु जोड्दा बन्ने रेखाखण्डलाइ वृत्तको अर्धव्यास भनिन्छ ।

वृत्तको जीवा : वृत्तको कुनै दुई ओटा बिन्दुहरू जोडेर बन्ने रेखाखण्ड वृत्तको जीवा हो । जीवाको

छेउका बिन्दुहरू परिधिमा पर्दछन् ।

वृत्तको व्यास : वृत्तको केन्द्रबिन्दु भएर जाने जीवा नै वृत्तको व्यास हो । जसलाई सबैभन्दा लामो जीवा पनि भनिन्छ । वृत्तको व्यास अर्धव्यासको दुई गुणा हुन्छ ।

वृत्तको चाप : वृत्तको एउटा भागलाई वृत्तको चाप भनिन्छ ।

अर्धवृत्त : एउटा व्यासले वृत्तलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ । ती आधा भागहरूलाई अर्धवृत्त भनिन्छ ।

वृत्तको क्षेत्रक : दुई ओटा अर्धव्यास र चापले घेरेको क्षेत्रलाई वृत्तको क्षेत्रक भनिन्छ ।

त्रिभुज

एउटै सतहमा रहेका तिन ओटा अरेखीय बिन्दुहरूलाई रेखाखण्डले जोडेर बनेको बन्द आकृतिलाई त्रिभुज भनिन्छ । यदि L, M, N अरेखीय बिन्दुहरू भए रेखाखण्ड LM, LN र MN ले त्रिभुज ΔLMN बनाउँदछ । रेखाखण्डहरू LM, LN र MN लाई त्रिभुजको भुजाहरू र L, M, N हरूलाई त्रिभुजको शीर्षबिन्दुहरू भनिन्छ । $\angle LMN$, $\angle MNL$ र $\angle NLM$ हरूलाई त्रिभुजका कोणहरू भनिन्छ । ΔLMN मा LM लाई त्रिभुजको आधार र आधारको सम्मुखमा रहेको कोणलाई शीर्ष कोण भनिन्छ र $\angle L$ र $\angle M$ लाई आधारको कोणहरू भनिन्छ । तिन ओटै रेखाखण्डको योगफललाई त्रिभुजको परिधि भनिन्छ ।

त्रिभुजको वर्गीकरण

त्रिभुजको तिन ओटा भुजा र तिन ओटा कोणहरूको आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण गरिन्छ ।

भुजाको आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण निम्नानुसार गर्न सकिन्छ ।

क) **विषमवाहु त्रिभुज :** त्रिभुजको तिनै ओटा भुजाहरू एकआपसमा बराबर नभएको त्रिभुज विषयवाहु त्रिभुज हो ।

ख) **समद्विबाहु त्रिभुज :** त्रिभुजको तिन ओटा भुजाहरू मध्ये कुनै दुई ओटा भुजा बराबर भएको त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

ग) **समबाहु त्रिभुज :** तिन ओटै भुजाहरू बराबर भएको त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हो ।

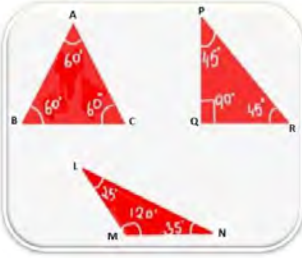
कोणको आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण निम्नानुसार गर्न सकिन्छ ।

क) **न्यूनकोण त्रिभुज :** तिनै ओटा कोणहरू न्यूनकोण भएको त्रिभुजलाई न्यूनकोण त्रिभुज भनिन्छ ।

ख) **समकोणी त्रिभुज :** एउटा कोणको मान $90°$ भएको त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो । समकोण त्रिभुजमा $90°$ को सम्मुखमा पर्ने भुजालाई कर्ण र बाँकी दुई भुजाहरूलाई लम्ब र आधार भनिन्छ ।

ग) **अधिककोणी त्रिभुज :** त्रिभुजको कुनै एउटा कोण अधिक कोण भएको त्रिभुजलाई अधिककोणी त्रिभुज भनिन्छ ।

त्रिभुजका गुणहरू



१. त्रिभुजको तिन ओटा भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

चित्रमा ΔABC मा $\angle ABC$, $\angle BCA$ र $\angle BAC$ तिन ओटा कोणहरू हुन् ।

जुक्ति : BC रेखाखण्डसँग समानान्तर हुने गरी A बिन्दुबाट पास गरी एउटा रेखा खिचौँ । मानौँ X र Y कुनै दुई बिन्दुहरू त्यो रेखामा पर्दछ ।

अब, $\angle ABC = \angle BAX$ (एकान्तर कोण) ----------- (i)

$\angle ACB = \angle CAY$ (एकान्तर कोण) ----------- (ii)

हामीलाई थाहा छ,

$\angle BAX + \angle BAC + \angle CAY = 180°$

सम्बन्ध (i) र (ii) प्रयोग गर्दा

$\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$ प्रमाणित भयो ।

उदाहरण :

एउटा समकोण त्रिभुजमा एउटा कोण 50° भए, तेस्रो कोणको मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ, एउटा कोणको मान 50° छ ।

अर्को कोणको मान 90° छ । (समकोण त्रिभुज)

मानौं तेस्रो कोणको मान x छ,

अब, $50° + 90° + x + 180°$

$x = 180° - 140°$

$x = 40°$

$\therefore$ तेस्रो कोण $= 40°$ हुन्छ ।

२. कुनै त्रिभुजमा कुनै दुई ओटा भुजाहरूको योगफल तेस्रो भुजा भन्दा धेरै हुन्छ ।

उदाहरण : के 5 cm, 6 cm र 4 cm भुजा भएको त्रिभुज बनाउन सकिन्छ ।

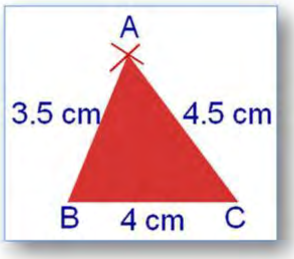
यहाँ,

$5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} > 4 \text{ cm}$

$6 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 5 \text{ cm}$

$5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} > 6 \text{ cm}$

त्यसकारण यी भुजाहरूको भएको त्रिभुज सम्भव छ ।



त्रिभुजको रचना

I. तिन ओटा भुजाको नाप दिइएको त्रिभुजको रचना

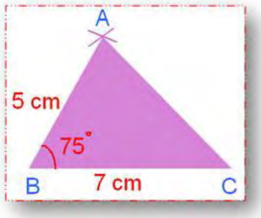
क) BC = 4 cm, AB = 3.5 cm, AC = 4.5 cm भुजाहरू भएको ΔABC रचना गर्नुहोस् ।

समाधान :

1. BC = 4 cm को रेखाखण्ड खिचौँ ।
2. बिन्दु B लाई केन्द्रबिन्दु र अर्धव्यास 3.5 cm मानेर एउटा चाप खिचौँ ।
3. बिन्दु C लाई केन्द्रबिन्दु र अर्धव्यास 4.5 cm मनेर नयाँ चाप पहिलेको चापसँग काटी त्यो बिन्दुलाई A मानौँ ।
4. अब BA र CA जोडौँ । ΔABC तयार भयो ।

II. दुई ओटा भुजाको नाप र तिनीहरूको बिचको कोण दिइएको त्रिभुजको रचना ।

(क) $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $\angle B = 75°$ भएको त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।



समाधान :

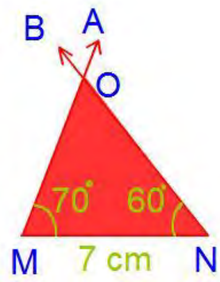
1. BC = 7 cm को रेखाखण्ड खिचौँ ।
2. बिन्दु B मा 75° को कोण खिचौँ ।
3. कम्पासको सहयोगले BA = 5 cm हुने गरी काटौ ।
4. अब AC जोडौं ।

ΔABC तयार भयो ।

III. कुनै एउटा भुजाको नाप र त्यसमा बनेको दुई ओटा कोण दिइएको त्रिभुजको रचना

(क) उदाहरण : $\angle M = 70°$, $\angle N = 60°$ र भुजा $MN = 7$ cm भएको त्रिभुज MNO रचना गर्नुहोस् ।

समाधान :



1. MN = 7 cm को एउटा रेखाखण्ड खिचौँ
2. $\angle AMN = 50°$ खिचौँ
3. $\angle BNM = 60°$ खिचौँ
4. AM र BN काटिदा बन्ने बिन्दु O मानौ
5. MO र NO जोडौँ

ΔMNO तयार भयो ।

IV. कर्ण र एउटा भुजाको नापको आधारमा समकोण त्रिभुजको रचना

उदाहरण : कर्ण $AB = 7$ cm र $BC = 5$ cm भएको समकोण त्रिभुजको रचना गर्नुहोस् ।

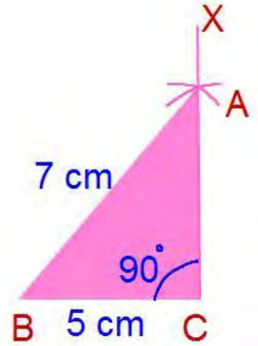
समाधान

(क) BC = 5 cm को एउटा रेखाखण्ड खिचौँ ।

(ख) $\angle BCX = 90°$ खिचौँ ।

(ग) B लाई वृत्तको केन्द्रबिन्दु र अर्धव्यास 7 cm लिएर CX मा BA = 7 cm चाप खिचौँ ।

(घ) अब AB लाई जोडौं । यसरी ΔABC तयार भयो ।



६. निर्देशाङ्क ज्यामिति (Co-ordinate Geometry)

परिचय (Introduction)

Rane Descartes ले सत्रौं शताब्दीमा Euclidean ज्यामिति र बीज गणितको व्यवस्थित सम्बन्धको रूपमा क्रान्तिकारी गणितको रूपमा Cartesian Co-ordinate को विकास गरेका थिए । निर्देशाङ्क ज्यामितिमा बीज गणितको धारणाले ज्यामितिमा आधारभूत गुणहरू पत्ता लगाउन र केही सिद्धान्तहरू स्थापित गर्न सकिन्छ । त्यसकारण यसलाई Analytical ज्यामिति पनि भनिन्छ । उनको योगदानले गर्दा Cartesian Co-ordinate को प्रयोग गरेर बीज गणितीय सम्बन्धलाई ज्यामितीय रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्ने परिपाटीको विकास भएको हो । जस्तै : Cartesian समीकरण $x^2 + y^2 = 4$ ले केन्द्रबिन्दु (0, 0) र अर्धव्यास 2 भएको वृत्तलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ।

Cartesian Co-ordinate को विकासले Linear algebra, complex analysis, differential geometry, group theory र अन्य गणितका शाखाहरूको ज्यामितीय प्रस्तुतिमा सहयोग गऱ्यो । फलनको लेखाचित्रलाई यसको प्रसिद्ध उदाहरणको रूपमा लिन सकिन्छ ।

सन् 1637 मा Rane Descarles ले पहिलो पटक आफ्नो धारणाको प्रस्तुत गर्दा एउटा मात्र अक्षको प्रयोग थिए तर उनको यो धारणा पछि अनुवादन हुँदाको समयदेखि दुई ओटा अक्षको प्रयोग सुरु भयो । Cartesian Co-ordinate को विकासले Calculus को विकासमा सहयोग गऱ्यो । समयसँगै Polar Co-ordinate, Spherical र Cylindrical Co-ordinate को विकास भयो ।

Co-ordinate ज्यामितिका दुई ओटा प्रकारका छन् ।

(क) दुई आयामिक (Two dimensional) वा plane co-ordinate ज्यामिति

(ख) तिन आयामिक वा ठोस co-ordinate ज्यामिति

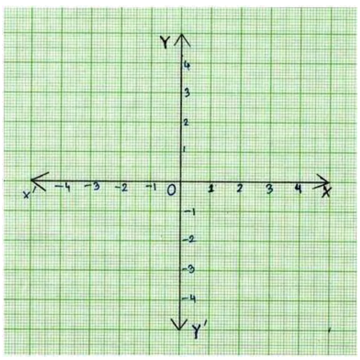
दुई आयामिक co-ordinate ज्यामितिमा सतहमा ज्यामितिलाई विकास गरिएको हुन्छ । तिन आयामिक Co-ordinate ज्यामितिमा ठोस वस्तुलाई space मा परिभाषित गरिन्छ । दुई आयामिक Co-ordinate ज्यामितिमा एउटा बिन्दुलाई Uniquely दुई वास्तविक अङ्कहरू प्रयोग गरी गरिन्छ भने तिन आयामिक Co-ordinate ज्यामितिमा एउटा बिन्दुलाई तिन वास्तविक अङ्कहरू प्रयोग गरी गरिन्छ ।

लेखाचित्र

ग्राफिङमा लेखाचित्र x-अक्ष र y-अक्ष एकआपसमा केन्द्रबाट पास गरेको एउटा ग्रिड हो । जसमा x र y अक्ष काटिएको बिन्दुलाई डटद्वारा चिन्हित गरिन्छ ।

Co-ordinate axes

ग्राफ पेपरमा एकआपसमा लम्ब भएका X'OX र Y'OY जुन O बिन्दुमा काटिएका छन् । ती लम्ब सिधा रेखाहरूलाई Co-ordinate axes भनिन्छ । यसमा X'OX रेखालाई X अक्ष र Y'OY रेखालाई Y अक्ष भनिन्छ । बिन्दु O लाई उद्गम बिन्दु भनिन्छ । ग्राफ पेपरको सतह जसले दुबै अक्षहरूलाई समावेश गर्दछ । त्यो सतहलाई Cartesian सतह भनिन्छ ।

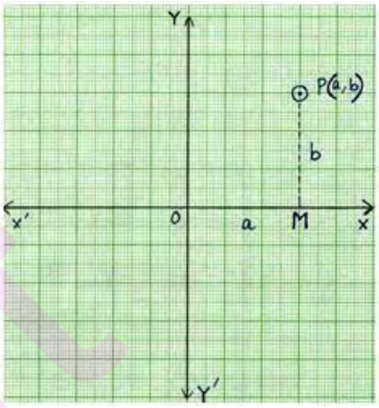


(क) Y अक्षको दायाँ छेउमा, X अक्षको वर्गको प्रत्येक अन्त्य बिन्दुले सकरात्मक पूर्णाङ्कलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ।

(ख) Y अक्षको बायाँ छेउमा X अक्षको वर्गको प्रत्येक अन्त्य बिन्दुले ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ।

(ग) X अक्षको माथि भागमा, Y अक्षको वर्गको प्रत्येक अन्त्य बिन्दुले सकारात्मक पूर्णाङ्कलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ।

(घ) X अक्षको तल भागमा, Y अक्षको वर्गको प्रत्येक अन्त्य बिन्दुले ऋणात्मक पूर्णाङ्कलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ ।



Order Pair of a Co-ordinate

हामीले लेखाचित्रमा सतहको एउटा बिन्दुलाई वास्तविक नम्बरको क्रमजोडाले प्रतिनिधित्व गर्दछौं । जसलाई बिन्दुको निर्देशाङ्क भनिन्छ । सतहमा एक बिन्दुको स्थिति निर्धारण गर्न पहिले दुई पारस्परिक लम्ब सिधा रेखाहरू x र y खिच्नुपर्दछ ।

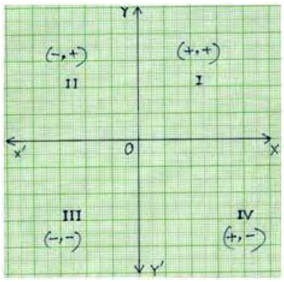
क्रमजोडा

जब हामी एउटा बिन्दुको निर्देशाङ्क लेख्दछौं, पहिला x निर्देशाङ्क त्यसपछि y निर्देशाङ्क लेख्दछौं । x र y निर्देशाङ्कलाई कमाले छुट्याई सानो कोस्टले बन्द गर्दछौं । a र b दुई ओटा अङ्कहरूलाई एक विशेष क्रममा सूचीबद्ध गर्दा (a, b) लाई क्रमजोडा भनिन्छ ।

तसर्थ क्रमजोडा (a, b) मा, पहिलो स्थानमा भएको a ले x निर्देशाङ्क र दोस्रो स्थानमा भएको b ले y निर्देशाङ्क बुझाउँदछ ।

एक क्रमजोडामा यदि क्रम परिवर्तन गरिन्छ भने यसले फरक बिन्दुलाई प्रतिनिधित्व गर्दछ । जस्तै (a, b) र (b, a) दुई फरक क्रमजोडाहरू । तसर्थ $(3, 5) \neq (5, 3)$ हुन्छ ।

Note : उद्गम बिन्दुको निर्देशाङ्कलाई क्रमजोडा (0, 0) ले जनाइन्छ । जसमा x निर्देशाङ्क 0 र y निर्देशाङ्क 0 छन् ।



चतुर्थांशहरू

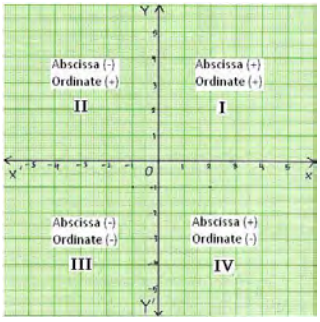
ग्राफ चित्रको सतहलाई Co-ordinate अक्षहरूले चार भागमा विभाजित गरेको हुन्छ । यी चार क्षेत्रहरूलाई चतुर्थांश भनिन्छ ।

क) XOY क्षेत्रलाई पहिलो चर्तुथांश भनिन्छ । जसमा x र y निर्देशाङ्क दुवै धनात्मक हुन्छन् ।

ख) X'OY क्षेत्रलाई दोस्रो चर्तुथांश भनिन्छ । जसमा x निर्देशाङ्क ऋणात्मक र y निर्देशाङ्क धनात्मक हुन्छ ।

ग) X'OY' क्षेत्रलाई तेस्रो चर्तुथांश भनिन्छ । जसमा x र y निर्देशाङ्क दुबै ऋणात्मक हुन्छ ।

घ) XOY' क्षेत्रलाई चौथो चर्तुथांश भनिन्छ । जसमा x निर्देशाङ्क धनात्मक र y निर्देशाङ्क ऋणात्मक हुन्छ ।



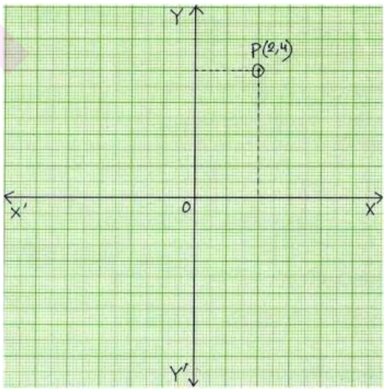
चर्तुथांशको क्षेत्रअनुसार एउटा बिन्दुको निर्देशाङ्कको चिह्नको रूप यसप्रकार हुन्छ ।

लेखाचित्रमा बिन्दुहरूको अङ्कन

सर्वप्रथम x अक्ष र y अक्षलाई ग्राफमा विस्तार गरिसकेपछि हामीले हाम्रो आवश्यकताअनुसार वर्गको एउटा भुजालाई एक एकाइको रूपमा लिन सक्छौँ । जसअनुसार हामी abscissa र ordinate को चिह्न र बिन्दुको स्थान फेला पार्न सक्छौँ ।

(2, 4) बिन्दुलाई रेखाचित्रमा अङ्कन गर्नको लागि पहिला x र y निर्देशाङ्क दुवै धनात्मक भएकोले यो पहिलो चर्तुथांश पर्दछ भन्ने बुझिसकेपछि उद्गम बिन्दुबाट x अक्षको दायाँमा 2 एकाइ गणना गर्नुपर्दछ । त्यो बिन्दुलाई A नाम दिऔं । त्यसरी नै उद्गम बिन्दुबाट y अक्षको माथि 4 एकाइ गणना गर्नुपर्दछ । त्यो बिन्दुलाई C नाम दिऔं । अब क्रमशः A र C बिन्दुमा BA⊥XOX' र CD⊥YOY खिचौं । यी दुवै लम्ब रेखाहरू AB र CD एकआपसमा काटिएको बिन्दु P को निर्देशाङ्क (2, 4) हुन्छ ।

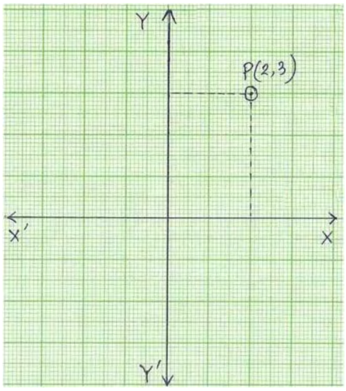
नोट :



(क) x अक्षमा हेको कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्क x, 0 को रूपमा हुन्छ । त्यसकारण x अक्षमा पर्ने हरेक बिन्दुको y निर्देशांक 0 हुन्छ । जस्तै : (2, 0), (7, 0), (-7, 0), (5, 0) बिन्दुहरू x अक्षमा पर्ने बिन्दुहरू हुन् ।

(ख) y अक्षमा रहेको कुनै बिन्दुको निर्देशाङ्क 0, y को रूपमा हुन्छ । त्यसकारण y अक्षमा पर्ने हरेक बिन्दुको x निर्देशाङ्क 0 हुन्छ । जस्तै : (0, 2), (0, 3), (0, -5), (0, -10) बिन्दुहरू y अक्षमा पर्ने बिन्दुहरू हुन् ।

बिन्दुको निर्देशाङ्क



Co-ordinate सतहको कुनै पनि बिन्दुको निर्देशाङ्क निकाल्नको लागि सर्वप्रथम X'OX र Y'OY क्रमशः x र y अक्ष र उद्गम बिन्दु खिच्नुपर्दछ । मानौँ p(a, b) बिन्दुको a र b को मान निकाल्नु पर्ने छ भने सर्वप्रथम त्यो बिन्दुबाट x र y अक्षमा लम्ब खिच्नुपर्छ । मानौँ P बाट x र y अक्षमा खिचिएको लम्बहरू PM र PN ले x र y अक्षमा M र N बिन्दुमा काट्दछ । बिन्दु M उद्गम बिन्दु O बाट 2 एकाइ र N बिन्दु उद्गम बिन्दु O बाट 3 एकाइ टाढा भएकाले P(a, b) = (2, 3) हुन्छ ।

उदाहरण : निम्न बिन्दुहरूलाई P(3, 0), Q(7, 9) र (-2, 0) लाई अङ्कन गर्नुहोस् । साथै

- PQRS को नाम लेख्नुहोस् ।

- PQRS को क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

उत्तर

(क) बिन्दुहरूलाई चित्रमा देखाइएको छ ।

(ख) PQRS समलम्ब चतुर्भुज हो । जसमा QR र PS एकआपसमा समानान्तर छन् । QR = 13 एकाइ र PS = 5 एकाइ छ । समलम्ब चतुर्भुजको उचाइ 9 इकाइ छ ।

(ग) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समानान्तर भुजाको योग) × उचाइ

$= \frac{1}{2}(13 + 5) \times 9$

= 81 वर्ग एकाइ ।

उदाहरण : तेस्रो चर्तुथांशमा बनेको आयतको शीर्षबिन्दुको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस्, जसमा आयतको लम्बाइ र चौडाइ x र y अक्षमा क्रमशः p र q एकाइ छन् ।

उत्तर : आयत OABC को शीर्षबिन्दुहरूको निर्देशाङ्कहरू यस प्रकार छन् । O(0, 0), A(-p, 0), B (-p, -q), C(o, -q) छन् ।

प्रतिबिम्ब x अक्ष र y अक्षलाई ऐना मानेर हामी बिन्दुहरूको प्रतिबिम्ब निकाल्न सक्छौँ । प्रतिबिम्बलाई दिइएको तालिकाबाट प्रष्ट्याउन सकिन्छ ।

क्र.सं.	बिन्दु	प्रतिबिम्ब	
		x अक्ष	y अक्ष
1.	(a, b)	(a, -b)	(-a, b)
2.	(-a, b)	(-a, -b)	(a, b)
3.	(-a, -b)	(-a, b)	(a, -b)
4.	(a, -b)	(a, b)	(-a, -b)

नोट :

(क) x अक्षलाई ऐना मान्दा y निर्देशाङ्कको चिह्न परिवर्तन हुन्छ । तर x निर्देशाङ्क स्थिर रहन्छ

(ख) y अक्षलाई ऐना मान्दा x निर्देशाङ्कको चिह्न परिवर्तन हुन्छ । तर y निर्देशाङ्क स्थिर रहन्छ

पाइथागोरस साध्य

कुनै पनि समकोण त्रिभुजमा लम्ब र आधारको वर्गहरूको योगफल कर्णको वर्गसँग बराबर हुन्छ । समकोण त्रिभुजमा लम्ब र आधारलाई क्रमशः p र b अति कर्णलाई h ले जनाइन्छ । तसर्थ h2 = p2 + b2 लेख्न सकिन्छ । समकोण त्रिभुजमा 90° को सम्मुख भुजालाई कर्ण र बाँकी भुजाहरूलाई आधार र लम्ब भनिन्छ । चित्रका 4 ओटा समकोण त्रिभुजहरू प्रयोग गरेर एउटा वर्गको निर्माण गरौँ ।

यहाँ, वर्गको क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(b + p)^2 = b^2 + p^2 + 2bp$

वर्गको क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ लम्ब + सानो वर्गको क्षेत्रफल

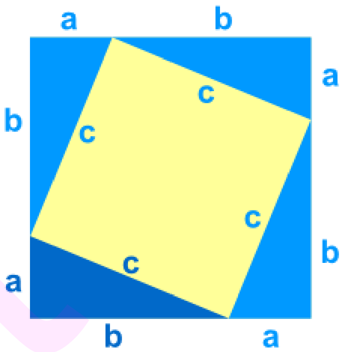
$$= 4 \times \frac{1}{2} \times p \times b + h^2$$

$$= 2pb + h^2$$

अब, $b^2 + p^2 + 2bp = 2bp + h^2$

i.e. $h^2 = p^2 + b^2$

प्रमाणित भयो ।



पाइथागोरस साध्यको विलोम

यसको प्रयोग गरेर त्रिभुज न्यूनकोणी, समकोणी वा अधिकोणी भनेर छुट्याउन सकिन्छ । यदि त्रिभुज ΔABC मा यसका भुजाहरू क्रमशः a, b र c छन् । जसमा मानौं c लामो भुजा हो ।

यदि $c^2 < a^2 + b^2$ भए ΔABC न्यूनकोणी त्रिभुज हुन्छ ।

यदि $c^2 > a^2 + b^2$ भए ΔABC अधिककोणी त्रिभुज हुन्छ ।

तर यदि $c^2 = a^2 + b^2$ भए ΔABC समकोणी त्रिभुज हुन्छ ।

उदाहरण : तल दिइएका त्रिभुजका भुजाहरूले कस्तो त्रिभुज निर्माण गर्दछ ?

(क) 3, 4, 5 ख) 3, 4, 6

उत्तर : (क) यहाँ $a = 3, b = 4$ र $c = 5$ छ

अब, $c^2 = 5^2 = 25$

अनि $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

यहाँ $c^2 = a^2 + b^2$ भएकोले यी भुजाहरूले समकोण त्रिभुज निर्माण गर्दछ ।

(ख) यहाँ $a = 3, b = 4$ र $c = 6$ छ

अब, $c^2 = 36$

अनि $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

यहाँ $c^2 > a^2 + b^2$ तसर्थ दिइएका भुजाहरूले अधिककोणी त्रिभुज निर्माण गर्दछ ।

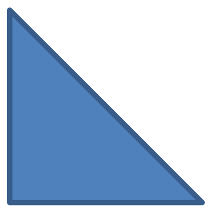
नोट : तिन ओटा भुजाहरू जसले समकोणी त्रिभुजको निर्माण गर्दछ, त्यस्ता भुजाहरूलाई पाइथोगोरियन ट्रिपल्स भनिन्छ ।

उदाहरण : भित्तादेखि भऱ्याङको फेदसम्मको दुरी 10 मिटर छ । यदि भऱ्याङको लम्बाइ भित्ताको उचाइभन्दा 2 मिटर अग्लो भए भऱ्याङको लम्बाइ निकाल ।

उत्तर : यहाँ, भऱ्याङको लम्बाइ $= h = x$ मानौं

भित्ताको उचाइ $= x - 2 = p$

र $b = 10$ m



समकोण त्रिभुज बन्ने भएकाले

$h^2 + p^2 + b^2$

$x^2 = (x - 2)^2 + 10^2$

$x^2 = x^2 - 4x + 4 + 100$

$4x = 104$

$x = 26$

$\therefore$ भऱ्याङको लम्बाइ = 26 m छ ।

उदाहरण : समकोण त्रिभुजमा कर्णको लम्बाइ लामो भुजाभन्दा 1 cm लामो र छोटो भुजा लामो भुजाभन्दा 7 cm कम छ भने कर्णको लम्बाइ निकाल ।

उत्तर : मानौ लामो भुजा = x cm

छोटो भुजा = x - 7 cm

h = कर्ण = x + 1 cm

अब, समकोण त्रिभुजमा

h2 = p2 + b2

(x + 1)2 = x2 + (x - 7)2

or, x2 + 2x + 1 = x2 + x2 - 14x + 49

or, x2 - 16x + 18 = 0

or, (x - 4) (x - 12) = 0

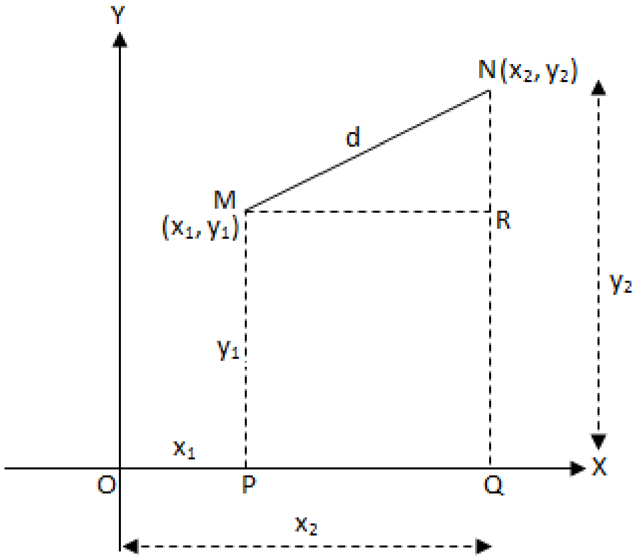
x = 4 or x = 12

x = 4 (सम्भव छैन)

तसर्थ कर्ण = 12 + 1 = 13 cm हुन्छ ।

दुई बिन्दुहरूको बिचको दुरी

Co-ordinate सतहमा रहेको दुई ओटा बिन्दुहरू P (x_1, y_1) र Q (x_2, y_2) बिचको दुरी $d = \sqrt{(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2}$ सूत्र प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ ।



रेखाचित्रमा P (x_1, y_1) र Q (x_2, y_2) लाई जोड्दा बन्ने रेखाखण्डको दुरी PQ लाई d मानौँ । समकोण त्रिभुज निर्माण गर्नको लागि PM⊥OX, QN⊥OX र PR⊥QN खिचौँ ।

PR = MN = ON - OM = $x_2 - x_1$ र

QR = QN - RN = QN - PM = $y_2 - y_1$ छन् ।

अब समकोण ΔPQR मा

$h^2 = p^2 + b^2$

$(PQ)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$PR = \sqrt{(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2}$

$d = \sqrt{(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2}$

नोट :

(क) दुई ओटा बिन्दुहरूबिचको दुरी सधैँ धनात्मक हुन्छ ।

(ख) बिन्दुहरू (x, y) र उद्गम बिन्दु (0, 0) बिचको दुरी $\sqrt{x2 + y2}$ प्रयोग गरी निकाल्न सकिन्छ ।

(ग) दुरी सूत्रलाई $d = \sqrt{(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2}$ को रूपमा पनि लेख्न सकिन्छ ।

उदाहरण : बिन्दु (y, 4) र उद्गम बिन्दु बिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।

उत्तर : d $= \sqrt{x2 + y2}$

$= \sqrt{72 + 42}$

$= \sqrt{65}$ इकाई ।

उदाहरण : बिन्दुहरू A (3, p) र B (4, 1) बिचको दुरी $\sqrt{10}$ छ भने p को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर : यहाँ A (3, p) र B (4, 1) दिइएको छ । AB = $\sqrt{10}$

$x_1 = 3, y_1 = p$

$x_2 = 4, y_2 = 1$

अब, $d = \sqrt{(x2 - x1)2 + (y2 - y1)2}$

$\sqrt{10} = \sqrt{(4 - 3)2 + (1 - p)2}$

$\sqrt{10} = \sqrt{1 + 1 - 2p + p2}$ (वर्ग निकाल्दा)

$10 = 2 - 2p + p^2$

$p^2 - 2p - 8 = 0$

$p^2 - 4p + 2p - 8 = 0$

$(p - 4)(p + 2) = 0$

त्यसकारण $p = 4$ अथवा $p = -2$ हुन्छ ।

उदाहरण : बिन्दु (2, -6) लाई अङ्कन गर्नुहोस् । या बिन्दुबाट x र y अक्षमा क्रमशः PM र PN लम्ब खिच्नुहोस् । M र N को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

उत्तर : M र N बिन्दुहरूको निर्देशाङ्क क्रमशः (2, 0) र (0, -6) हुन्छ ।

उदाहरण : आयतको तिन ओटा शीर्षबिन्दुहरू क्रमशः (3, 2), (-4, 2) र (-4, -5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् र चौथो बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर : D को निर्देशाङ्क (3, 5) हुन्छ ।

उदाहरण : दिइएको चित्रमा ΔAOB मा A (4, 0) O (0, 0) जसमा AB = 5 एकाइ छ भने B को निर्देशाङ्क पत्ता लगाऊ ।

उत्तर : बिन्दु B, y अक्षमा भएकोले मानौ B को निर्देशाङ्क (0, y) छ । त्यसैले OB = y, OA = 4, AB = 5 बिन्दु O मा x अक्ष र y अक्ष एकआपसमा लम्ब हुन्छ । तसर्थ $\angle AOB = 90°$ । त्यसैले ΔAOB एक समकोण त्रिभुज हो ।

अब, $h^2 = p^2 + b^2$

or, $5^2 = 4^2 + y^2$

or, $y = \pm 3$

तसर्थ B बिन्दुको निर्देशाङ्क (3, 0) हुन्छ किनभने चित्रमा B बिन्दु y अक्षको घनात्मक क्षेत्रमा छ ।

बराबर दुरीमा रहने बिन्दुको परिचय

मानौं बिन्दु P (x, y) बिन्दुहरू A (x_1, y_1) र B (x_2, y_2) बाट समान दुरीमा छन् । तसर्थ हामी PA = PB लेख्न सक्छौं । जसमा PA र PB ले क्रमशः बिन्दु P देखि A र B सम्मको दुरीलाई बुझाउँदछ । यसरी दुई स्थिर बिन्दुहरूबाट समान दुरीमा पर्ने बिन्दुहरूको बिन्दुपथलाई रेखाखण्ड AB को लम्बार्धक भनिन्छ ।

उदाहरण : बिन्दुहरू (7, 6) र (-3, 4) बाट बराबर दुरीमा पर्ने x-axis मा रहने बिन्दुको निर्देशाङ्क निकाल्नुहोस् ।

समाधान : मानौं x अक्षमा बिन्दु A (7, 6) र B (-3, 4) देखि समान दुरीमा रहने बिन्दुको निर्देशाङ्क P (x, 0) छ ।

त्यसकारण AP = BP

or, $AP^2 = BP^2$

or, $(x - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (x + 3)^2 + (0 - 4)^2$

or, $x^2 - 14x + 49 + 36 = x^2 + 6x + 9 + 16$

or, $-20x = -60$

$x = 3$

त्यसकारण आवश्यक बिन्दु (3, 0) हो ।

तिन ओटा बिन्दुहरू रेखीय बिन्दु हुँदाको स्थिति

तिन ओटा बिन्दुहरू A, B र C एउटै रेखामा पर्दछन् भने ती बिन्दुहरूलाई रेखीय बिन्दुहरू भनिन्छ । तिन ओटा बिन्दुहरू A, B र C रेखीय बिन्दु हुँदा दुई ओटा रेखाखण्डको योग तेस्रो रेखाखण्डसँग बराबर हुन्छ । i.e. AB + BC = AC वा AC + AB = BC वा AC + BC = AB भएमा A, B र C रेखीय बिन्दुहरू भनिन्छ ।

उदाहरण : दुरी सूत्र प्रयोग गरी यी बिन्दुहरू A (1, -1), B (5, 2) र C (9, 5) रेखीय बिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ,

AB = 5 एकाइ

BC = 5 एकाइ

AC = 10 एकाइ

यहाँ, AB + BC = 5 + 5 = 10

र AC = 10

त्यसकारण AB + BC = AC

त्यसकारण A, B र C रेखीय बिन्दुहरू हुन् र B बिन्दु A र C को बिचमा पर्दछ ।

उदाहरण : यदि P (x, y) बिन्दुहरू (7, 1) र (3, 5) देखि समान दुरीमा पर्दछन् भने x र y को सम्बन्ध प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान : मानौँ P(x, y) बिन्दुहरू A(7, 1) र B(3, 5) बाट समान दुरीमा छन् । तसर्थ

AP = BP

$AP^2 = BP^2$

or, $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = (x - 3)^2 + (y - 5)^2$

or, $x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$

or, $x - y = 2$

जुन आवश्यक सम्बन्ध हो ।

उदाहरण : बिन्दु (3, 2) लाई x अक्षले बनाउने प्रतिबिम्ब A' छ । अब AA' बिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, A(3, 2) को x अक्षले बनाउने प्रतिबिम्ब A'(3, -2) हुन्छ ।

अब, $AA' = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16} = 4$ एकाइ

विभिन्न ज्यामितीय चित्रका दुरी सम्बन्धी गुणहरू

(क) यदि ΔABC मा $AB = AC$ or $AC = BC$ or $AB = BC$ भए ΔABC समद्विबाहु हुन्छ ।

(ख) यदि ΔABC मा दुरीहरू $AB = BC = AC$ भए ΔABC समबाहु हुन्छ ।

(ग) यदि ΔABC मा $AB^2 = BC^2 + AC^2$ or $BC^2 = AC^2 + AB^2$ वा $AC^2 = AB^2 + AC^2$ भए ΔABC समकोण त्रिभुज हुन्छ ।

(घ) यदि वृत्तको केन्द्रदेखि वृत्तको कुनै बिन्दुबिचको दुरी अर्धव्याससँग बराबर भए वृत्त हुन्छ ।

(ङ) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = CD$ र $BC = AD$ भए चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

(च) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = CD$ र $BC = AC$ र $AC = BD$ भए ABCD आयत हुन्छ ।

(छ) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = CD$, $BC = AD$ तर $AC \neq BD$ भए चतुर्भुज ABCD समानान्तर चतुर्भुज हुन्छ ।

(ज) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = BC = CD = AD$ भए चतुर्भुज ABCD लाई समबाहु चतुर्भुज भनिन्छ ।

(झ) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = BC = CD = AD$ र $AC = BD$ भए चतुर्भुज ABCD वर्ग हुन्छ ।

(ञ) यदि चतुर्भुज ABCD मा $AB = BC = CD = AD$ र $AC \neq BD$ भए चतुर्भुज ABCD लाई समबाहु चर्तुभुज भनिन्छ ।

उदाहरण : बिन्दुहरू A(8, 3), B(0, 9) र C(14, 11) समद्विबाहु समकोण त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $AB = 10$

$BC = 10\sqrt{2}$

$AC = 10$

अब, $AB^2 + AC^2 = 100 + 100 = 200$ र $BC^2 = 200$

त्यसकारण $AB^2 + AC^2 = BC^2$

त्यसकारण ΔABC समकोणी त्रिभुज हो ।

फेरि $AB = AC$ भएकाले ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज पनि हो ।

तसर्थ ABC समद्विबाहु समकोण त्रिभुज हो ।

उदाहरण : A(0, 5), B(-2, -2), C(5, 0) र D(7, 7) बिन्दुहरू समबाहु चतुर्भुजका शीर्षबिन्दु हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ

$AB = \sqrt{53}$

$BC = \sqrt{53}$, $CD = \sqrt{53}$, $DA = \sqrt{53}$, $AC = \sqrt{50}$, $BD = \sqrt{162}$

यहाँ, $AB = BC = CD = DA$ र $AC \neq BD$ भएकोले ABCD समबाहु चतुर्भुज हो ।

उदाहरण : यदि बिन्दुहरू A(4, 3) र B(x, 5) वृत्तको दुई ओटा बिन्दुहरू र O(2, 3) केन्द्रबिन्दु भए

x को मान निकाल ।

समाधान : OA र OB दुवै एउटै वृत्तका अर्धव्यास हुन् ।

तसर्थ, $OQ = OB$

0r, $OA^2 = OB^2$

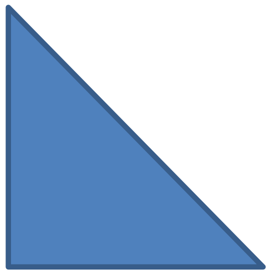
or, $(4 - 2)^2 + (3 - 3)^2 = (x - 2)^2 + (5 - 3)^2$

or, $4 = x^2 - 4x + 8$

or, $x^2 - 4x + 4 =$

or, $(x - 2)^2 = 0$

$x = 2$



उदाहरण : दिइएको चित्रमा ΔOAB को क्षेत्रफल 160 वर्ग एकाइ भए बिन्दु A को निर्देशाङ्क र AB को लम्बाइ निकाल्नुहोस् ।

समाधान : यहाँ, क्षेत्रफल $(\Delta AOB) = \frac{1}{2} \times OA \times OB$ (समकोण त्रिभुज)

or, $160 = \frac{1}{2} \times OA \times 16$

or, $OA = 20$

त्यसकारण A को निर्देशाङ्क (0, 20) हुन्छ ।

अब, $AB = \sqrt{(16 - 0)^2 + (0 - 20)^2}$

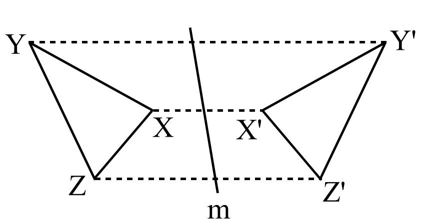
$= \sqrt{256 + 400}$

$= \sqrt{656}$ एकाइ

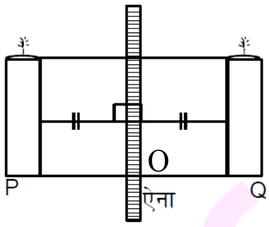
७. स्थानान्तरण (Transformation)

परिचय

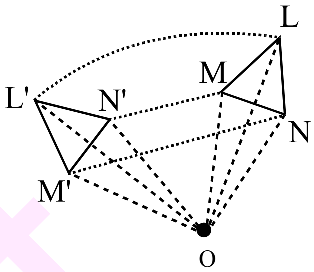
स्थानान्तरण वा ज्यामितीय स्थानान्तरणले एउटा समतल सतहमा रहेका ज्यामितीय आकृतिहरूलाई रेखा अगाडि उत्तिकै दुरीमा उल्टो तर बराबर आकृतिको अर्को आकृति प्राप्त गर्ने, ज्यामितीय आकृतिहरूलाई कुनै एउटा बिन्दुबाट निश्चित कोणमा घडीको सुइको उल्टो वा सुल्टो दिसामा घुमाउँदा बराबर आकृतिको चित्र बन्ने, वस्तु वा चित्रलाई निश्चित दिएको दुरीमा सार्ने, वस्तुहरूको आकार घटाउने वा बढाउने गर्छ । यस पाठमा यस्ता विभिन्न क्रियाकलापको माध्यमबाट स्थानान्तरणको परिचय दिइन्छ । स्थानान्तरणलाई बुझ्नको लागि चित्रहरू हेरौं ।



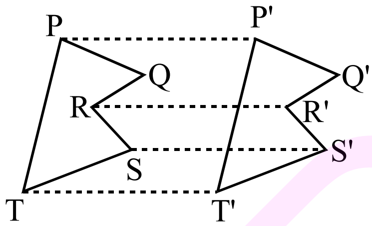
चित्र नं. 1



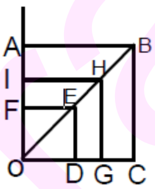
चित्र नं. 2



चित्र नं. 3



चित्र नं. 4



चित्र नं. 5

- चित्र नं. 1 मा त्रिभुज XYZ लाई ऐना m अगाडि राख्दा त्यसको प्रतिबिम्व त्रिभुज X'Y'Z' ऐनाको अर्कोपट्टि उल्टो देखिएको छ ।
- चित्र नं. 2 मा मैनबत्तीलाई ऐना अगाडि राख्दाको अवस्था P र ऐना पछाडिको अवस्था Q हो मैनवत्ती P र Q ऐनाबाट बरावर दुरीमा छन्, जहाँ OP = OQ छ ।
- चित्र नं. 3 मा त्रिभुज LMN लाई O बाट घुमाउँदा त्रिभज L'M'N' बनेको छ ।
- चित्र नं. 4 मा पञ्चभुज PQRST लाई दायाँतर्फ राखिएको छ ।
- चित्र नं. 5 मा वर्गहरू ODEF, OGHI र OABC को साझा शीर्षबिन्दु O छ । वर्ग OGHI, वर्ग ODEF को ठुलो र वर्ग OABC को सानो वर्ग हो ।

कुनै निश्चित नियममा रही कुनै वस्तुको स्थिति (Position), आकार (Size) मा परिवर्तन हुनुलाई उक्त वस्तुको स्थानान्तरण भनिन्छ ।

स्थानान्तरण (Transformation) चार प्रकारमा बाँडेर अध्ययन गरिन्छ । ती हुन् ।

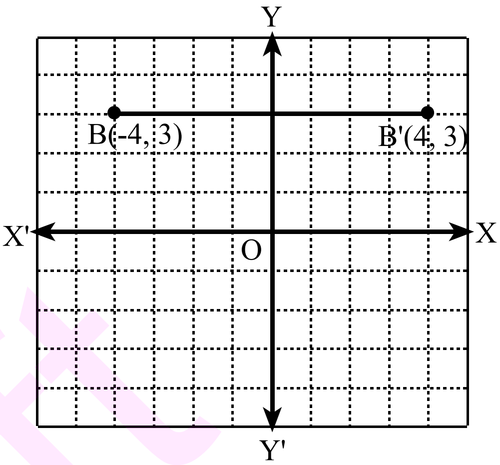
or, $x = 3, y = 6$

अब X–अक्षमा परावर्तन गर्दा,

$$P(3, 6) \xrightarrow[x\text{-अक्ष}]{\text{परावर्तन}} P'(3, -6) \text{ हुन्छ ।}$$

$\therefore$ (3, 6) को प्रतिबिम्व (3, –6) हो ।

(ख) Y–अक्षरबाट परावर्तन



सँगैको चित्रमा बिन्दु B लाई YOY' बाट परावर्तन गर्दा, यसको प्रतिबिम्व YOY' रेखाबाट बिन्दु B र B' सम्मको दुरी बरावर हुन्छ । साथै रेखा BB', Y-अक्षमा लम्ब हुन्छ ।

अब, B र B' को निर्देशाङ्क गनेर हेर्दा क्रमशः (–4, 3) र (4, 3) हुन्छ । तसर्थ (–4, 3) लाई Y–अक्षमा परावर्तन गर्दा (4, 3) हुन्छ ।

यदि कुनै बिन्दु P(x,y) लाई Y–अक्षमा परावर्तन गर्दा, P(x, y) को परावर्तन P'(–x, y) हुन्छ ।

$$P(x, y) \xrightarrow[y\text{-अक्ष}]{\text{परावर्तन}} P'(-x, y) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण : बिन्दु (6,7) लाई Y–अक्षमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्व लेख्नुहोस् ।

समाधान (Solution)

यहाँ P(x, y) = P(6, 7)

or, $x = 6$, र $y = 7$

अब Y– अक्षमा परावर्तन गर्दा,

$$P(6, 7) \xrightarrow[y\text{-अक्ष}]{\text{परावर्तन}} P'(-6, 7) \text{ हुन्छ ।}$$

$\therefore$ (6,7) को प्रतिबिम्व (–6, 7) हो ।

उदाहरण : P(3, 4), Q (5, 2) र R(2, 3) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त त्रिभुजलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी X- अक्षमा परावर्तन गरी र प्रतिबिम्व त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू लेख्नुहोस् ।

समाधान (Solution)

यहाँ, P(3, 4)

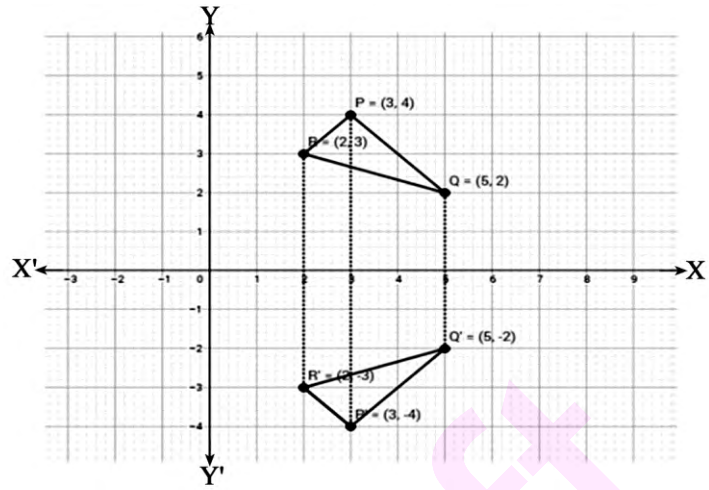
$$P(3, 4) \xrightarrow[x\text{-अक्ष}]{\text{परावर्तन}} P'(3, -4) \text{ हुन्छ ।}$$

$$Q(5, 2) \xrightarrow[x\text{-अक्ष}]{\text{परावर्तन}} Q'(5, -2) \text{ हुन्छ ।}$$

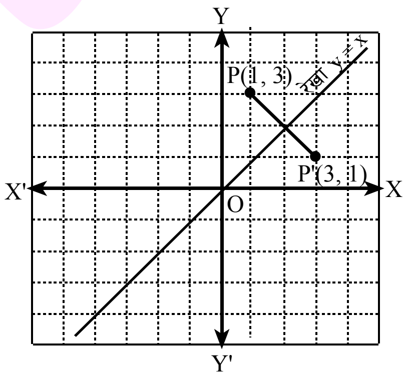
R(2, 3) $\xrightarrow[\text{x-अक्ष}]{\text{परावर्तन}}$ R'(2, –3) हुन्छ ।

$\therefore$ P, Q र R का प्रतिबिम्वहरू क्रमशः P'(3, –4), Q'(5, –2) र R'(2, –3) हुन् ।

अब त्रिभुज PQR र P'Q'R' लाई लेखाचित्रमा यसरी देखाउन सकिन्छ ।



(ग) रेखा y = x मा परावर्तन (Reflection in the Line y = x)



सँगैको ग्राफमा बिन्दु P(1, 3) बाट रेखा y = x मा PM लम्ब खिचौँ । त्यसपछि लम्ब PM लाई अर्कोपटि बढाऔँ र PM = MP' हुने गरी उक्त लम्बमा बिन्दु P' लिऔँ । अब, बिन्दु P' को निर्देशाङ्क गनेर हेर्दा (3, 1) हुन्छ । तसर्थ बिन्दु (1, 3) लाई रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा (3, 1) हुन्छ ।

अतः यदि कुनै बिन्दु P(x, y) लाई रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा,

P (x, y) $\xrightarrow[\text{रेखा}\ y=x]{\text{परावर्तन}}$ P'(y, x) हुन्छ ।

उदाहरणः बिन्दु (7, –3) लाई रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्व लेख्नुहोस् ।

समाधान (Solution)

यहाँ, P(x, y) = P(7, –3)

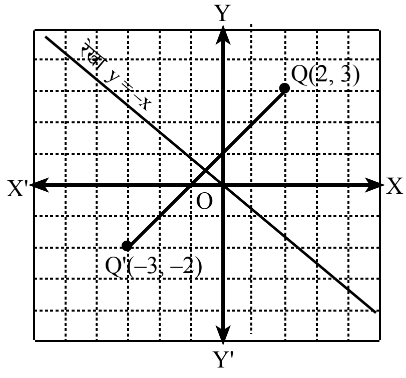
जहाँ, x = 7 र y = –3 छ ।

अब, रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा,

P(7, 3) $\xrightarrow[\text{रेखा}\ y=x]{\text{परावर्तन}}$ P'(–3, 7) हुन्छ ।

$\therefore$ (7, –3) को प्रतिबिम्व (–3, 7) हो ।

(घ) रेखा y = –x मा परावर्तन (Reflection in the Line y = –x)



सँगैको ग्राफमा बिन्दु Q(2, 3) बाट रेखा y = –x मा परार्वतन देखाइएको छ । बिन्दु Q(2, 3) बाट रेखा y = –x मा QN लम्ब

खिची बढाऔं । उक्त लम्ब रेखामा QN = Q'N हुने गरी बिन्दु Q' लिऔं । अब बिन्दु Q' को निर्देशाङ्क गन्दा (–3, –2) हुन्छ । तसर्थ, बिन्दु (2, 3) लाई रेखा y = –x मा परावर्तन गर्दा बिन्दु (–3, –2) मा परावर्तन हुन्छ ।

अत: यदि कुनै बिन्दु P(x, y) लाई रेखा y = –x मा परावर्तन गर्दा,

$$P\,(x, y) \xrightarrow[\text{रेखा } y=x]{\text{परावर्तन}} P'(-y, -x) \text{ हुन्छ ।}$$

उदाहरण : मानौं A(2, 2), B(4, 4) र C(–1, 5) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त त्रिभुजलाई रेखा चित्रमा प्रस्तुत गरी रेखा y = – x मा परावर्तन गर्नुहोस् ।

समाधान (Solution):

यहाँ, त्रिभुज ABC का शीर्षबिन्दुहरू A(2, 2), B(4, 4) र C(–1, 5) छन् ।

ती शीर्षबिन्दुहरूलाई रेखा y = –x मा परावर्तन गर्दा,

$$P(x, y) \longrightarrow P'(-y, -x)$$
$$A(2, 2) \longrightarrow A'(-2, -2)$$
$$B(4, 4) \longrightarrow B'(-4, -4) \text{ र}$$
$$C(-1, 5) \longrightarrow C'(-5, 1)$$

अब, ΔABC र ΔA'B'C' लाई तलको एउटै लेखा चित्रमा देखाइएको छ ।

यसरी कुनै पनि वस्तुलाई X–अक्ष वा Y–अक्षमा परावर्तन गर्दा र रेखा y = x वा रेखा y = x मा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्व एउटै र उस्तै आकार र साइजको हुन्छ तर स्थान (Position) मात्र परिवर्तन हुन्छ । यसैलाई कुनै पनि वस्तुको परावर्तन (Reflection) भनिन्छ ।

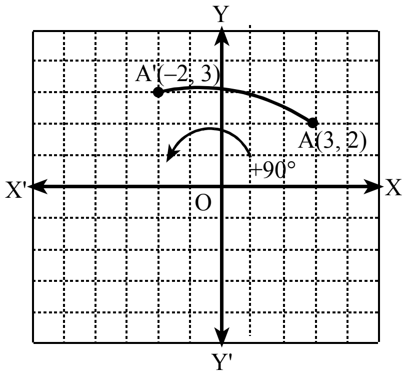
2. **परिक्रमण** (Rotation)

कुनै बिन्दु वा चित्रलाई कुनै निश्चित (fixed) बिन्दुबाट दिएको दिसामा (direction) र दिइएको कोण (angle) मा स्थानान्तरण गराउनुलाई परिक्रमण (Rotation) भनिन्छ । निश्चित (fixed) बिन्दुलाई परिक्रमणको केन्द्र भनिन्छ ।

परिक्रमणका लागि परिक्रमणको केन्द्र (Center of Rotation), परिक्रमणको कोण (Angle of Rotation) र परिक्रमणको दिसा (Direction of Rotation) आवश्यकता पर्दछ ।

घडीको सुईको दिसा (Clockwise direction) लाई परिक्रमणको ऋणात्मक दिसा (Negative Direction) र घडीको सुईको विपरीत दिसा (Anticlockwise direction) लाई परिक्रमणको धनात्मक दिसा (Positive direction) भनिन्छ । धनात्मक दिसालाई '+' र ऋणात्मक दिसालाई '–' ले जनाइन्छ । कोण + 90° र –270° ले परिक्रमण गर्नु एउटै हो । त्यसैगरी –90° र + 270° ले परिक्रमण गर्नु एउटै वा समान हुन्छ ।

(क) परिक्रमणको केन्द्र उद्गम बिन्दु (0,0) बाट +90° वा –270° मा परिक्रमण

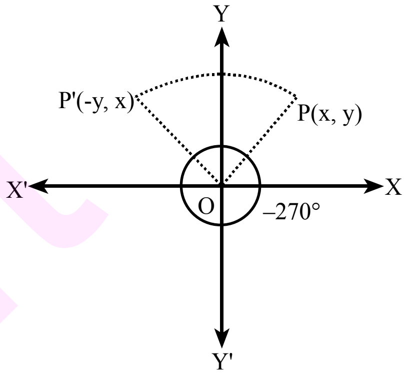


सँगै दिइएको ग्राफमा बिन्दु A(3, 2) लाई उद्गमविन्दु O बाट धनात्मक दिसातर्फ कोणमा परिक्रमण गर्दा बिन्दु A'(–2, 3) मा पुगेको छ । तसर्थ, कुनै बिन्दु P (x, y) लाई उद्गम बिन्दु (0, 0) बाट +90° वा -270° ले परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्व निम्नानुसार हुन्छ ।

$P(x, y) \xrightarrow{R[(0,0)\ 90°]} P'(-y, x)$

यहाँ, बिन्दु P (x, y) को प्रतिबिम्व (image) P' (-y, x) हो ।

उदाहरण : बिन्दु (5,9) लाई उद्गम बिन्दुबाट +90° मा परिक्रमण गर्दा भन्ने प्रतिबिम्व पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान (Solution)

यहाँ दिइएको बिन्दु P(5,9) छ ।

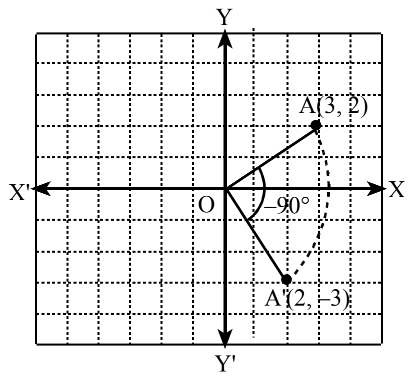
अब, P(5, 9) लाई +90° मा परिक्रमण गर्दा,

$P(5, 9) \xrightarrow{R[(0,0)\ 90°]} P'(-9, 5)$

∴ (5, 9) को प्रतिबिम्व (–9, 5) हो ।

(ख) उद्गम बिन्दु (0, 0) बाट –90° वा + 270° मा परिक्रमण

ग्राफमा बिन्दु A(3, 2) लाई उद्गमबिन्दु O बाट –90° को कोणमा ऋणात्मक दिसातर्फ परिक्रमण गर्दा बिन्दु A'(2, –3) मा पुगेको छ ।

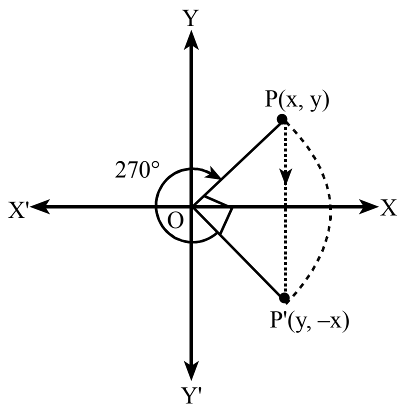


तथर्स कुनै बिन्दु P(x, y) लाई उद्गम बिन्दु (0, 0) बाट –90° वा +270° मा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्व निम्नानुसार हुन्छ :

$P(x, y) \xrightarrow{R[(0,0)\ 90°]} P'(y, -x)$

यहाँ, बिन्दु P (x, y) को प्रतिबिम्व (Image) P' (y, –x) हो ।

उदाहरण : बिन्दु (6, –5) लाई उद्गम बिन्दुबाट –90° मा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्ब पत्ता लगाउनुहोस् ।



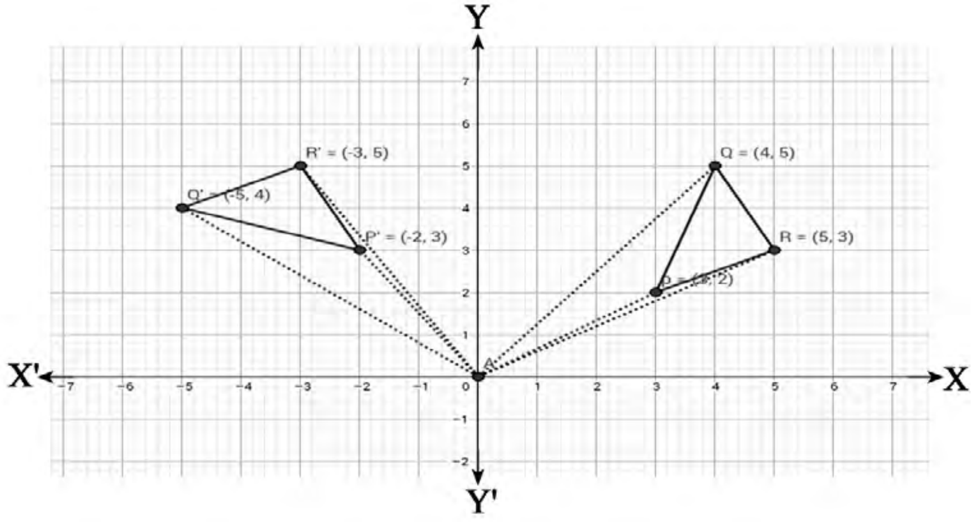
समाधान (Solution):

यहाँ दिइएको बिन्दु P(6, -5) छ ।

अब, बिन्दु P(6, –5) लाई उद्गम बिन्दुबाट –90° मा परिक्रमण गर्दा,

$P(6, -5) \xrightarrow{R[(0,0)\ 90°]} P'(-5, -6)$

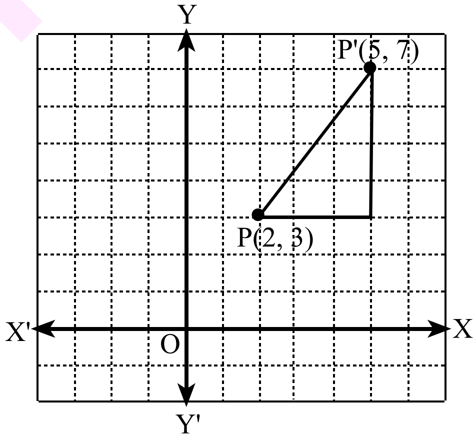
∴ बिन्दु P(6, –5) को प्रतिबिम्व P' (–5, –6) हुन्छ ।



(घ) विस्थापन (Displacement)

कुनै पनि बिन्दुलाई दिइएको दिसामा निश्चित दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (translation) वा displacement भनिन्छ । विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण र दिसा उल्लेख गर्नु आवश्यक छ ।

बिन्दु P(2, 3) लाई 3 एकाइ दायाँ वा X-अक्षतर्फ र 4 एकाइ माथि वा Y-अक्षतर्फ सार्दा बिन्दु P'(2 + 3, 3 + 4) = P'(5, 7) मा पुग्दछ ।



तसर्थ, कुनै बिन्दु P(x, y) लाई X-अक्षतर्फ 'a' एकाइ दायाँ र Y-अक्षतर्फ 'b' एकाइ माथि सार्दा बिन्दु P'(x + a, y + b) मा पुग्दछ ।

त्यसैगरी 'a' एकाइ बायाँ र b एकाइ तल सार्दा P'(x – a, y – b) मा पुग्दछ । कुनै बिन्दुलाई दायाँ र माथि विस्थापन गर्दा + बायाँ र तल विस्थापन गर्दा '–' हुन्छ ।

उदाहरण : मानौँ A(–2, 2), B(–3, –2), C(3, –2) र D (2, 2) एउटा चतुर्भुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त चतुर्भुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गरी 3 एकाइ बायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

समाधान (Solution)

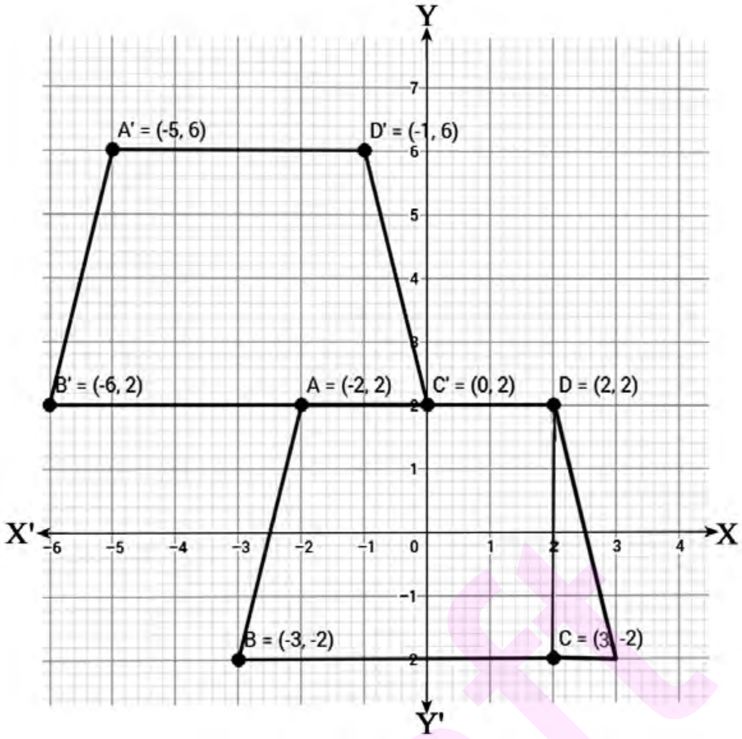
यहाँ, दिइएका बिन्दुहरू A(–2, 2), B(–3, –2), C(3, –2) र D (2, 2) छ । अब, यी सबै बिन्दुहरूलाई 3 एकाइ बायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गर्दा,

A(–2, 2) $\longrightarrow$ A' (–2 –3, 2 + 4), i.e. A' (–5, 6)

B(–3, –2) $\longrightarrow$ B' (–3 –3, –2 + 4), i.e. B' (-6,2)

C(3, –2) $\longrightarrow$ C' (–3 –3, –2 + 4), i.e.C'(0, 2)

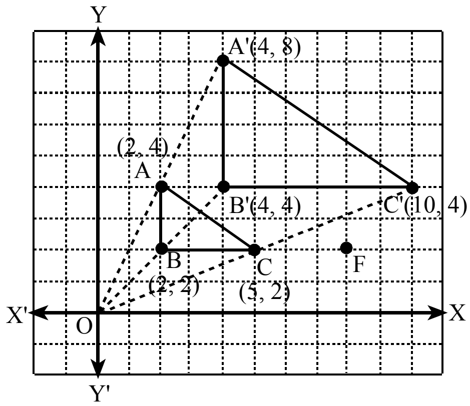
D (2, 2) $\longrightarrow$ D' (2 –3, 2 + 4), i.e. D' (–1, 6)



(ङ) विस्तारीकण (Enlargement)

विस्तारीकण एउटा त्यस्तो स्थानान्तरण हो, जसले ज्यामितीय आकृतिलाई उही स्वरूप (shape) मा तर फरक आकार (size) मा परिवर्तन गर्छ ।

सँगै दिइएको ग्राफमा एउटा त्रिभुज ABC लाई उद्‌गम बिन्दु O(0, 0) लाई केन्द्र र विस्तारको नापो 2 एकाइ लिएर विस्तारीकरण गर्दा प्रतिबिम्व ΔA'B'C' हुन्छ ।



यहाँ,

$$OA' = 2OA$$

$$OB' = 2OB$$

$$OC' = 2OC$$

अथवा

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 2 \text{ छ ।}$$

यस अनुपातलाई विस्तारको नापो (scale factor) भनिन्छ ।

चित्रमा ΔABC को शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू क्रमशः A(2, 4), B(2, 2) र C(5, 2) छन् । त्यस्तै प्रतिबिम्व त्रिभुज A'B'C' को शीर्षबिन्दुका निर्देशाङ्कहरू क्रमशः A'(4, 8), B'(4, 4) र C'(10, 4) छन् ।

यसरी यदि विस्तारको नापो 2 छ भने आकृतिको निर्देशाङ्कलाई विस्तारको नापो 2 ले गुणा गर्दा प्रतिबिम्व प्राप्त हुन्छ ।

यहाँ,

$$A(2, 4) \xrightarrow[\text{नापो } 2]{\text{विस्तार}} A'(4, 8)$$

$$B(2, 2) \xrightarrow[\text{नापो } 2]{\text{विस्तार}} B'(4, 4)$$

$$C(5, 2) \xrightarrow[\text{नापो } 2]{\text{विस्तार}} C'(10, 4)$$

यसर्थ, कुनै बिन्दु P(x, y) लाई विस्तारको नापो k ले विस्तार गर्दा बिन्दु P'(kx, ky) हुन्छ ।

जसलाई $P(x, y) \longrightarrow P'(kx, ky)$ लेखिन्छ ।

यसबाट प्रष्ट हुन्छ की, विस्तार गर्न विस्तारको केन्द्र र विस्तारको नापो आवश्यक हुन्छ ।

विस्तारीकरणका प्रमुख विशेषताहरू

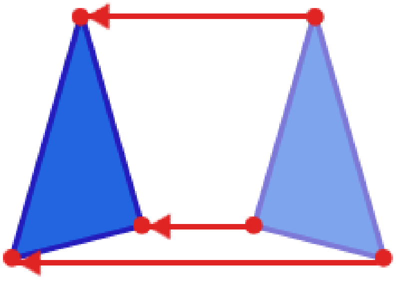
- आकृति र प्रतिबिम्व आपसमा समरूप हुन्छन् ।
- विस्तारको नापो (scale factor) k भए $k > 1$ हुदा ज्यामितीय आकृति बढेको हुन्छ ।
- $0 < k < 1$ हुँदा ज्यामितीय आकृति घटेको हुन्छ ।
- $k < 0$ हुँदा ज्यामितीय आकृति उल्टो हुन्छ ।

८. समिमिति र टेसेलेसन (Symmetry and Tessellations)

समिमिति (Symmetry)

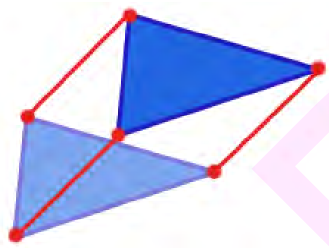
समिमिति भन्नाले उस्तै ज्यामितीय आकृतिको मापन भन्ने बुझिन्छ । उस्तै अथात् बिन्दु वा रेखाद्वारा विभाजित, विस्थापित वा परावर्तित आकृतिलाई उस्तै र उत्रै रूपमा प्राप्त गर्न सकिन्छ भने त्यसलाई समिमिति वा symmetry भन्न सकिन्छ । जसमा रूपान्तरित आकृति वा विभाजित आकृति वा दुवै रूपलाई जनाउँछ । जसलाई निम्नअनुसार अवलोकन गर्न सकिन्छ ।

१. रूपान्तरित आकृति



परावर्तित (Reflection)

परिक्रमणात्मक (Rotation)

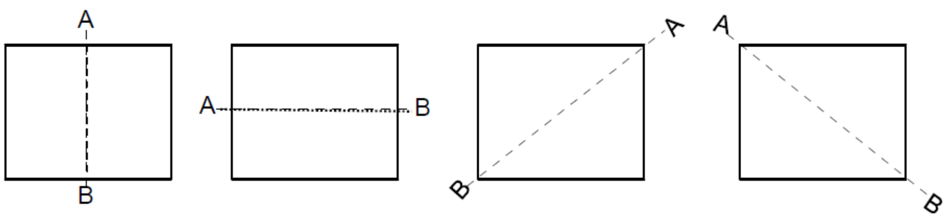


विस्थापित (Translation)

२. विभाजित आकृति

यसअन्तर्गत २ किसिमका आकृतिहरू पर्दछन् ।

(क) रेखीय समिमिति (Line Symmetry)

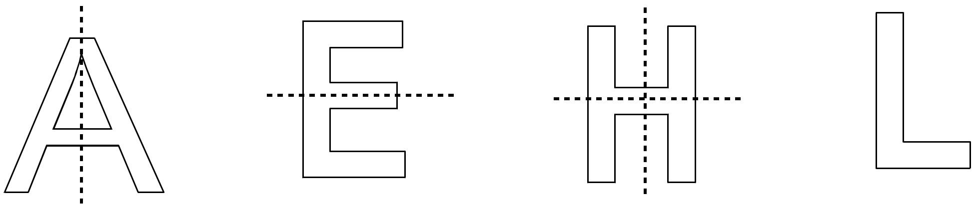


माथिका चित्रहरूमा प्रत्येक वर्गाकार कागजका टुक्राहरूलाई रेखा AB बाट दुई बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ । समिमिति (summetry) भनिन्छ । यसरी यदि कुनै पनि चित्र वा ज्यामितीय आकृति वा अक्षर (letter) लाई दुई कुनै रेखामा पट्याउँदा बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ भने

त्यस्ता चित्रलाई सममितीय चित्रहरू भनिन्छ र त्यो आकृतिमा रेखीय सममिति छ भन्न सकिन्छ । यहाँ वस्तुलाई पट्याउँदा जुन रेखामा पट्याइन्छ त्यो रेखालाई सममितिको अक्ष भनिन्छ ।

अथवा

ज्यामितीय आकृतिलाई एउटा रेखामा परावर्तन गर्दा वस्तु र प्रतिबिम्व उही रहन्छ भने त्यो आकृतिलाई त्यो परावर्तनको अक्षमा सममिति भएको आकृति भनिन्छ । अर्थात् परावर्तनको अक्षले वस्तुलाई प्रतिबिम्व र आकृति गरी दुई बराबर भाग लगाउँछ भने त्यो वस्तुमा रेखीय सममिति छ भनिन्छ । जस्तै:



चित्र (i) चित्र (ii) चित्र (iii) चित्र (iv)

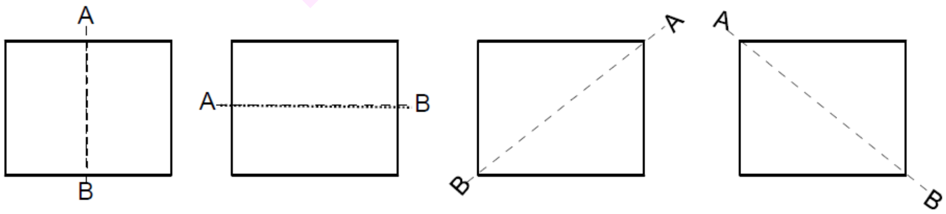
माथिका चित्र (i), (ii) र (iii) लाई दुई बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ । त्यसैले तिनीहरू सममितीय चित्रहरू हुन् । तर चित्र (iv) लाई बरावर दुई भागमा पट्याउन (fold) सकिँदैन । त्यसैले चित्र (iv) सममितीय चित्र होइन वा यसको सममिति अक्ष छैन । तर माथिको वर्गाकार आकृतिको चार ओटा सममितिका अक्षहरू छन् । त्यसैले ज्यामितीय आकृतिको एकभन्दा बढी सममितिका अक्षहरू हुन सक्छन् ।

यहाँ दुई प्रकारका सममितिहरूको चर्चा गरिन्छ ।

(क) रेखीय सममिति

(ख) बिन्दु वा परिक्रमण सममिति

क) रेखीय सममिति (Line Symmetry)

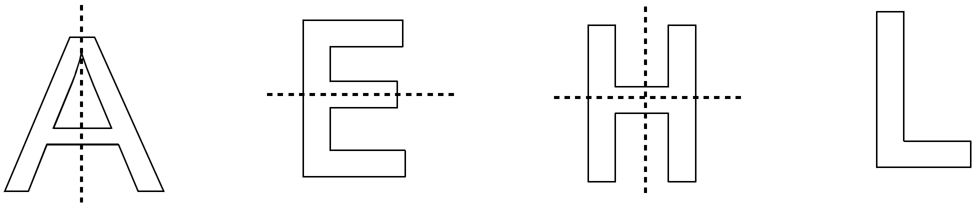


माथिका चित्रहरूमा प्रत्येक वर्गाकार कागजका टुक्राहरूलाई रेखा AB बाट दुई बरावर भागमा पट्याउन सकिन्छ । यसरी यदि कुनै पनि चित्र वा ज्यामितीय आकृति वा अक्षर (letter) लाई दुई कुनै रेखामा पट्याउँदा बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ भने त्यस्ता चित्रलाई सममितीय चित्रहरू भनिन्छ र त्यो आकृतिमा रेखीय सममिति छ भन्न सकिन्छ । यहाँ वस्तुलाई पट्याउँदा जुन रेखामा पट्याइन्छ त्यो रेखालाई सममितिको अक्ष भनिन्छ ।

अथवा

ज्यामितीय आकृतिलाई एउटा रेखामा परावर्तन गर्दा वस्तु र प्रतिबिम्व उही रहन्छ भने त्यो आकृतिलाई त्यो परावर्तनको अक्षमा सममिति भएको आकृति भनिन्छ । अर्थात् परावर्तनको अक्षले

वस्तुलाई प्रतिबिम्व र आकृति गरी दुई बराबर भाग लगाउँछ भने त्यो वस्तुमा रेखीय सममिति छ भनिन्छ । जस्तैः



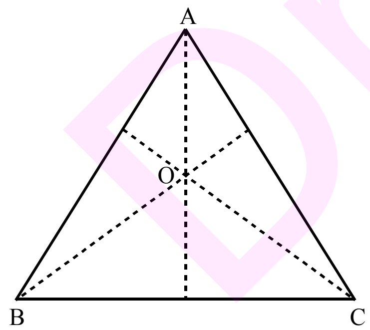
चित्र (i) चित्र (ii) चित्र (iii) चित्र (iv)

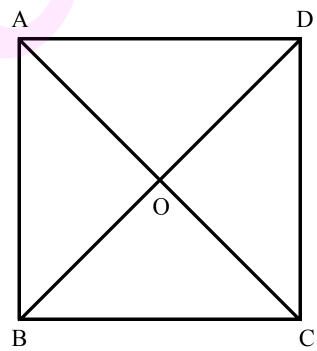
माथिका चित्र (i), (ii) र (iii) लाई दुई बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ । त्यसैले, तिनीहरू सममितीय चित्रहरू हुन् । तर चित्र (iv) मा बरावर दुई भागमा पट्याउन (fold) सकिँदैन । त्यसैले चित्र (iv) सममितीय चित्र होइन वा यसको सममिति अक्ष छैन तर माथिको वर्गाकार आकृतिको चार ओटा सममितिको अक्षहरू छन् । त्यसैले ज्यामितीय आकृतिको एकभन्दा बढी सममितिका अक्षहरू हुन सक्दछन् ।

(ख) बिन्दु वा परिक्रमण सममिति (Point or Rotational Symmetry)

यस प्रकारको सममितिमा कुनै वस्तु वा ज्यामितीय चित्रहरूलाई एउटा निश्चित बिन्दुमा परिक्रमण गरिन्छ र त्यसरी परिक्रमण गर्दा पनि उक्त वस्तु वा चित्र उस्तै रहन्छ ।

जस्तैः





माथिको समबाहु त्रिभुजमा शीर्ष बिन्दुबाट खिचिएका लम्बहरू 120° मा काटिन्छन र यी लम्ब काटिएको बिन्दुमा 120° को परिक्रमण गर्दा त्रिभुज पहिलेको स्थितिमा आउँदछ र एक पूर्ण परिक्रमणमा यस्तो स्थिति 3 पटक आउँदछ । त्यसैले समबाहु त्रिभुजमा क्रम 3 (rotational symmetry of order 3) को परिक्रमिक सममिति हुन्छ । त्यस्तै गरी दोस्रो चित्र वर्गमा क्रम – 4 (rotational symmetry of order 4) को परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

यदि θ कोणमा परिक्रमण गर्दा ज्यामितीय आकृति पहिलेको स्थितिमा आउँदछ भने त्यो आकृतिमा $\frac{360°}{\theta}$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

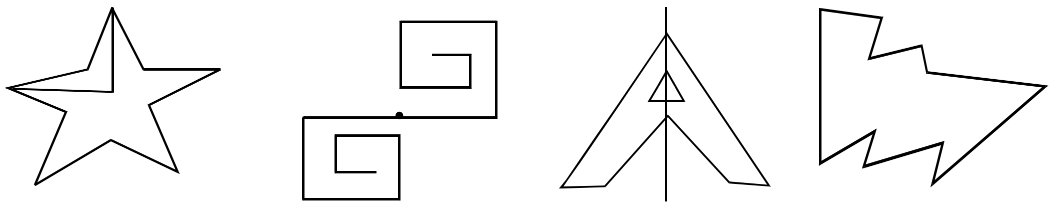
जस्तैः समबाहु त्रिभुजका लागि $\frac{360°}{120°} = 3$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

वर्गका लागि $\frac{360°}{90°} = 4$ क्रमको परीक्रमिक सममिति हुन्छ ।

तसर्थ, यदि ज्यामितीय आकृतिभित्र परेको बिन्दुको वरिपरि दिएको कोण ($180° < \theta$) मा परिक्रमण गराउँदा आकृति र प्रतिबिम्ब एउटै हुन्छ भने त्यो ज्यामितीय आकृतिमा $n = \frac{360°}{\theta}$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

निष्कर्ष : सममितिलाई यसरी रेखीय र बिन्दु भनेर छुट्टाए पनि कुनै आकृतिलाई दुवै रूपमा समेत लेख्न सकिन्छ ।

तलको चित्रलाई हेरौँ ।



रेखा र बिन्दु सममिति | बिन्दु सममिति | रेखा सममिति | रेखा र बिन्दु कुनै सममिति नभएको

शैक्षिक सामग्री : यस पाठमा निम्नलिखित शैक्षिक सामग्रीहरू प्रयोग गर्न सकिन्छ :

- अङ्ग्रेजी वर्णमालाका अक्षरहरू, मोडलहरू, A4 size कागजहरू, ऐना, square paper, graph paper, grid कागज, विभिन्न प्रकारका ढाँचाहरू भएका चार्टपेपर, कैँची, पेन्सिल, रुलर, कम्पास, प्रोटेक्टर
- परावर्तनका लागि चाहिने सामग्रीहरू : ग्राफ बोर्ड, ज्यामितीय औजार वाकस, ऐना, परावर्तन गर्ने तरिका उल्लेख भएको ग्राफ पेपर, चार्ट
- परिक्रमणका लागि : त्रिभुज, चतुर्भुज, बहुभुजका नमुनाहरू, ज्यामितीय औजार, बाकस, काँटी, परिक्रमण गर्ने तरिका ग्राफ पेपर उल्लेख भएको चार्ट
- विस्थापनका लागि : ज्यामितीय आकृतिहरू, ज्यामितीय औजार, बाकस, चार्ट ग्राफपेपर

सिकाइ सहजीकरण विधि (Teaching Method)

गणित विषय गरेर सिक्ने (learning by doing) विषय भएकाले कक्षाकोठामा शिक्षकले विद्यार्थी केन्द्रित शिक्षण विधि प्रयोग गर्नुपर्छ । विद्यार्थीहरूलाई आफैँले गरेर सिक्ने वातावरण शिक्षकले तयार गर्नुपर्छ । त्यसका लागि स्थानान्तरण पाठमा शिक्षकले निम्नलिखित शिक्षण विधि अपनाउनु आवश्यक हुन्छ :

- आगमन विधि
- निगमन विधि
- छलफल र प्रश्नोत्तर विधि
- अवलोकन विधि

- प्रयोगात्मक विधि
- प्रदर्सन विधि
- समूह कार्य, परियोजना कार्य लगायतका विद्यार्थी केन्द्रित विधिहरू

स्थानान्तरणको प्रयोग (Application of transformation)

दैनिक जीवनमा हामीले स्थानान्तरणको प्रयोग गर्दै आइरहेका छौँ तर कुन कुन काममा गर्छौं त्यो भने हामीलाई कमै मात्रामा थाहा हुन्छ । यसको प्रयोग हाम्रो दैनिक जीवनमा निम्नानुसार हुन्छ ।

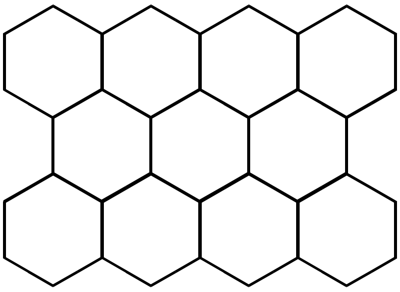
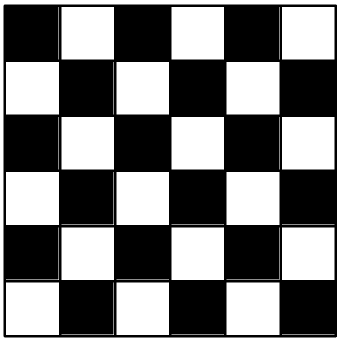
- स्थानान्तरणको परिक्रमणको प्रयोग हामीले प्रयोग गर्ने घडीमा भइरहेको छ । त्यहाँ minute hand, second hand र hour hand, Clockwise direction मा परिक्रमण गर्छन् । यसमा सबै सुईले एउटा निश्चित कोणिक गतिका आधारमा परिक्रमण गर्दछन् । यो अवस्थामा परिक्रमणको केन्द्र भनेको घडीको केन्द्र हुन्छ ।
- स्थानान्तरणको प्रयोग हामीले घरमा प्रयोग गर्ने furniture मा पनि भइरहेको छ । जस्तैः हामीले उक्त फर्निचरलाई एउटा कोठाबाट अर्को कोठामा सार्दा वा धकेल्दा सिधा तरिकाले सार्न सक्छौँ । यहाँ एउटै दिसामा धकेल्दा स्थानान्तरण (translation) को प्रयोग हुन्छ । त्यस्तै उक्त सामानलाई rotate गर्दा (90°, –90°, ±180°) र मिलाउँदा परिक्रमण (rotation) को पयोग भइरहको हुन्छ । त्यस्तै उक्त सामानहरूलाई ढोकाबाट कुन angle माभित्र छिराउँदा सजिलै जान्छ भनी rotate गर्‍यौँ भने त्यहाँ परिक्रमण (rotation) को प्रयोग भइरहेको हुन्छ ।
- त्यस्तै विभिन्न खेलहरू basketball, football, cricket आदिमा पनि परिक्रमण (rotation) को प्रयोग भइरहेको हुन्छ ।
- Plane taking off गर्दा पहिले विस्तारै माथि जान्छ, यसलाई translation भनिन्छ ।
- हामीले सधैं प्रयोग गर्ने ऐना हेर्दा परावर्तन (reflection) को प्रयोग भइरहेको छ ।
- त्यस्तै खोला, पोखरी आदि पानी जमेको ठाउँमा हामीले आफ्नो चित्र उस्तै देख्न सक्छौ, भने त्यहाँ reflection को अवधारणा प्रयोग भइरहेको हुन्छ ।
- त्यस्तै पृथ्वीले सूर्यको परिक्रमा गर्दा पनि rotation को प्रयोग भइरहेको छ ।
- हामीले भुइँ सफा गर्न प्रयोग गर्ने vacuum machine ले rotation र translation दुवैको काम गरिरहेको हुन्छ ।
- हामीले आफूले खिचेको pictures लाई विभिन्न angle मा rotate गर्न सक्छौँ ।
- झ्यालढोका खोल्दा र बन्द गर्दा rotation को प्रयोग भइरहेको हुन्छ ।
- कोल घुमेको, PT खेलाउँदा दायाँ घुम्नु, वायाँ घुम्नु र पुरा घुम्नु पनि rotation को प्रयोग भएको हुन्छ ।

टेसिलेसन (Tessellation)

एउटा अनन्त समतल सतहलाई खाली ठाउँ नछोडी एक वा एकभन्दा बढी अनुरूप टायलहरूले

एकआपसमा टायल नखर्पटिने गरी छाप्ने प्रक्रियालाई टेसिलेसन (tessellation) भनिन्छ ।

गणितको सुन्दरताको रूप (beauty of Mathematics) मा नियमित र अनियमति बहुभुजहरूलाई निश्चित ढाँचाको रूपमा प्रस्तुत गरिएको हुन्छ । जसलाई हामी टेसिलेसन (tessellation) भन्दछौँ । टेसिलेसन (tessellations) लाई विभिन्न डिजाइनहरूमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

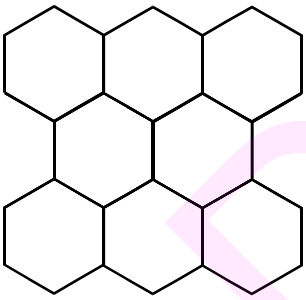
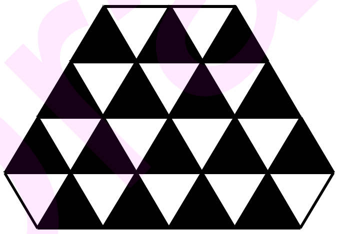
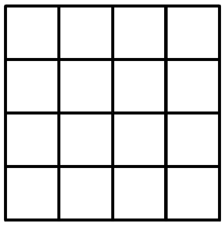



टेसिलेसनका प्रकारहरू (Types of tessellation)

१. नियमित टेसिलेसन (Regular tessellation)

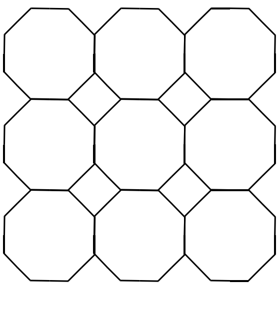
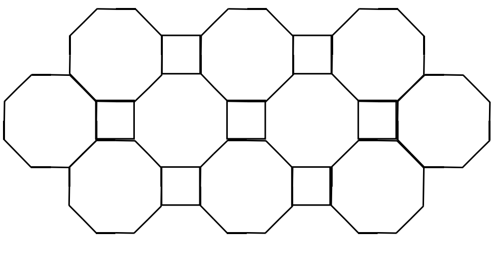
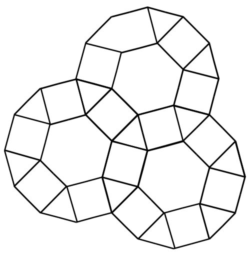
एकै प्रकारका नियमित बहुभुजबाट बनेका टेसिलेसनलाई नियमित tessellation भनिन्छ ।

उदाहरणका लागि तल दिइएको वर्गबाट बनेको टेसिलेसन नियमित tessellation हो ।

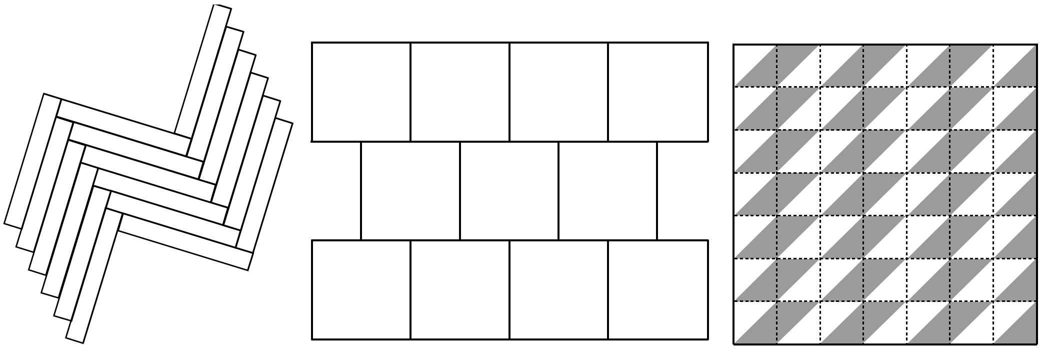
२. अर्धनियमित टेसिलेसन(Semi-regular Tessellation)

दुई वा दुईभन्दा बढी बहुभुजबाट बनेका टसिलेसनलाई अर्धनियमित tessellation भनिन्छ । तलको चित्रमा समषष्टभुज समबाहु त्रिभुज र वर्गबाट बनेको टेसिलेसन अर्ध नियमित tessellation हो ।

३. **अनियमित टेसिलेसन** (Irregular Tessellation)

अनियमित बहुभुज वा वक्र वृक्ष आकृतिबाट बनेका टेसिलेसनहरू अनियमित टेसिलेसनहरू हुन् । तल चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजबाट बनेका तथा वक्र भन्दा कृतिबाट बनेका टेसिलेसनहरू अनियमित टेसिलेसनका उदाहरणहरू हुन् ।



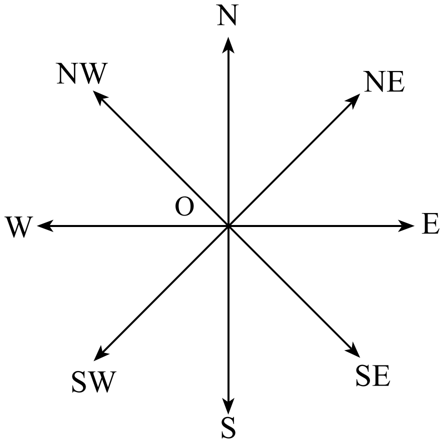
समभिति र टेसिलेसन शिक्षणका लागि चाहिने शैक्षिक सामग्रीहरू

सेतो कागज, कैँची, कार्डबोर्डमा बनेका विभिन्न ज्यामितीय आकृति तथा अङ्ग्रेजी वर्णमालाका अक्षरहरू, ट्रेसिङ पपेर, पेन्सिल, रुलर, कम्पास, प्रोटेक्टर

९. दिसास्थिति र स्केल ड्रइङ (Bearing and Scale Drawing)

दिसास्थिति (Bearing)

उत्तर दिसा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानी घडीको सुइको दिशामा कुनै दुई स्थानबिचको दुरीलाई मापन गरी तिन अङ्कको कोणको रूपमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई दिसास्थिति (Bearing) भनिन्छ । दिसास्थिति (Bearing) लाई कम्पास दिसास्थिति (compass bearing) पनि भनिन्छ । यसलाई कम्पासबाट खिचिएको तलको विभिन्न दिसाहरूमा देखाउन सकिन्छ ।

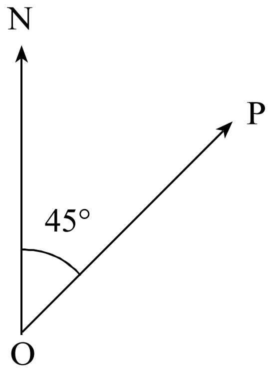


दिसास्थिति पत्ता लगाउन निम्न लिखित तिन ओटा कुरा जान्नुपर्छः

(क) उत्तर दिसालाई आधार रेखा मान्ने ।

(ख) घडीको सुईको दिसामा नाप्ने ।

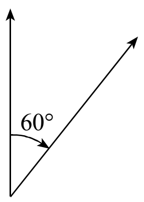
(ग) मापन तिन अङ्कमा प्रस्तुत गर्ने ।



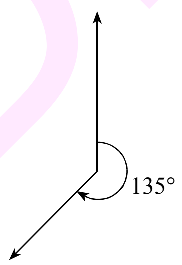
जस्तै : O बाट P सम्मको दिसा स्थिति पत्ता लगाउन उत्तर रेखा जनाउने रेखा ON लाई आधार मानि घडीको सुई घुम्ने दिसाको कोण $\angle NOP = 45°$ छ ।

त्यसैले O बाट P सम्मको दिसास्थिति 045° हुन्छ ।

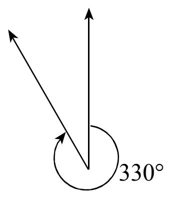
अन्य उदाहरणहरू पनि हेरौँ ।



060° को दिसास्थिति



135° को दिसास्थिति



330° को दिसास्थिति

स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)

यदि कुनै दुई ठाउँबिचको दुरीलाई कापीमा कोरेर देखाउन सम्भव हुँदैन वा गाह्रो हुन्छ भने त्यस्तो बेला हामीले उक्त दुरीलाई विभिन्न एकाइहरू जस्तैः मिटर (m), किलोमिटर (km), माइल (mile) आदिमा नापिन्छ र वास्तविक दुरी पत्ता लगाइन्छ ।

यसरी वास्तविक दुरीलाई नक्सामा प्रस्तुत गर्न सम्भव पार्ने खालको मापनको तरिकालाई नै स्केल ड्रइङ (scale drawing) भनिन्छ ।

Scale drawing को माध्यमबाट लामो दुरी वा ठुलो क्षेत्र ओगटेको वस्तुलाई नक्सामा एउटै पेजमा

अटाउन सकिन्छ ।

उदाहरण : यदि कुनै दुई स्थानहरू A र B बचिको दुरी 120 km छ भने 15 km = 1 cm स्केल प्रयोग गरी उक्त दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, 15 km = 1 cm लिँदा,

$120 \text{ km} = \frac{120}{15} \text{ c}$

$= 8 \text{ cm}$

$\therefore$ AB = 8 cm

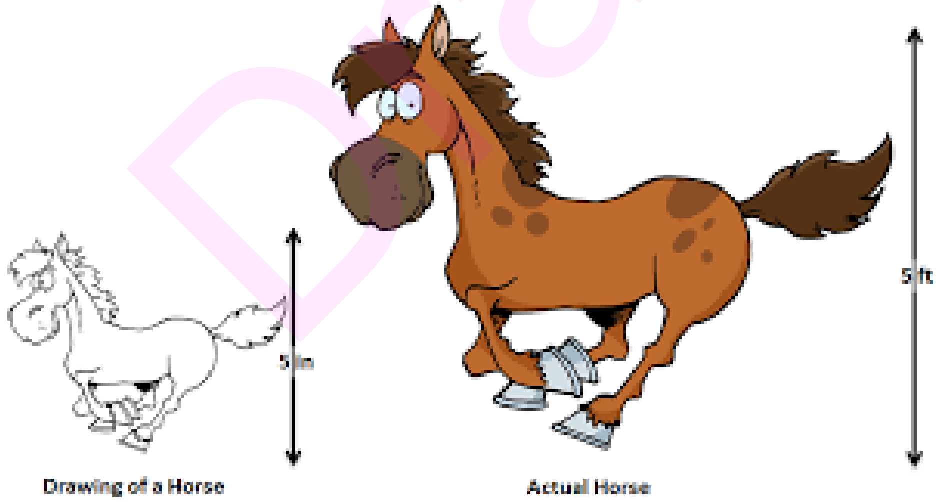
उदाहरण : 1 cm = 400 m स्केल प्रयोग गरी एउटा नक्सा तयार गर्दा दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी 4 cm भए उक्त दुई स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, स्केल 1 cm = 400 m लिँदा,

4 cm = 4 × 400)m = 1600 m

$\therefore$ उक्त दुई ठाउँबचिको वास्तविक दुरी = 1600 m

उदाहरण : कुनै 5 ft अग्लो घोडाको scale drawing कापीमा 5 inch उचाइको हुने गरी खिचिएको चित्र तल देखाइएको छ ।



Scale drawing **र** Bearing **शिक्षणका लागि चाहिने शैक्षिक सामग्रीहरू**

प्रोट्याक्टर, स्केल र नक्साहरू, कम्पासबाट देखिने दिसाहरूलाई रेखाङ्कन गरिएको चार्ट

१०. समूह

Cantor को 1874-1884 सम्मको कामले समूह सिद्धान्तको विकास भएको हो । योभन्दा अगाडि समूहलाई एउटा प्राथमिक धारणाको रूपमा लिइएको थियो । गणितको शुरुवातदेखि नै समूहलाई अप्रत्यक्ष रूपमा प्रयोग गरिएको थियो । सिमित समूहहरूलाई व्यापक रूपमा प्रयोग गरिएता पनि असीमित समूहहरूलाई दार्शनिक रूपमा मात्र व्याख्या गरिएको थियो । Cantor को योगदानले असीमित सहलाई पनि प्रयोगमा ल्याइयो । उनले अनगिन्ति आकारका असीमित समूहको सुरुवात गरी समूह सिद्धान्ताई अध्ययनको विषय बनाउन सफल भए ।

सुरुमा उनको क्रान्तिकारी विचारलाई उनको समयका प्रमुख गणितीज्ञहरूले आविष्कार गरे । तर उनको नयाँ गणितीय धारणाहरू बिसौँ शताब्दीमा प्रसिद्ध भयो । बिसौँ शताब्दीका प्रमुख गणितज्ञ David Hilbert ले Cantor को उपलब्धिलाई गणितीय सोचको सबैभन्दा अचम्म लाग्दो सिर्जनाको रूपमा व्याख्या गरे ।

उनको प्रारम्भिक प्रतिवेदनमा वास्तविक सङ्ख्याहरू प्राकृतिक सङ्ख्याहरू भन्दा धेरै भएको प्रमाणित गरे । जुन विचारलाई प्रयोग गरी उनले धेरै असीमित समूहहरूका आकारको व्याख्या गरे । One-one correspondence को प्रशंसा गर्दै सीमित र असीमित समूहमा यसको प्रयोग गरे । समूह सिद्धान्तमा उनले Power समूहको आकार दिइएको समूहभन्दा ठुलो हुन्छ भनी प्रमाणित गरे ।

संसारभरि भइरहने गणितज्ञहरूको विभिन्न सम्मेलनमा Cantor ले गरेको योगदानको प्रशंसा हुँदै आइरहेको छ । उनले विकास गरेको समूह सिद्धान्त गणितका सबै शाखाहरूमा प्रयोग हुँदै आइरहेको छ ।

दैनिक जीवनमा हामी प्रायः वस्तुहरूको सङ्ग्रहको कुरा गर्दछौं । जस्तै : bunch of keys, flock of birds, pack of cards इत्यादि र गणितमा हामी प्राकृतिक, पूर्णाङ्क, पूर्ण सङ्ख्याहरूको सङ्ग्रहको पनि कुरा गर्छौं ।

निम्न सङ्ग्रहहरूको जाँच गरौं ।

- 20 भन्दा साना जोर प्राकृतिक सङ्ख्याहरू i.e., 2, 4, …….. 18
- 30 को Prime factors i.e., 2, 3, 5
- भुजाको आधारमा त्रिभुजको वर्गीकरण समबाहु, समद्विबाहु र विषमबाहु
- संसारका पाँच जना प्रसिद्ध वैज्ञानिकहरू
- एउटा समाजका तिन जना सुन्दरीहरू
- नेपालका दुई ओटा उत्तम सहरहरू

यी थप उदाहरणहरू वस्तुहरूको सुपरिभाषित (Well-defined) सङ्ग्रहहरू होइनन् किनभने सबैभन्दा प्रसिद्ध, सबैभन्दा सुन्दर, उत्तमको निर्धारण गर्ने मापदण्ड व्यक्ति व्यक्तिअनुसार भिन्न हुन्छ ।

अतः समूह एक विशिष्ट (distinct) वस्तुहरूको परिभाषित सङ्ग्रह हो । माथि उल्लेख गरिएका थप उदाहरणहरू परिभाषित नभएको हुँदा यिनीहरू समूह होइनन् ।

- Collection, aggregate, class शब्दहरू समूह शब्दका पर्यायवाची शब्दहरू हुन् ।
- Object, elements र member प्रयार्यवाची शब्दहरू हुन् ।

- सामान्यतया समूहहरूलाई अङ्ग्रेजी वर्णमालाको ठुला अक्षरहरू A, B, C, …ले जनाइन्छ ।
- समूहको सदस्यहरूलाई सानो अक्षरहरू a, b, c ……… ले जनाइन्छ ।

यदि a समूह A को सदस्य हो भने a लाई समूह A सँग सम्बन्धित छ भनिन्छ । यसलाई गणितमा $a \in A$ लेखिन्छ । यदि b समूह A को सदस्य होइन भने यसलाई गणितमा $b \notin A$ लेखिन्छ ।

गणितमा प्रयोग हुने केही महत्त्वपूर्ण समूहहरू यस प्रकार छन् ।

N : प्राकृतिक सङ्ख्याहरूको समूह = {1, 2, 3, ………}

W : पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह = {0, 1, 2, 3, ……….}

Z : पूर्णाङ्कहरूको समूह = {…….. -2, -1, 0, 1, 2, ……..}

Q : आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह

I : अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह

R : वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूह

Z+ : घनात्मक पूर्णाङ्कहरूको समूह

सुपरिभाषित शब्दको व्याख्या

कुन कुन सदस्यहरू दिइएको समूहमा पर्दछन् र कुन कुन सदस्यहरू समूहमा पर्दैनन् भनेर स्पष्ट गर्न सकिने सदस्यहरूलाई सुपरिभाषित सदस्यहरू भनिन्छ ।

समूहका गुणहरू

(क) समूहमा भएको सदस्यहरूको क्रम परिवर्तन गर्दा समूहमा फरक आउँदैन ।

उदाहरण : A = {4, 6, 7, 8, 9} = {8, 4, 9, 7, 6} = {7, 8, 9, 6, 4}

सबै समूहले एउटै समूहलाई जनाउँदछ ।

(ख) कुनै एउटा वा धेरै सदस्यहरू समूहमा दोहोर्‍याउँदा समूहमा फरक आउँदैन ।

उदाहरण : A = {5, 6, 7, 8, 9, 5, 9} = {5, 6, 7, 8, 9} यी दुबै समूहले एउटै समूहलाई जनाउँदछ ।

समूहलाई जनाउने तरिकाहरू

समूहलाई सामान्यतया निम्न तरिकाद्वारा जनाउन सकिन्छ ।

(क) व्याख्या विधि

(ख) सूचीकरण विधि

(ग) समूह निर्माण विधि

व्याख्या विधि : यो विधिमा समूहमा पर्ने सदस्यहरूको गुणलाई वाक्यद्वारा अभिव्यक्ति गरिन्छ र जसलाई मझौला कोष्ठभित्र राखिन्छ । जस्तै : {30 र 50 बिचका अङ्कहरूको समूह ।}

सूचीकरण विधि : यो विधिमा समूहको सम्पूर्ण सदस्यहरूलाई मझौला कोष्ठभित्र अल्पविरामले छुट्याएर प्रस्तुत गरिन्छ । जस्तै : मानौं N एउटा समूह हो जसमा पहिलो 5 प्राकृतिक सङ्ख्याहरू छन् । जसलाई सूचीकरण विधि अनुसार N = {1, 2, 3, 4, 5} लेखिन्छ । सूचीकरण विधिका केही उदाहरण निम्नानुसार छन् ।

- अंग्रेजी वर्णमालामा स्वरहरूको समूह, V = {a, e, i, o, u}
- MATHEMATICS शब्दमा प्रयोग भएका अक्षरहरूको समूह, M = {M, A, T, H, E, I, C, S}

नोट : समूहमा रहेका सदस्यहरूलाई जुनसुकै क्रममा राख्दा पनि हुन्छ । साथै एउटै सदस्यलाई दोहोऱ्याई रहनु आवश्यक हुँदैन ।

समूह निर्माण विधि : यो विधिमा सम्पूर्ण सदस्यहरूको साझा गुणका आधारमा चलको व्याख्या गरिन्छ । समूहको एउटा सदस्यलाई 'x' सङ्केतले वर्णन गरिन्छ अनि कोलोन (colon) सङ्केत ':' or ….Ú प्रयोग पछि गुणको बारेमा वर्णन गर्दै मझौला कोष्ठभित्र राखिन्छ । जसमा : सङ्केतको such that वा भनेको बुझाउँदछ । जस्तै : P = {12 भन्दा ठुलो गन्ति अङ्कहरूको समूहलाई समूह निर्माण विधिमा लेख्दा

P = {x : x भनेको 12 भन्दा ठुलो गन्ति सङ्ख्याहरू हुन् ।}

उदाहरण : तलका समूहलाई तिनै किसिमले जनाउनुहोस् ।

(क) -2 र 3 को बिचमा पर्ने पूर्णाङ्कहरूको समूह

समाधान :

1. {-2 र 3 को बिचमा पर्ने पूर्णाङ्कहरू ।}
2. I = {-1, 0, 1, 2}
3. $I = \{x : x \in I, -2 < x < 3\}$

समूहको प्रकार

(क) खाली समूह (Empty set)

एउटा पनि सदस्य नरहेको समूहलाई खाली समूह भनिन्छ । यसलाई अङ्ग्रेजीमा empty or Null or void समूह भनिन्छ । यसलाई ϕ ले जनाइन्छ । जसलाई फाई भनिन्छ । सूचीकरण विधिमा {} ले जनाइन्छ । यो समूहमा जम्मा सदस्य सङ्ख्या शून्य हुन्छ । तसर्थ यो एउटा सिमित समूह हो ।

उदाहरण : 0 भन्दा सानो पूर्ण सङ्ख्याहरूको समूह । स्पष्ट रूपमा 0 भन्दा सानो पूर्ण सङ्ख्याहरू छैनन् । तसर्थ यो खाली समूह हो ।

Note :

(क) $\phi \neq \{0\}$

(ख) {0} समूहमा एउटा सदस्य 0 छ । यो खाली समूह होइन ।

(ग) खाली समूहको सदस्य $n(\varnothing) = 0$ हुन्छ ।

(ख) एक सदस्यीय समूह (Singleton set)

एउटा मात्र सदस्य भएको समूहलाई एक सदस्यीय समूह भनिन्छ ।

उदाहरण : (क) $A = \{x : x$ नत prime नत composite हो$\}$

यो एक सदस्यीय समूह हो, जसले 1 लाई मात्र समेट्दछ ।

(ख) B $\{x : x \in N$ र $x^2 = 4\}$

यो एक सदस्यीय समूह हो । जसले 2 लाई मात्र समेट्दछ ।

(ग) सिमित समूह (Finite set)

सीमित सदस्य सङ्ख्या समावेश गरेर बनेको समूहलाई सीमित समूह भनिन्छ । खाली समूह एउटा सिमीत समूह हो ।

उदाहरण : (क) $N = \{x{:}x \in N, x < 7\}$

(ख) $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\ldots\ldots 97\}$

(घ) असीमित समूह (Infinite set)

सम्पूर्ण सदस्यहरूलाई सूचीबद्ध गर्न नसकिने अनगिन्ति सदस्य भएको समूहलाई असीमित समूह भनिन्छ ।

उदाहरण : (क) {सतहमा भएका सम्पूर्ण बिन्दुहरू}

(ख) $B = \{x{:}x \in w, x = 2n\}$

नोट : (क) सबै असीमित समूहलाई सूचीकरण विधिमा प्रस्तुत गर्न सकिदैन ।

समूहको गणनात्मकता

कुनै पनि समूहमा भएको जम्मा भिन्न सदस्यहरूको सङ्ख्यालाई त्या समूहको गणनात्मकता वा गणनात्मक सङ्ख्या (cardinality/cardinal number) भनिन्छ । समूह A को cardinal number लाई n(A) ले जनाइन्छ ।

उदाहरण :

(क) $A = \{x \ \ x \in N, x < 5]$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

त्यसैले $n(A) = 4$

(ख) B = ALGEBRA शब्दमा प्रयोग भएका अक्षरहरू

$B = \{A, L, G, E, B, R\}$

$n(B) = 6$

उपसमूह

मानौं A र B दुई समूहहरू हुन् । यदि समूह A को प्रत्येक सदस्यहरू समूह B को पनि सदस्य भएमा समूह A लाई समूह B को उपसमूह भनिन्छ । जसलाई हामी $A \subseteq B$ वा $B \supseteq A$ ले जनाउँदछौं ।

उदाहरण : समूह A = {1, 3, 5} को सम्पूर्ण उपसमूहलाई लेख्नुहोस् । जम्मा उपसमूहको सङ्ख्या कति हुन्छ ? खोजी गर्नुहोस् ।

समाधान : एउटा पनि सदस्य नभएको उपसमूह - {}

एक ओटा सदस्य भएको उपसमूहहरू - {1}, {3}, {5}

दुई ओटा सदस्य भएको उपसमूहहरू - {1, 3}, {1, 5}, {3, 5}

तिन ओटा सदस्य भएको उपसमूहहरू - {1, 3, 5}

त्यसकारण सबै सम्भावित उपसमूहहरू यस प्रकार छन् ।

{}, {1}, {2}, {3}, {1, 3}, {1, 5}, {3, 5} {1, 3, 5}

त्यसकारण सम्भावित उपसमूहका सङ्ख्या = 8 जुन 2^3 सँग बराबर छ । जसमध्ये पहिलो सात उपयुक्त उपसमूह हो र अन्त्यको अनुपयुक्त उपसमूह हो ।

नोट : (क) प्रत्येक समूह आफैंको एक उपसमूह हो । i.e. $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq \varnothing$

(ख) खाली समूह सबै समूहहरूको उपसमूह हो । i.e. $\varnothing \subseteq A$, $\varnothing \subseteq B$

उदाहरण : मानौं A = {2, 4, 6}, B = {6, 4, 8, 2}

यहाँ A समूह B समूहको उपसमूह हो किनभने A समूहको सम्पूर्ण सदस्यहरू B समूहको सदस्य छन् । तर समूह B समूह A को उपसमूह होइन किनभने समूह B का सम्पूर्ण सदस्यहरू समूह A मा छैनन् ।

उदाहरण : समूह A = {1, 2, 3} को उपसमूहहरू यस प्रकार छन :

$\varnothing$,{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2,3}, {1, 2, 3}

नोट : (क) यदि $A \subseteq B$ र $B \subseteq A$ भए A=B हुन्छ ।

(ख) प्राकृतिक सङ्ख्याहरू पूर्णाङ्कहरूको उपसमूह हो । जसलाई हामी $N \subset Z$ ले जनाउँदछौं ।

(ग) मानौ A = {2, 4, 6} र B = {x : x, 8 भन्दा साना जोर सङ्ख्याहरू हुन् }

यहाँ, $A \subset B$ र $B \subset A$

यसैले हामी A = B लेख्न सक्छौं ।

(घ) मानौं A = {1, 2, 3, 4} र B = {4, 5, 6, 7} यहाँ $A \not\subset B$ र $B \not\subset A$ छ । यहाँ $\not\subset$ ले उपसमूह होइन भने जनाउँछ ।

(ङ) कुनै n सदस्य भएको समूहको उपसमूहको सङ्ख्या = 2^n ओटा हुन्छ । जस्तै : 3 ओटा सदस्य भएको समूहबाट $2^3 = 8$ ओटा उपसमूहहरू बनाउन सकिन्छ ।

सुपर समूह : यदि समूह A समूह B को उपसमूह हो भने समूह B लाई समूह A को सुपर समूह भनिन्छ । सुपर समूहलाई $\supseteq$ ले जनाइन्छ ।

उदाहरण : (क) यदि A = {a, e, i, o, u}

B = {a, b, c, ………. z}

यहाँ $A \subset B$ i.e. समूह A समूह B को उपसमूह हो

तर $B \supseteq A$ i.e. समूह B समूह A को सुपर समूह हो ।

उपयुक्त उपसमूह : समूह A समूह B को उपयुक्त उपसमूह हुँदा $A \subset B$ तर $A \neq B$ हुनुपर्दछ । सङ्केत $\subset$ ले उपयुक्त उपसमूहलाई बुझाउँदछ । साङ्केतिक रूपमा $A \subset B$ लेखिन्छ ।

उदाहरण : (क) मानौं $A = \{1, 2, 3, 4\}$ यहाँ $n(A) = 4$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$ यहाँ $n(B) = 5$

यहाँ $A \subset B$ तर $n(A) \neq n(B)$, त्यसैले समूह A लाई समूह B को उपयुक्त उपसमूह भनिन्छ ।

नोट :

(क) कुनै समूह आफैँको उपयुक्त उपसमूह हुँदैन ।

(ख) खाली समूह हरेक समूहको उपयुक्त उपसमूह हो ।

(ग) कुनै n ओटा सदस्य भएको समूहबाट $2^n - 1$ ओटा उपयुक्त उपसमूहहरू बनाउन सकिन्छ ।

अनुपयुक्त उपसमूह : समूह A समूह B को अनुपयुक्त उपसमूह हुँदा $A \subset B$ र $n(A) = n(B)$ हुन्छ । कुनै पनि समूह आफ्नै अनुपयुक्त उपसमूह हुन्छ । अनुपयुक्त उपसमूहलाई $\subseteq$ ले जनाइन्छ । $A \subseteq B$ ले A समूह B को अनुपयुक्त उपसमूह हो भन्ने बुझाउँदछ ।

Note: कुनै पनि समूहको एउटा मात्र अनुपयुक्त उपसमूह बनाउन सकिन्छ ।

Power Set : कुनै पनि समूहको सबै उपसमूहहरू सङ्कलन गरी बनाइएको नयाँ समूहलाई समूह (Power set) भनिन्छ । समूह A लाई प्रयोग गरी बनाइएको Power समूहलाई P(A) ले जनाइन्छ ।

उदाहरण : यदि $A = \{p, q\}$ भए A का सबै उपसमूह यस प्रकार छन् । $\varnothing$, $\{p\}$, $\{q\}$, $\{p, q\}$

यसैले $P(A) = \{\varnothing, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ power समूह हो ।

नोट : यदि $n(A) = m$ छ भने $n[P(A)] = 2^m$ हुन्छ । जस्तै माथिको उदाहरणमा $n(A) = m = 2$ छ अनि $n[P(A)] = 4$ छ । किनभने $2^m = 2^2$ पनि 4 हुन्छ ।

सर्वव्यापक समूह (Universal Set)

एउटा समूह जसले अन्य समूहहरूको सम्पूर्ण सदस्यहरूलाई समेट्दछ भने त्यो समूहलाई Universal set भनिन्छ । Universal set लाई जनाउन U सङ्केतको प्रयोग गरिन्छ ।

उदाहरण

1. यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 5, 7\}$ भए $U = \{, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, [here $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$]

2. यदि whole numbers को समूह र ऋणात्मक integers को समूहमा काम गर्ने हो भने integers को समूहलाई Universal set को रूपमा लिन सकिन्छ ।

समतुल्य समूह (Equivalent Set)

दुई समूहहरू A र B लाई equivalent समूह भन्नको लागि दुवै समूहको Cordinal number

बराबर हुनुपर्दछ । Equivalent समूहहरूलाई A⇔B को सङ्केतले जनाइन्छ ।

उदाहरण : A = {1, 2, 3} यहाँ, n (A) = 3

B = {p, q, r} यहाँ, n (B) = 3

त्यसैले A⇔B

बराबर वा समान समूह (Equal Set)

दुई ओटा समूहहरू A र B एकआपसमा बराबर हुनको लागि दुवै समूहमा उही र बराबर सङ्ख्यामा सदस्यहरू हुनुपर्दछ । समूह A को हरेक सदस्य B मा र समूह B को हरेक सदस्य A मा हुनुपर्दछ ।

उदाहरण : यदि, A = {p, q, r, s} र B = {p, s, r, q} भए

यसैले A=B

नोट :

a) सबै equal set लाई equivalent set भनिन्छ तर सबै equivalent समूहलाई equal set भन्न सकिदैन ।

b) समूहको प्रस्तुतिमा सदस्यहरूको क्रमलाई महत्त्व दिइँदैन ।

अलग्गिएका समूह (Disjoint Set)

यदि दुई ओटा समूह A र B मा कुनै पनि साझा सदस्य छैनन् भने A र B लाई अलग्गिएका समूह भनिन्छ ।

उदाहरण : यदि, A = {x : x is a prime number} र B = {x : x is a composite number) कुनै दुई समूहहरू छन् । यी दुवै समूह A र B मा कुनै पनि सदस्य साझा नभएको हुँदा यिनीहरू अलग्गिएका वा छुट्टिएका समूहहरू हुन् ।

खप्टिएका समूह (Overlapping Set)

यदि दुई ओटा समूह A र B मा कम्तिमा एउटा मात्र साझा सदस्य छन् भने A र B लाई खप्टिएका समूह भनिन्छ ।

उदाहरण : यदि, A = {x:x is a prime number} र B = {x:x is a natural number less than 5) दुई समूहहरू छन् । यी दुवै समूह A र B मा साझा सदस्य भएको हुँदा यिनीहरू खप्टिएका समूहहरू हुन् ।

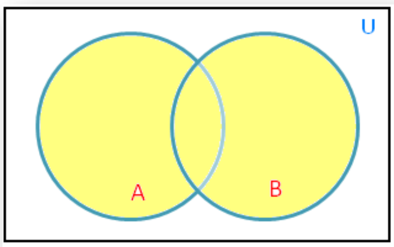
समूहको संयोजन (Union of Sets)

दुई वा दुईभन्दा बढी समूहहरूको संयोजन (union) भनेको एउटा नयाँ समूह हो जसले सबै समूहहरूको सदस्यहरूलाई आफ्नो सदस्यको रूपमा व्याख्या गर्दछ तर साझा वा उही सदस्यहरूलाई दोहऱ्याउनु पर्दैन ।

समूहहरूको union लाई ∪ ले सङ्केतले जनाइन्छ ।

मानौं A = {2, 4, 5, 6} र B = {4, 6, 7, 8} छन् । दुवै समूहको सदस्यहरूलाई नदोहोऱ्याई नयाँ समूह बनाउँदा बन्ने समूह,

A∪B = {2, 4, 5, 6, 7, 8}, A र B को Union हो । दुई ओटा समूहहरू A र B को union लाई A∪B ले जनाइन्छ । जसलाई A union B भनेर



A U B

पढिन्छ ।

गणितीय भाषामा, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

यसैले यदि $x \in (A \cup B) \Rightarrow x \in A \text{ or } x \in B$

त्यसरी नै यदि $x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \ \& \ x \notin B$

यसैले चित्रमा छाँया पारेको क्षेत्रको $A \cup B$ लाई जनाउँदछ ।

यसैले, माथिको व्याख्याबाट हामी $A \subseteq (A \cup B)$ र $B \subseteq (A \cup B)$ लेख्न सक्छौं ।

Union of set का केही properties हरू निम्नानुसार :

i. $A \cup B = B \cup A$

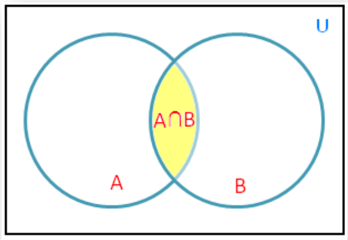
ii. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

iii. $A \cup \varnothing = A$

iv. $A \cup A = A$

v. $U \cup A = U$

समूहको प्रतिच्छेदन (Intersesion of sets)



A∩B

दुई वा बढी समूहको प्रतिच्छेदन (intersection) भनेको एउटा नयाँ समूह हो जसले सबै समूहमा भएका साझा सदस्यहरूलाई मात्र समेट्दछ ।

दुई ओटा समूहहरू A र B को intersection लाई $A \cap B$ ले जनाइन्छ ।

मानौँ $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ र $B = \{3, 5, 7, 9\}$

यी दुई समूहहरूमा 3 र 5 दुवै साझा सदस्यहरू भएकाले $A \cap B = \{3, 5\}$ हुन्छ ।

गणितीय रूपमा $A \cap B = \{x : x \in A \ \& \ x \in B)$

यदि, $x \in A \cap B, \Rightarrow x \in A \ \& \ x \in B$

तर, $x \notin A \cap B, \Rightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B$

त्यसैले चित्रमा shaded region ले $A \cap B$ लाई जनाउँदछ ।

Intersection of set का Properties हरू निम्नानुसार :

i. $A \cap B = B \cap A$

ii. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

iii. $\varnothing \cap A = \varnothing$

iv. $U \cap A = A$

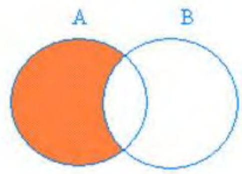
v $A \cap A = A$

vi. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$

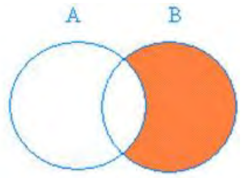
vii. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

समूहहरूको फरक (Differene of Two Sets)

दुई ओटा समूहहरू A र B को difference लाई A-B र B-A ले जनाइन्छ र दुवै difference हरू Universal set को उपसमूह हुन्छन् । A-B ले समूह A मा मात्र भएको सदस्यहरूलाई र B-A ले समूह B मा भएका सदस्यहरूलाई मात्र संलग्न गर्दछ ।



Shaded region is A-B



Shaded region is B-A

गणितीय रूपमा, $A-B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

A-B एउटा समूह जसले समूह A मा रहेको ती सदस्यहरूलाई समेट्छ जुन समूह B मा रहेको हुँदैन ।

यदि $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ and $x \notin B$

चित्रमा shaded region ले A-B जनाउँदछ ।

Note : $A-B \subset A$

त्यसरी नै difference B-A एउटा समूह हो जसले Set B मा मात्र पर्ने तर A मा नपर्ने सदस्यहरूलाई मात्र सदस्यको रूपमा समेट्छ । त्यसैले $B-A = \{x : x \in B \text{ but } x \notin A\}$

चित्रमा Shaded region ले B-A लाई जनाउँदछ ।

Note :

(क) $B-A \subset B$

(ख) यदि $A \subset B$ भए $A-B = \varnothing$ र

(ग) यदि $A \cap B = \varnothing$ भए $A-B = A$ हुन्छ ।

(घ) $A-B = A \cap B'$

(ङ) $A - (B\cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

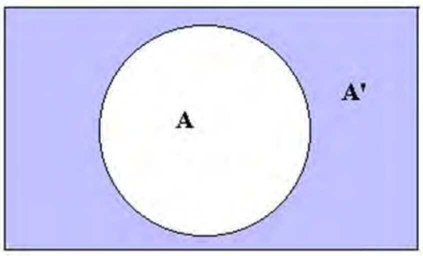
(च) $A - (B\cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

उदाहरण : यदि $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ र $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ भए A-B र B-A पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $A-B = \{2, 4, 6\}$, र $B-A = \{9, 11, 13\}$

समूहको पुरक (Complement of Set)

समूह A को पूरक (complement) भनेको एउटा समूह हो जसमा समूह A को सदस्य बाहेक Universal Set को सम्पूर्ण सदस्यहरूलाई समेटिएको हुन्छ । समूह A को Complement लाई A', $\overline{A}$ वा A^c ले जनाइन्छ । difference को प्रयोग गर्दा



$\overline{A}$ = U-A हुन्छ । चित्रमा Shaded region ले $\overline{A}$ लाई जनाउँछ ।

गणितीय भाषामा, $\overline{A} = \{x : x \in U, \text{ but } x \notin A\}$

उदाहरण : यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ र $A = \{1, 2\}$ भए $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$ हुन्छ ।

Note :

(क) Universsal set को complement set एउटा empty set हो । i.e. $\overline{U} = \varnothing$

(ख) Empty set को complement set एउटा universal set हो । i.e. $\overline{\Phi} = U$

(ग) कुनै पनि समूह र त्यसको complement समूह एकआपसमा disjoint हुन्छन् ।

उदाहरण : मानौं U र A क्रमशः Natural numbers र even numbers को समूह हुन, भने $\overline{A}$ odd numbers को समूह हुन्छ ।

Complement sets का properties निम्नानुसार छन् ।

i. $A \cup A' = A' \cup A = U$

ii. $(A \cap A')) = \varnothing$

iii. $(A \cup B)' \ \ A' \cap B'$

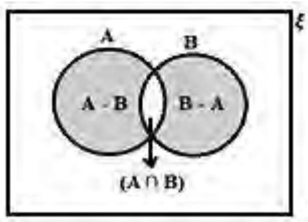
iv. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

v. $(A')' = A$

vi. $\varnothing' = U$

vii. $U' = \varnothing$

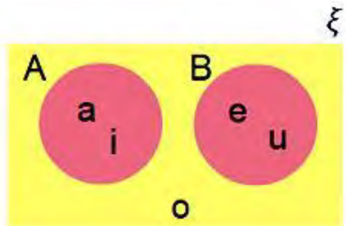
समूहहरूको सममितीय फरक (Symmetric Difference of Sets)



दुई ओटा समूहहरू A र B को Symmetric difference लाई $A \Delta B$ ले जनाइन्छ जुन U समूहको उपसमूह हुन्छ ।

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{x : x \notin A \cap B\}$

गणितीय रूपमा, $A \Delta B = \{x : [x \in A \ \& \ x \notin B] \text{ or } [x \in B \text{ and } x \notin A]\}$



चित्रमा छायाँ पारेको क्षेत्रले $A \Delta B$ लाई जनाउँछ । जसले समूह A वा समूह B को सदस्यहरूलाई संलग्न गराउँदछ तर दुवैमा पर्ने सदस्यलाई गराउँदैन ।

$A \Delta B$ लाई $(A \cup B) - (B \cap A)$ रूपमा पनि व्याख्या गर्न सकिन्छ ।

अब,

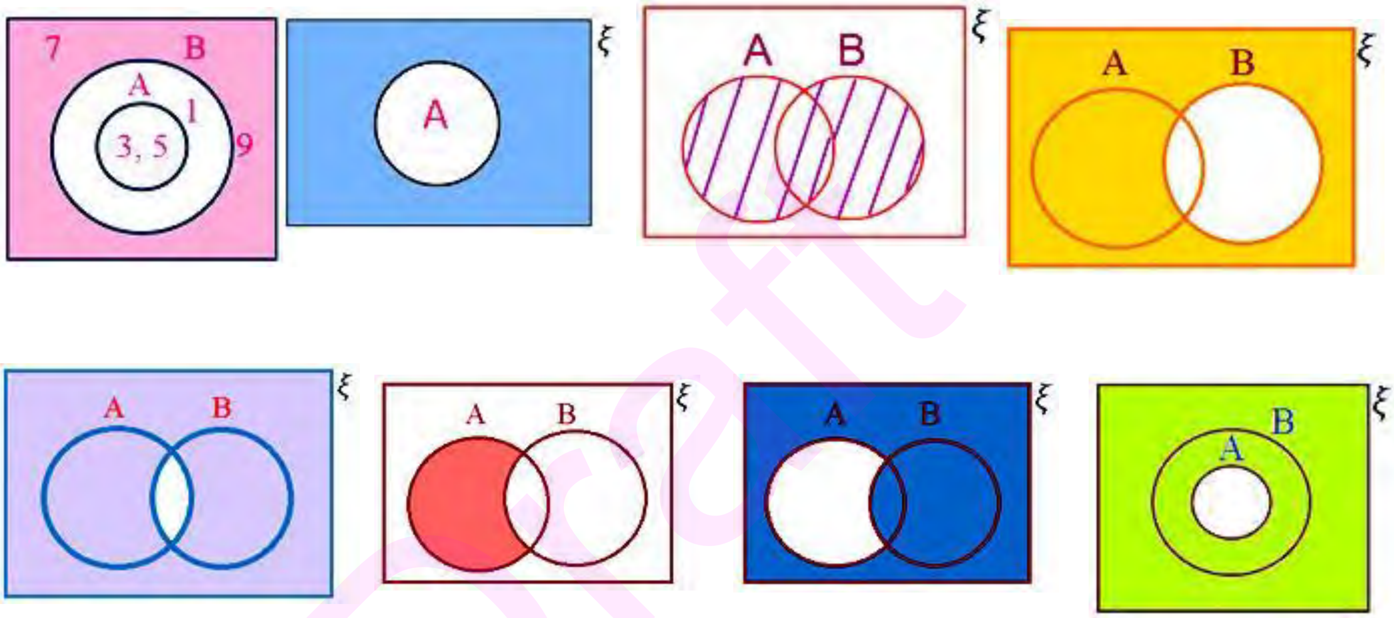
$A \Delta \varnothing = A$, $A \Delta A = \varnothing$ सम्बन्ध सधैँ सत्य रहन्छ ।

गुणहरू

(क) $A \Delta B = B \Delta A$

(d) A र B universal set को subset साथै समूह A, B को उपसमूह हुँदा उदाहरण : यदि, U = {1, 3, 5, 7, 9}, A = {3, 5} र B = {1, 3, 5} भए,

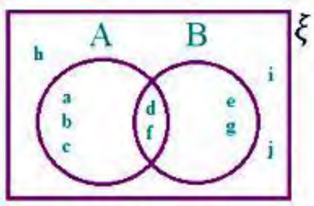
- एउटा वृत्तकोभित्र पर्ने गरी अर्को वृत्त खिच्नुहोस् ।
- समूह A का सदस्यहरू भित्रपट्टिको circle मा लेख्नुहोस् ।
- समूह B का बाँकी सदस्यहरू A वृत्तको बाहिर तर वृत्त B कोभित्र लेख्नुहोस् ।
- A र B समूहका सदस्यहरू बाहेक Universal set को सदस्यहरू दुवै वृत्तको बाहिर तर rectangleभित्र लेख्नुहोस् । तल दिइएको Venn-diagram को अवलोकन गर्नुहोस् । छायांकित भागले समूहको प्रतिनिधित्व गर्दछ । पत्ता लगाउनुहोस् ।



उदाहरण : दिइएको Venn-diagram प्रयोग गरी निम्नानुसार समूह पत्तालगाउनुहोस् ।

(a) $A\cup B$ (b) $A\cap B$ (c) A' (d) B-A

(e) $(A\cap B)'$ (f) $(A\cup B)'$



समाधान : यहाँ U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}

A = {a, b, c, d, f}

B = {d, f, e, g}

$A\cup B$ = {a, b, c, d, e, f, g}

$A\cap B$ = {d, f}

$\overline{A}$ = {e, g, h, i, j}

B-A = {e, g}

$(A\cap B)'$ = {a, b, c, e, g, h, i, j}

$A\cup B)$ = {h, i, j}

समूहको गणनातमकताका गुणहरू (Cardinal Properties of Set)

यदि U ले सर्वव्यापी समूह र A, B र C सीमित समूह हुन् भने

(क) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

i.e. $n(A - B) + n(A \cap B) = n(A)$

(ख) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ग) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ यदि A र B disjoint समूहहरू हुन् भने

(घ) $n(A \Delta B) = n(A - B) \cup (B - A)$

$= n(A - B) + n(B - A)$ किनभने A - B र B - A disjoint समूह

$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$

$= n(A) \; n(B) - 2.n(A \cap B)$

(ङ) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(च) एउटा मात्र समूहमा पर्ने सदस्यहरू सङ्ख्या

$$= n(A) + n(B) + n(C) - 2.n(A \cap B) - 2.n(B \cap C) - 2.n(A - C) + 3.n(A \cap B \cap C)$$

(छ) दुई ओटा मात्र समूहमा पर्ने सदस्यहरू सङ्ख्या

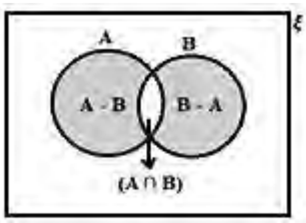
$$= n(A \cap B) + n(B \cap C) \; n(C \cap A) - 3.n(A \cap B \cap C)$$

(ज) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

(झ) $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ **को धारणा**

चित्रमा $A \cup B$ ले दुई ओटा वृत्त चित्रका तिन ओटा अलग्गिएका क्षेत्रलाई जनाउँछ । जसमा देव्रेबाट क्रमशः A - B, $A \cap B$ र B - A हुन् ।



जसमा हामी $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ र

$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

लेख्न सक्दछौं । अब

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

$= n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$

$= n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

यी सम्बन्धहरू तल दिइएको Venn-digram बाट प्रष्ट रूपमा बुझ्न सकिन्छ ।

उदाहरण : यदि दुई ओटा समूहहरू P र Q मा $P \cup Q$ मा 40 ओटा सदस्यहरू छन् । P र Q मा क्रमशः 22 र 28 सदस्यहरू छन् भने $P \cap Q$ मा कति सदस्य छन् पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : यहाँ, $n(P \cup Q) = 40$

$n(P) = 22$

$n(Q) = 28$

हामीलाई थाहा छ ।

$n(P \cup Q) = n(P) + n(Q) - n(P \cap Q)$

त्यसैले $40 = 22 + 28 - n(P \cap Q)$

त्यसकारण $n(P \cap Q) = 10$

उदाहरण : एउटा स्कुलले प्रतियोगितामा विभिन्न विधामा पुरस्कार वितरण गर्दा 36 जनाले नृत्यमा, 12 जनाले नाटकमा र 18 जनाले गायनमा पाएछन् । यदि पुरस्कार जम्मा 45 जनालाई र 4 जनाले सबै विधामा पुरस्कार पाएछन् भने कति जनाले दुई विधामा मात्र पुरस्कार पाएछन् ।

समाधान : यहाँ, मानौं, नृत्यको समूह, नाटकको समूह र गायनको समूहलाई क्रमशः A, B र C ले जनाउँदा,

$n(A) = 36, n(B) = 12, n(C) = 18$

$n(A \cup B \cup) = 45, n(A \cap B \cap C) = 4$

हामीलाई थाहा छ, दुई विधामा मात्र पुरस्कार पाउने प्रतियोगिता

$= n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(A \cap C) - 3 \times n(A \cap B \cap C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cup B \cup C) - 12$

$= 36 + 12 + 18 + 4 - 45 - 12$

$= 13$

उदाहरण : एउटा कक्षामा जम्मा 40 जना विद्यार्थी मध्ये 15 जनाले क्रिकेट र फुटबल र 20 जनाले क्रिकेट खेल्न मन पराउँछन् भने कति जनाले फुटबल मात्र खेल्न मन पराउँछन् ।

समाधान : मानौं क्रिकेट र फुटबल खेल्ने समूहलाई क्रमशः C र F ले जनाउँदा,

यहाँ,

$n(C \cup F) = 40, n(C \cap F) = 15, n(C) = 20, n_o(F) = ?$

हामीलाई थाहा छ

$n(C \cup F) = n(C) + n(F) - n(C \cap F)$

or, $40 = 20 + n(F) - 15$

or, $40 = 5 + n(F)$

त्यसैले $n(F) = 35$

त्यसकारण $n(F - C) = n(F) - n(C \cap F)$

$= 35 - 15 = 20$

उदाहरण : कुनै विद्यालयका 45 जना विद्यार्थीहरू मध्ये 10 जना गीत गाउनमा मात्र संलग्न छन् । यदि जम्मा गीत गाउने समूहमा 24 जना छन् भने कति जना नाचमा मात्र संलग्न छन् ? कति जना दुवैमा संलग्न छन् ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान : मानौं गीत गाउने र नाच्ने समूहलाई क्रमशः S र D ले जनाउँदा,

यहाँ, $n(S) = 24, n(S-D) = 10, n(S\cup D) = 45$

हामीलाई थाहा छ,

$$n(S) = n(S - D) + n(S\cap D)$$

$24 = 10 + n (S\cap D)$

$n (S\cap D) = 14$

फेरि, $n(S\cup D) = n(S - D) + n(D - S) + n(S\cap D)$

or, $45 = 10 + n(D - S) + 14$

or, $45 = 24 \;\; n(D - S)$

or, $n(D - S) \;\; 21$

यसकारण जम्मा नृत्यमा मात्र भाग लिने विद्यार्थीहरू 21 जना छन् ।

११. तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

परिचय (Introduction)

मानव सभ्यताको सुरुवात सँगसँगै तथ्याङ्कशास्त्रको जन्म भएको मानिन्छ । प्राचीन सभ्यताका हेब्रुस (Hebrews) तथा फाराह (Pharachs) जस्ता मानिसहरूले जनसङ्ख्या र धनसम्पत्तिको गणना (Census) गर्न तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग गरेको पाइन्छ । प्राचीन ग्रीसको १४०० BC मा भूमि सुधारका लागि जमिनको तथ्याङ्क सङ्कलन गरेको अभिलेख पाइन्छ । तर पनि प्राचीनकालका तथ्याङ्कीय अभिलेखका वस्तुहरू मानिस, धनसम्पत्ति र जमिन भएको अनुमान गर्ने गरिएको छ ।

तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics) शब्दको उत्पत्ति ल्याटिन शब्द Status तथा इटालियन शब्द Statista बाट आएको देखिन्छ । यी दुवैको अर्थ राजनीतिक स्थिति (Political state) भन्ने हुन्छ । तसर्थ प्रारम्भमा तथ्याङ्कशास्त्रलाई राज्य सञ्चालनका लागि राज्यका प्रशासकलाई विभिन्न पक्षको जानकारी उपलब्ध गराउने कार्यमा प्रयोग गरिन्थ्यो । राज्यको शासक वा प्रशासकलाई आफ्नो देशको जनसङ्ख्या, सम्पत्ति विवरण तथा सैनिक शक्तिको लेखाजोखा गर्न तथ्याङ्कशास्त्रको उपयोग भएका दृष्टान्तहरू प्राचीनकालका इतिहासमा उल्लेख छ । Rames II ले 1400 BC मा इजिप्टको सम्पूर्ण जमिनको सर्वेक्षण (नापी) गरेर राज्य व्यवस्था गर्ने प्रयास गरेका थिए । भारतमा पनि चन्द्रगुप्त सौर्य (322–298 BC) ले भारतवर्षको जनसङ्ख्यामा जन्म, मृत्यु तथा कुल जनसङ्ख्याको सर्वेक्षण गरेका थिए । नेपोलियन बोनापार्टको राज्य विस्तारको समयमा इङ्गलैन्डमा यस्तै कार्यहरू भएका थिए । जर्मनीमा आफ्नो राज्यको वास्तविक जनसङ्ख्या, सैनिक शक्ति, कृषि उत्पादन तथा औद्योगिक उत्पादनको आँकडा 18 औं शताब्दीमा रीतपूर्वक सङ्कलन गरेका दृष्टान्तहरू पाइन्छन् । तथ्याङ्कशास्त्रलाई राज्य व्यवस्थामा सहयोग पुऱ्याउनका लागि 18 औँ शताब्दीभन्दा पूर्व यस्ता थुप्रै कार्यहरू भएका थिए तापनि सन् 1749 मा आएर यस विषयलाई राज्य व्यवस्थाको विज्ञानको संज्ञाले परिभाषित गरेको पाइन्छ ।

वर्तमान परिवेशमा तथ्याङ्कशास्त्रलाई राज्य सञ्चालन व्यवस्थामा मात्र प्रयोग गर्ने विधाको रूपमा सीमित नराखी एउटा छुट्टै विधाको रूपमा लिन थालिएको छ । तथ्याङ्कशास्त्रको प्रयोग व्यस्थापन, विज्ञान, कृषि, वनविज्ञान, मनोविज्ञान, शिक्षाशास्त्र, समाजशास्त्र, जनसङ्ख्याशास्त्र, खगोलशास्त्र, अनुसन्धान आदि हरेक क्षेत्रमा ल्याउन थालिएको छ । यसको अध्ययन विना उपर्युक्त क्षेत्रहरूको अध्ययन अपुरो हुन्छ । तथ्याङ्कशास्त्रले अध्ययनका क्षेत्रका जानकारी तथा आँकडाहरू प्राप्त गरी यिनीहरूको प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषणका आधारमा उचित निष्कर्षमा पुग्न सहयोग पुऱ्याउँछ । यो एउटा वैज्ञानिक प्रक्रिया हो । जसमा तथ्यहरूको नियमित अवलोकन, सङ्कलन तथा विश्लेषण गरी निष्कर्षमा पुग्ने कार्य हुन्छ । तथ्याङ्कशास्त्रलाई आँकडा वा विधिको रूपमा हेर्न सकिन्छ । जब तथ्याङ्कशास्त्रले आँकडालाई जनाउँदछ, त्यति बेला सम्पूर्ण जानकारीलाई साङ्ख्यिक रूपमा व्यक्त गरिन्छ । तथ्याङ्कशास्त्रले आँकडाको सङ्कलन, आँकडाको प्रस्तुतीकरण, आँकडाको विश्लेषण, विश्लेषणको आधारमा निष्कर्ष निकाल्ने र निष्कर्षलाई व्याख्या गर्ने तथा अर्थपूर्ण प्रस्तुति गर्ने कार्य गर्छ ।

तथ्याङ्कशास्त्रलाई गणितको महत्त्वपूर्ण विषयको रूपमा उभ्याउनमा फ्रेन्च गणितज्ञहरू Blaise Pascal (1623-1662), Piere De Format (1606-1665) तथा स्वीस गणितज्ञ James Bernoulli (1654-1705) का अमूल्य योगदानलाई भुल्न सकिँदैन । अङ्ग्रेज तथ्याङ्कशास्त्री Sir Ronald (1890-1962) का महत्त्वपूर्ण योगदानले गर्दा उनलाई तथ्याङ्कशास्त्रका पिता (Father of Statistics) का नामले चिनिन्छ ।

सन् 1960 को दसक यता विश्वविद्यालय स्तरीय शिक्षाको रूपमा मात्र लिइएको तथ्याङ्कशास्त्रलाई विद्यालय स्तरमा समावेश गर्ने महत्त्वपूर्ण कदमहरू चालिए । तत्पश्चात तथ्याङ्कशास्त्रको प्रारम्भिक ज्ञान विद्यालय स्तरका पाठ्यक्रममा समावेश गर्न थालियो । विद्यालय स्तरमा तथ्याङ्कशास्त्र शिक्षणको उद्देश्य तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गरी सङ्गठनात्मक प्रस्तुति गर्न सक्ने, तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्न सक्ने तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति पत्ता लगाउने साथै यसबाट प्राप्त जानकारीबाट निष्कर्ष निकाल्ने रहेका छन् । तथ्याङ्कशास्त्र व्यावहारिक गणित भएकाले उपर्युक्त उद्देश्यहरू परिपूर्ति गर्न व्यावहारिक उदाहरण दिई विद्यार्थीलाई क्रियाकलापमा संलग्न गराई दैनिक कार्यहरूबाट उदाहरण दिई शिक्षण गर्न सकिन्छ ।

तथ्याङ्कशास्त्रको अर्थ र परिभाषा (Meaning and Definition of Statistics)

सामान्य अर्थमा तथ्याङ्कशास्त्रले सङ्ख्या वा तथ्यलाई जनाउँछ । सामान्य मानिसहरूले तथ्याङ्क भन्ने वित्तिकै सङ्ख्यात्मक सूचनाहरू जस्तै नेपालको जनसङ्ख्या, जन्मदर, मृत्युदर, कार दुर्घटना, विद्यालयमा भएमा विद्यार्थी सङ्ख्या, शिक्षक सङ्ख्या, ग्राफ, चार्ट आदि भन्ने सम्झन्छन् । किनकि यस्ता तथ्याङ्कहरू रेडियो, टेलिभिजन, पत्रपत्रिका आदिमा प्रयोग भएको पाइन्छ । तिनीहरूका लागि यो नै तथ्याङ्कको ठिक अर्थ हो । वास्तवमा प्राचीनकालमा तथ्याङ्क शब्द त्यस बेलाका शासकहरूले राज्य व्यवस्था सञ्चालनको लागि आवश्यक पर्ने सूचनाहरू सङ्कलन गर्न जस्तै कर सङ्कलनका नीति तथा योजना बनाउन, जनसङ्ख्या, कृषि, सैनिक शक्ति आदिको बारेमा नीति निर्धारण गर्न प्रयोग गरेको पाइन्छ ।

यस बाहेक तथ्याङ्कका अन्य अर्थ पनि छन् । सामान्य मानिसहरू जसले यसको अध्ययन गरेका हुँदैनन् उनीहरू यसको अर्थसँग अनभिज्ञ हुन्छन् । वास्तवमा तथ्याङ्कशास्त्र व्यावहारिक गणितको क्षेत्रमा एउटा ज्ञानको भण्डार हो जसका आफ्नै सङ्केतहरू, पदावलीहरू, विषयवस्तु, साध्य तथा प्रविधिहरू छन् र यसको बारेमा अध्ययन गर्ने मानिसले मात्र यसको बारेमा ज्ञान प्राप्त गर्न सक्छ । विद्यार्थीहरूका लागि तथ्याङ्क शब्दले प्रतिनिधि नमुनाको विशेषता जनाउने परिणाम भन्ने बुझाउँछ । जस्तै प्रतिनिधि नमुनाबाट पत्ता लगाइएका मानहरू मध्यक, मध्यिका आदि तथ्याङ्क हुन् । तथ्याङ्कशास्त्रको अध्ययनमा आँकडाहरूको सङ्कलन, सङ्कलित आँकडाहरूको सङ्गठन, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण गरिन्छ ।

परिभाषा (Definition):

आँकडाहरूको सङ्कलन, सङ्कलित आँकडाहरूको सङ्गठन, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषणका साथै विश्लेषणका आधारमा वैद्य तथा सही निष्कर्ष निकाल्न तथा महत्त्वपूर्ण निर्णय लिने वैज्ञानिक विधि नै तथ्याङ्कशास्त्र हो । तथ्याङ्कशास्त्रलाई Best र Kahn ले सङ्ख्यात्मक तथ्यहरूलाई सङ्कलन गर्ने, विश्लेषण गर्ने तथा व्याख्या गर्ने प्रविधिहरूको गणितीय संरचना भनेका छन् । (Statistics is a body of mathematical techniques or processes for gathering, organizing, analyzing and interpreting numerical data).

शैक्षिक क्षेत्रमा विभिन्न किसिमका परीक्षाहरूको माध्यमबाट विद्यार्थीहरूको शैक्षिक उपलब्धिसँग सम्बन्धित जानकारीहरूलाई सङ्कलन गर्ने, प्रस्तुतीकरण गर्ने, विश्लेषण तथा व्याख्या गर्ने कार्यमा तथ्याङ्कशास्त्रलाई प्रयोग गरिन्छ । यसले मापनको माध्यमबाट प्राप्त कोरा तथ्याङ्क (Raw Score) लाई विभिन्न तरिकाबाट विश्लेषण गर्ने र आवश्यक निष्कर्ष निकाल्न, उपयुक्त ढङ्गबाट सङ्गठन गर्न सहयोग गर्दछ ।

शैक्षिक क्षेत्रमा तथ्याङ्कशास्त्रको उपयोगिता वा प्रयोग (Uses or Implications of Statistics in Education)

- विद्यालयका शैक्षिक तथ्याङ्कलाई स्पष्ट र अर्थपूर्ण ढङ्गबाट व्यवस्थित गर्न
- विदयार्थीका उपलब्धिसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कलाई वैज्ञानिक ढंगले प्रस्तुतीकरण, तुलना, विश्लेषण तथा व्याख्या गर्न
- विभिन्न शैक्षिक तथ्याङ्कहरूलाई चित्रात्मक प्रस्तुतिकरण (लेखाचित्र, वृत्तचित्र, रेखाचित्र आदि) गर्न
- वास्तविक र स्पष्ट तथ्याङ्कको तुलना गरी प्रभावकारी मूल्याङ्कन गर्न
- शैक्षिक क्षेत्रमा विदयार्थीहरूको छनोट, वर्गीकरण, पथप्रदर्सन जस्ता कार्य गर्न
- विद्यार्थीको शैक्षिक प्रगतिको विवरण उपलब्ध गराउन
- परीक्षा परिणामलाई वैज्ञानिक ढङ्गले व्याख्या तथा विश्लेषण गर्न
- आवश्यक शैक्षिक तथ्याङ्कको उपयोग गरी विद्यालय सुधार योजना निर्माण गर्न
- शैक्षिक तथा प्रशासनिक अभिलेखलाई चुस्त, दुरुस्त राख्न
- शैक्षिक क्षेत्रमा विभिन्न किसिमका अनुसन्धान गर्न

तथ्याङ्कशास्त्रीय पदहरू (Statistical Terms)

तथ्याङ्कशास्त्रमा बारम्बार प्रयोगमा आइरहने केही पदहरूलाई निम्नअनुसार प्रस्तुत गरिएको छ :

आँकडा (Data)

कुनै पनि व्यक्ति, वस्तु, घटना वा तथ्यसँग सम्बन्धित जानकारीलाई सङ्ख्यात्मक रूपमा व्यक्त गरिने अङ्क वा सङ्ख्यालाई आँकडा (Data) भनिन्छ । आँकडालाई उपयुक्त ढङ्गबाट वर्गीकरण वा विश्लेषण गरेर मात्र तुलना गर्न तथा निष्कर्ष निकाल्न सकिन्छ । उदाहरणको लागि विद्यार्थीको परीक्षाको प्राप्ताङ्क, उचाइ, तौल, कुनै गाउँको जनसङ्ख्या, घरधुरी सङ्ख्या, केटाकेटीहरूको सङ्ख्या आदि ।

अवर्गीकृत आँकडा (Ungrouped Data)

कुनै पनि आँकडा थोरै सङ्ख्यामा छ र यसलाई निश्चित तरिकाले सङ्गठन नगरी पनि बुझ्न वा गणना गर्न सकिन्छ भने त्यस्तो आँकडालाई अवर्गीकृत आँकडा (Ungrouped Data) भनिन्छ । आँकडालाई त्यसको आकार, स्वरूप तथा प्रकृतिको आधारमा विभिन्न ढङ्गबाट वर्गीकरण तथा सङ्गठन गरिन्छ । उदाहरणको लागि कक्षा ६ का ८ जना विद्यार्थीहरूको परीक्षाको प्राप्ताङ्क क्रमशः 12, 14, 22, 25, 30, 35, 40, 44 छ भने यस्तो अवस्थामा आँकडालाई वर्गीकरण गरिँदैन ।

वर्गीकृत आँकडा (Grouped Data)

यदि प्राप्त आँकडा सामान्यतया 30 भन्दा बढी छ भने त्यसलाई व्याख्या तथा विश्लेषण गर्न निश्चित आधारमा वर्गीकरण गरिन्छ । यसरी वर्गीकरण गरिएको आँकडालाई वर्गीकृत आँकडा (Grouped Data) भनिन्छ । उदाहरणको लागि कक्षा ६ का 15 जना विद्यार्थीहरूको उमेर 11, 13, 12, 11, 13, 12, 10, 14, 10, 11, 12, 14, 11, 14, 15 छ भने यस्तो अवस्थामा आँकडालाई निम्नअनुसार वर्गीकरण गर्न सकिन्छ :

उमेर	10	11	12	13	14	15
विद्यार्थी सङ्ख्या	2	3	4	2	3	1

कोरा प्राप्ताङ्क (Raw Score)

विदयार्थीको उत्तरपुस्तिका परीक्षण गरी उनीहरूले पाएको अङ्क, जसलाई निश्चित स्वरूपमा नमिलाई जस्ताको तस्तै उल्लेख गरिएको हुन्छ, त्यस्तो तथ्याङ्क/प्राप्ताङ्क वा अङ्कलाई कोरा प्राप्ताङ्क (Raw Score) भनिन्छ । कोरा प्राप्ताङ्क अर्थपूर्ण नहुनुको साथै यसबाट विद्यार्थीको उपलब्धि स्तर छुट्याउन सकिँदैन ।

प्रशोधित प्राप्ताङ्क (Derived Score)

विद्यार्थीले प्राप्त गरेको कोरा अङ्कलाई निश्चित आधारमा मिलाई अर्थपूर्ण तथा विद्यार्थीको उपलब्धि स्तर छुट्याउन सकिने गरी तयार गरिएको तथ्याङ्कलाई प्रशोधित प्राप्ताङ्क (Derived Score) भनिन्छ ।

वर्गान्तर/अन्तराल (Class Interval)

आँकडाको निश्चित अन्तरमा हुने विस्तारलाई वर्गान्तर वा अन्तराल (Class Interval) भनिन्छ । यसले दिइएका दुई ओटा आँकडाहरू बिचमा कति कतिको सङ्ख्यामा अन्य आँकडाहरू पर्दछन् भन्ने जनाउँछ । उदाहरणको लागि वर्गान्तर ५-१० ले ५ र ५ भन्दा बढी र १० भन्दा सानो बीचमा पर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या कति हो भन्ने जनाउँछ । ५ लाई वर्गान्तरको तल्लो सिमा (Lower Limit) र १० लाई वर्गान्तरको माथिल्लो सिमा (Upper Limit) भनिन्छ । वर्गान्तरलाई छोटकरीमा C.I. वा i ले जनाइन्छ ।

आवृत्ति/बारम्बारता (Frequency)

कुनै पनि आँकडा, अङ्क वा सङ्ख्या दोहोरिने वा पटक पटक आउने गुणलाई आवृत्ति वा बारम्बारता (Frequency) भनिन्छ । उदाहरणको लागि १० जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क १०, १२, १४, १४, १०, ११, १०, १२, १३, १० मा १० ल्याउनेको सङ्ख्या कति छ वा १० कति पटक दोहोरिएको छ भन्नु नै १० प्राप्ताङ्कको आवृत्ति हो । यसलाई छोटकरीमा F वा f ले जनाइन्छ । यहाँ १० को आवृत्ति (f) = 4 छ ।

श्रेणी (Series)

कुनै पनि उस्तै प्रकृतिका आँकडाको व्यवस्थित क्रम वा एकपछि अर्को गर्दै आउने आँकडाहरूको स्वरूपलाई श्रेणी (Series) भनिन्छ । श्रेणीमा पर्ने आँकडाहरू एकआपसमा सम्बन्धित हुन्छन् । एउटै स्वरूप वा विशेषता भएका आँकडाहरूलाई मात्र एउटा श्रेणीमा व्यक्त गर्न सकिन्छ । श्रेणीलाई तथ्याङ्कशास्त्रमा व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी र अविछिन्न श्रेणी गरी ३ किसिमबाट व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)

कुनै पनि श्रेणीको आँकडाले व्यक्ति विशेषको जानकारीलाई मात्र प्रतिनिधित्व गर्दछ भने त्यस्तो श्रेणीलाई व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) भनिन्छ । उदाहरणको लागि कुनै कक्षाका १० जना विद्यार्थीले एउटा विषयमा प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई निम्नानुसार व्यक्तिगत श्रेणीमा व्यक्त गर्न सकिन्छ ।

25, 22, 20, 25, 22, 20, 22, 22, 20, 21

यस श्रेणीमा प्रत्येक आँकडाले एक एक जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कलाई जनाउँछ ।

खण्डित श्रेणी (Discrete Series)

कुनै पनि व्यक्ति विशेषको प्राप्ताङ्क वा जानकारीलाई छुट्टाछुट्टै रूपमा नदिई एउटै प्राप्ताङ्क भएका विद्यार्थीलाई आवृत्तिमा छुट्याई व्यक्त गरिने श्रेणीलाई खण्डित श्रेणी (Discrete Series) भनिन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा कुनै पनि व्यक्ति, विषय, घटना आदिका गुणहरू वा विशेषताहरूलाई खण्डित गर्न सकिदैन, त्यो गुण वा विशेषता पूर्ण सङ्ख्यामा आउँछ भने त्यस्तो श्रेणीलाई खण्डित श्रेणी भनिन्छ । जस्तै मानिस, घर, कोठाको सङ्ख्या आदि तथ्याङ्कको रूपमा लिनु छ भने यिनीहरूलाई दसमलवमा लिन सकिन्न । यस्ता सङ्ख्यालाई पूर्ण सङ्ख्यामा लेखी खण्डित श्रेणीमा राखी बारम्बारता देखाउनु पर्दछ । उदाहरणको लागि माथि १० जना विद्यार्थीले प्राप्त गरेको अङ्कलाई खण्डित श्रेणीमा निम्न अनुसार लेख्न सकिन्छ :

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)
20	3
21	1
22	4
25	2

अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series)

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो अविच्छिन्न वर्गान्तरमा व्यक्त गरिने श्रेणीलाई अविच्छिन्न श्रेणी (Continuous Series) भनिन्छ । यस तथ्याङ्कलाई विभिन्न वर्गान्तरमा बाँडी उक्त वर्गान्तरमा पर्ने विद्यार्थीको सङ्ख्या (आवृत्ति) समेत उल्लेख गरिएको हुन्छ । अर्को शब्दमा भन्दा

कुनै पनि विषय वा घटनाका तथ्याङ्कहरूलाई साना साना भाग वा अंशमा टुक्रा गर्न सकिने तथ्याङ्कलाई अविच्छिन्न श्रेणी तथ्याङ्क भनिन्छ ।

अविच्छिन्न श्रेणीमा तथ्याङ्कलाई सानो सानो एकाइमा पनि मापन गर्न सकिन्छ किनभने एउटा चलको गुण र अर्को चलको गुण बिचमा Gap नभइ निरन्तर हुन्छ ।

सामान्यतया तथ्याङ्कशास्त्रले चार ओटा कुराहरूमा जोड दिएको हुन्छ :

१. तथ्याङ्क सङ्कलन (Data Collection):

तथ्याङ्कशास्त्र अध्ययनको पहिलो कार्य आँकडाहरू सङ्कलन गर्नु हो । अध्ययन तथा अनुसन्धानको क्रममा सङ्कलन गरिएका तथ्य, प्रमाण, जानकारी वा सूचनाहरूलाई तथ्याङ्क/आँकडा (Data) भनिन्छ । अध्ययन वा अनुसन्धानलाई उद्देश्यमूलक बनाउनका लागि यस्ता सूचनाहरू, मान, तथ्याङ्क वा तथ्यहरू प्रयोग गरिन्छ । अध्ययन वा अनुसन्धान पूरा गर्न आवश्यक कच्चा पदार्थलाई नै तथ्याङ्क भन्न सकिन्छ । जसरी एउटा घर बनाउन इँटा, सिमेन्ट, छड चाहिन्छ त्यसरी नै अनुसन्धानका लागि तथ्याङ्कहरूको आवश्यकता पर्दछ । तथ्याङ्कहरू सङ्ख्यात्मक र गुणात्मक गरी दुई प्रकारका हुन्छन् ।

शैक्षिक अनुसन्धानमा सङ्ख्यात्मक तथ्याङ्कलाई बढी प्रयोग हुन्छ । गुणात्मक तथ्याङ्कलाई पनि उपयुक्त विधि तथा नियमको प्रयोग गरी सङ्ख्यात्मक रूपमा परिवर्तन गर्न सकिन्छ । तसर्थ तथ्याङ्कलाई सङ्ख्यात्मक रूपमा व्यक्त गर्न सकिने विषयवस्तुको रूपमा पनि लिइन्छ । तथ्याङ्क विना अनुसन्धान पूरा गर्न सकिँदैन । अनुसन्धानकर्ताले तथ्याङ्ककै माध्यमद्वारा उद्देश्य वा गन्तव्यतर्फ उन्मूख हुने भएकोले तथ्याङ्कलाई अनुसन्धानको मेरुदण्डको रूपमा लिइन्छ । अध्ययन तथा अनुसन्धानमा प्रयोग हुने तथ्याङ्कहरू दुई किसिमबाट प्राप्त गर्न सकिन्छ, जुन निम्न छन् ।

प्राथमिक तथ्याङ्क (Primary Data):

अनुसन्धानकर्ताले सम्बन्धित क्षेत्रमा आफै गएर वा गणकहरू पठाएर पहिलो पटक सङ्कलन गरिने तथ्याङ्कहरूलाई प्राथमिक तथ्याङ्क भन्दछन् । यस्ता तथ्याङ्कहरूलाई मौलिक तथ्याङ्कहरू पनि भन्न सकिन्छ । प्रश्नावली, अवलोकन, अन्तरवार्ता, परीक्षण आदि माध्यमबाट प्राथमिक तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गर्न सकिन्छ । अनुसन्धान नयाँ कुराको खोजी भएकोले प्राथमिक तथ्याङ्कलाई अनुसन्धानको महत्त्वपूर्ण साधन मानिन्छ । प्राथमिक तथ्याङ्कहरू पहिलो पटक अनुसन्धानकर्ताद्वारा सङ्कलन गरिने भएकोले प्राप्त गर्न र गणना गर्न कठिन हुने भए पनि वास्तविक र यथार्थ सूचनाहरू पाउन सकिन्छ । प्राथमिक तथ्याङ्कका केही उदाहरणहरू निम्नअनुसार प्रस्तुत गरिएका छन् ।

१. कक्षा सातमा अध्ययनरत 30 जना विद्यार्थीहरूले गणितको परीक्षामा पाएको प्राप्ताङ्क यस प्रकार छन् ।

45, 33, 76, 80, 52, 48, 35, 88, 97, 65, 76, 40, 81, 60, 33,

54, 75, 45, 77, 37, 24, 54, 65, 90, 25, 65, 65, 44, 67, 89

२. कक्षा पाँचमा अध्ययनरत 20 जना विद्यार्थीहरूको तौल (K.G.मा) यस प्रकार छन् ।

24, 33, 42, 30, 32, 34, 43, 35, 30, 45, 34, 34, 41, 40, 43, 34, 35, 31, 36, 32,

३. एउटा गाउँका 60 परिवारका केटाकेटीहरूको विवरण यस प्रकार छन् ।

1, 5, 3, 3, 0, 4, 2, 0, 5, 2, 4, 2, 3, 5, 1, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 0, 4, 1, 3, 1, 2, 0, 3, 3, 5, 4, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 5, 4, 3, 2, 2, 0, 2, 1, 3, 1, 1, 5, 4, 4, 2, 1, 2, 1

द्वितीयक तथ्याङ्क (Secondary Data):

समय, प्राप्त साधन र आर्थिक सीमितताले अनुसन्धानकर्तालाई सबै अवस्थामा आफैले मौलिक तथ्याङ्कहरू सङ्कलन गर्न कठिनाई पर्न सक्छ । यस्ता अवस्थामा अनुसन्धानकर्ताले अरूबाट सङ्कलन गरिएका तथ्याङ्कहरूलाई पनि प्रयोगमा ल्याउनुपर्ने हुन्छ । यस्ता तथ्याङ्कहरूलाई द्वितीयक तथ्याङ्क भन्दछन् । कुनै एउटा उद्देश्यले सङ्कलन गरिएका तथ्याङ्कहरू पछिल्ला अनुसन्धानकर्ताहरूका लागि द्वितीयक हुने गर्दछन् । विभिन्न व्यक्ति, सरकारी तथा गैह्र सरकारी सङ्घ संस्थाले तयार पारेका अनुसन्धान प्रतिवेदन आदि अनुसन्धान कार्यका लागि प्रयोग गर्न सकिन्छ । यस्तो तथ्याङ्क नै द्वितीयक तथ्याङ्क हो ।

प्राथमिक र द्वितीयक तथ्याङ्कमा फरक केवल प्रयोगकर्ताको स्थानमा मात्र हुन्छ । कुनै अनुसन्धानकर्ताले सङ्कलन गरेका तथ्याङ्क उसका लागि प्राथमिक भए तिनै तथ्याङ्कहरू अर्को व्यक्तिले उपयोग गर्दा द्वितीयक हुन जान्छ । जस्तै शिक्षा मन्त्रालयले शिक्षा सम्बन्धी सङ्कलन गरेका तथ्याङ्कहरू उसका लागि प्राथमिक हुन्छन् भने अन्य उपयोगकर्ताका निम्ति यिनीहरू द्वितीयक बन्न जान्छन् । त्यस्तै गरी कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूको ज्यामितीय क्षमताको अध्ययन गर्नु पर्दा कक्षामा शिक्षक आफैँले प्रश्नपत्र निर्माण गरी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्क प्राथमिक स्तरको हुन्छ भने विषय शिक्षकले लिएको परीक्षाको प्राप्ताङ्कलाई प्रयोग गरियो भने यो द्वितीयक स्तरको तथ्याङ्क हुन्छ ।

२. तथ्याङ्कको सङ्गठन तथा प्रस्तुतीकरण

प्राथमिक चरणमा सङ्कलित कोरा तथ्याङ्कबाट अध्ययनको लागि उपयोग गर्न, व्याख्या, विश्लेषण तथा तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्न कठिन हुन्छ । तसर्थ तथ्याङ्कशास्त्रमा तथ्याङ्क सङ्कलन गरेपछि दोस्रो चरणमा तथ्याङ्कको सङ्गठन गर्ने तथा प्रस्तुति गर्ने गरिन्छ । सङ्गठित तथ्याङ्कहरूले जानकारीलाई सहजै बुझ्न र सामान्य निष्कर्षमा पुग्न मदत पुर्‍याउने खालका हुन्छन् । तथ्याङ्कलाई संगठित गर्दा प्रारम्भमा सानोदेखि ठुलो क्रममा मिलाएर लेखिन्छ । माथिको उदाहरणमा 60 परिवारका केटाकेटीहरूको विवरणलाई सानो देखि ठुलोको क्रममा तिपसिलअनुसार मिलाए राख्न सकिन्छ ।

0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5

यसरी तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठुलोको क्रममा मिलाएर प्रस्तुत गरेपछि यसलाई सङ्ख्या जनाउने सङ्केत (Variable) को लहरमा सङ्ख्याहरू र ती सङ्ख्याहरूको बारम्बारता (frequency) अर्को लहरमा राखी तालिका बनाई तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । माथिको कोरा तथ्याङ्कलाई तालिकामा निम्न अनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

केटाकेटी (x)	परिवार सङ्ख्या (Tally marks मा)	बारम्बारता (f)
0	𝍸 |	6
1	𝍸 𝍸 |||	13
2	𝍸 𝍸 𝍸	15
3	𝍸 𝍸 |	11
4	𝍸 ||||	9
5	𝍸 |	6
	जम्मा	60

तथ्याङ्कको लेखाचित्रमा प्रस्तुतीकरण (Graphical Presentation of Data) :

तथ्याङ्कलाई तालिकामा प्रस्तुत गर्दा सबै मानिसले यसलाई सहजै नबुझ्ने हुन सक्छन् । तसर्थ एकै झलकमा सबैले सहजै बुझ्ने गरी चित्र वा लेखाचित्रमा तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गर्दा जानकारीहरू प्राप्त गर्न र सामान्यीकरण गर्न सजिलो हुन्छ । तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा तथ्याङ्कको प्रकृति अनुसार फरक फरक तरिका वा उपायहरू अपनाउन सकिन्छ । विद्यार्थीले तथ्याङ्कलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा एउटै तथ्याङ्कलाई वैकल्पिक तरिकाले व्यक्त गर्दा सिकाइ स्थायी हुनुका साथै एक प्रकारको आत्म सन्तुष्टिको प्रत्याभूति पनि हुन सक्दछ । सामान्य तरिकाले भन्दा लेखाचित्रमा तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गर्नु अर्को एउटा सिपको पक्ष पनि हो । तथ्याङ्कलाई तालिका बनाइसकेपछि तलका मध्ये कुनै पनि लेखाचित्रद्वारा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । तापनि तथ्याङ्कको प्रकृति तथा अध्ययन, अनुसन्धानको उद्देश्यअनुसार उपयुक्त लेखाचित्र छानेर प्रस्तुत गर्नु उचित हुन्छ । तथ्याङ्कहरू पढ्न तथा अध्ययन योग्य बनाउन यिनीहरूलाई तालिका, आवृत्ति वितरण, ग्राफ, चित्र आदिमा प्रस्तुत गर्नु पर्दछ । सामान्यतया तथ्याङ्कलाई निम्न तरिकाद्वारा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

- चित्र लेखाचित्र (Pictograph)
- वृत्त लेखाचित्र (Pie Diagram)
- हिस्टोग्राम (Histogram)
- स्तम्भ रेखाचित्र (Bargraph)
- रेखाचित्र (Line Graph)
- सञ्चित बारम्बारता बक्र (Cumulative frequency curve or ogive)

चित्र लेखाचित्र (Pictograph):

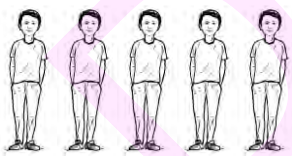
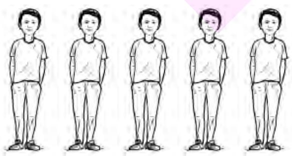
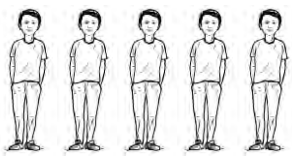
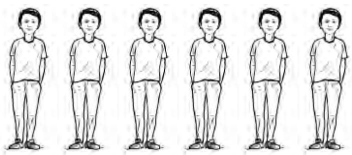
चित्रद्वारा व्यक्त गरिएका सन्देशहरू जीवन्त, वस्तुगत हुन्छन् र बुझ्न, धारणा बनाउन वा सामान्यीकरण गर्न सरल हुन्छन् । बारम्बारता तालिकामा व्यक्त तथ्याङ्कलाई जीवन्त बनाएर प्रस्तुत गर्नु पऱ्यो भने चित्रद्वारा व्यक्त गर्ने तरिकालाई चित्रात्मक लेखाचित्र वा चित्रग्राम भनिन्छ ।

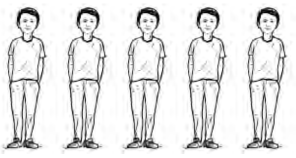
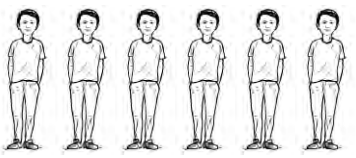
प्राप्त तथ्याङ्कलाई अर्थपूर्ण र सजिलोसँग देखाउन सकिने भएकाले चित्र लेखाचित्र पर्याप्त मात्रमा प्रयोग भएको पाइन्छ । यसमा जुनकुरा प्रस्तुत गर्न खोजिएको हो, त्यसलाई सोही वस्तुको चित्रले जनाइन्छ ।

उदाहरणका लागि तल तालिकामा एउटा विद्यालयका (२०६५-२०७० सम्म) विद्यार्थीहरूको विवरणलाई देखाइएको छ ।

वर्ष / विद्यार्थी सङ्ख्या	२०६५	२०६६	२०६७	२०६८	२०६९	२०७०	जम्मा
छात्र	250	300	300	350	300	350	1850
छात्रा	300	300	200	400	350	450	2000
जम्मा	550	600	500	750	650	800	3850

अध्ययनको हिसावले यो तालिका नै जानकारीका लागि पर्याप्त छ । तर यसलाई चित्रद्वारा व्यक्त गरियो भने यो धेरैले बुझ्न सक्ने र आकर्षक पनि हुन्छ । यही मान्यतामा चित्रात्मक लेखाचित्र बनाई तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गरिन्छ । माथि दिइएको तथ्याङ्कलाई चित्र लेखाचित्रमा निम्न अनुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

समय (वर्ष)	**विद्यार्थी सङ्ख्या**	
	छात्र	**छात्रा**
२०६५		
२०६६		
२०६७		
२०६८		

२०६९		
२०७०		

चित्र लेखाचित्रलाई शुद्ध रूपमा व्यक्त गर्न कठिन भए पनि यो एउटा कलात्मक औसत अभिव्यक्ति हो । शिक्षणका वैकल्पिक तरिकाहरू मध्ये यसलाई प्रयोग गर्न सकिन्छ । केही शैक्षिक तथा व्यावसायिक पत्रपत्रिकाका विज्ञापनका टुक्रा बनाएर कक्षाकोठामा प्रदर्सन गरी विद्यार्थीको रुचि बढाउन सकिन्छ ।

वृत्तचित्र (Pie Chart)

कुनै एउटा विषय वा क्षेत्रसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई एउटा वृत्तको विभिन्न हिस्साहरूमा देखाईएको चित्रलाई वृत्त ग्राफ वा वृत्तचित्र (Pie Chart) भनिन्छ । वृत्तचित्रमा तथ्याङ्कको जम्मा बारम्बारतालाई वृत्तको केन्द्रमा 360^0 को कोण बनाइन्छ । दिइएको सम्पूर्ण बारम्बारतालाई डिग्रीमा बदली सकेपछि प्रोट्याक्टरको सहायताले वृत्तखण्डमा छुट्याइन्छ । वृत्तचित्रमा तथ्याङ्कहरूलाई प्रतिशतमा पनि देखाउन सकिन्छ । वृत्त चित्रलाई अझ सरल किसिमले बनाउनका लागि तथ्याङ्कलाई प्रतिशतमा प्रस्तुत गर्नुपर्दछ । दुई वा दुई भन्दा बढी तथ्याङ्कको तुलना गर्न यसलाई प्रतिशतमा देखाइन्छ । यसका लागि पूरा वृत्तलाई १००% = ३६०° वा १% = ३.६° गरी निकाल्न सकिन्छ । वृत्तचित्र निर्माण गर्दा निम्न प्रक्रियाहरू अपनाइन्छ

- दिइएका सम्पूर्ण बारम्बारता जोडेर योगफल निकाल्ने
- दिइएका बारम्बारताको प्रत्येक एकाइलाई डिग्रीमा बदल्न जोडफलले भाग गरी 360^0 ले गुणन गर्ने
- वृत्तमा अर्धव्यास रेखा खिची क्रमशः प्रोट्याक्टरको सहायताले तोकिएको नाप बराबर चिह्न लगाइ जोड्ने
- वृत्तमा तथ्याङ्कको विभिन्न समूहलाई देखाउन रङ भर्ने वा छाँया पार्ने
- रङ भरेको वा छाया पारेको जानकारी सङ्केतमा देखाउने

माथिको तालिकामा दिइएको तथ्याङ्कलाई वृत्त लेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ ।

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = $550 + 600 + 500 + 750 + 650 + 800 = 3850$ जना

त्यसैले, 3850 विद्यार्थी = 3600

1 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{360}{3850}\right)^0$

अब, २०६५ को 550 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{550}{3850} \times 360\right) 0 = 51.40$

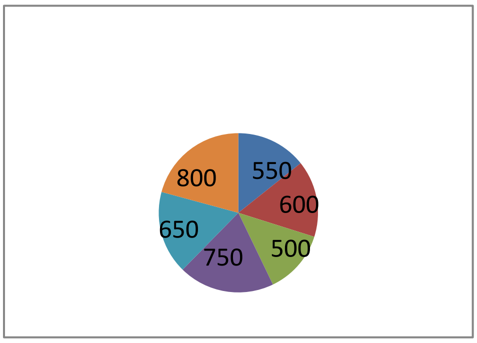
२०६६ को 600 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{600}{3850} \times 360\right) 0 = 56.10$

२०६७ को 500 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{500}{3850} \times 360\right) 0 = 46.80$

२०६८ को 750 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{750}{3850} \times 360\right) 0 = 70.10$

२०६९ को 650 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{650}{3850} \times 360\right) 0 = 60.80$

२०७० को 800 जना विद्यार्थी $= \left(\frac{800}{3850} \times 360\right)^0 = 74.8^0$



अब, यो जानकारीका आधारमा वृत्तलाई Sectors मा बाँडेर तथ्याङ्कको प्रस्तुति गरिन्छ ।

यसप्रकार वृत्त चित्रको निर्माण गर्न सिकाईसकेपछि विद्यार्थीहरूलाई पनि शिक्षकले आ-आफ्नो घरमा हुने खर्चको विवरण, पृथ्वीमा भएको जमिन र पानीको भाग, एक दिनमा आफूले गरिने कामका लागि समयको बाँडफाँड, एउटा निर्वाचनमा उम्मेदवारहरूले पाएको मत सङ्ख्या आदि तथ्याङ्कहरूलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्न लगाउन सकिन्छ ।

स्तम्भ रेखाचित्र (Bargraph)

बारम्बारता तालिकामा प्रस्तुत तथ्याङ्कलाई स्तम्भ लेखाचित्र बनाएर प्रस्तुत गर्ने चलन सर्वाधिक रूपले लोकप्रिय छ । यसलाई एक आयामिक रेखाचित्र भनिन्छ । स्तम्भ रेखाचित्र सर्वसाधरणलाई बुझ्न सजिलो छ । साथै तुलनात्मक अध्ययन गर्न र दीर्घकालीन स्मरण गर्न सहयोग गर्दछ । यसमा विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क, विद्यार्थी सङ्ख्या वा अन्य तथ्याङ्कलाई छुट्टै स्तम्भको रूपमा व्यक्त गरिन्छ । स्तम्भ रेखाचित्रमा स्तम्भको उचाईका आधारमा ठूलो, सानो वा धेरै, थोरै छुट्याइन्छ भने यसको चौडाइको खासै महत्त्व हुँदैन । यसमा स्तम्भलाई आकर्षक र सुहाउँदो बनाउन आवश्यकताअनुसार चौडाइ लिने गरिन्छ । बराबर चौडाइ भएका स्तम्भको उचाइले बारम्बारता जनाई स्तम्भ लेखाचित्र बनाउन सकिन्छ ।

स्तम्भ रेखाचित्र निर्माण गर्दा ध्यान दिनुपर्ने कुराहरू

- **आकर्षक (Attractive) :** रेखाचित्र निर्माण गर्दा रुचिपूर्ण र आकर्षक हुने गरी बनाउनुपर्दछ । आकर्षक चित्रले मात्रै व्यक्तिको ध्यान आकर्षण गरी जानकारी प्रदान गर्दछ ।
- **शीर्षक (Title) :** रेखाचित्रले के देखाएको छ भन्ने कुरा स्पष्ट पार्न संक्षिप्त रूपमा उपयुक्त शीर्षक राख्नुपर्दछ । सामान्यतया शीर्षक रेखाचित्रको माथि राखिन्छ ।
- **आकार (Size) :** रेखाचित्रको आकार कागजको साईजमा भर पर्दछ । कागजको साइजअनुसार मिल्दो हुने गरी रेखाचित्र निर्माण गर्नुपर्दछ ।

- **उपकरण (Instruments) :** रेखाचित्र बनाउँदा ज्यामितीय उपकरणको सहयोग लिई बनाउनु पर्दछ । सकेसम्म सिसाकलमको प्रयोग गरी रेखाचित्र बनाउँदा उपयुक्त हुन्छ ।
- **सूचक (Index):** रेखाचित्रमा प्रयोग गरिएको रङ, चिहन् तथा छाया स्पष्ट हुने गरी रेखाचित्रको एउटा कुनामा सूचकको प्रयोग गर्नुपर्दछ ।
- **उचाइ र चौडाइ (Height and Breadth) :** रेखाचित्रको उचाइ र चौडाइबिचको अनुपात उपयुक्त हुनुपर्दछ । हेर्दा आकर्षक हुने गरी उचाइ र चौडाइ मिलाउनुपर्दछ ।
- **अक्ष र नापको एकाइ (Axes and Scale):** रेखाचित्र निर्माण गर्ने तथ्याङ्क र उपलब्ध कागजलाई विचार गरी दुवै अक्षको नापको एकाइ निश्चित गरी आँकडा मिलाएर राख्नुपर्दछ । अक्षमा नाप लिँदा सधैँ बराबर हुने गरी लिनुपर्दछ ।
- **सफासुग्घर (Neat and Clean):** रेखाचित्र सधैँ सफा र सुन्दर बनाउनुपर्दछ ।

स्तम्भ रेखाचित्रलाई मुख्यतया ३ भागमा बाँडेर हेर्न सकिन्छ ।

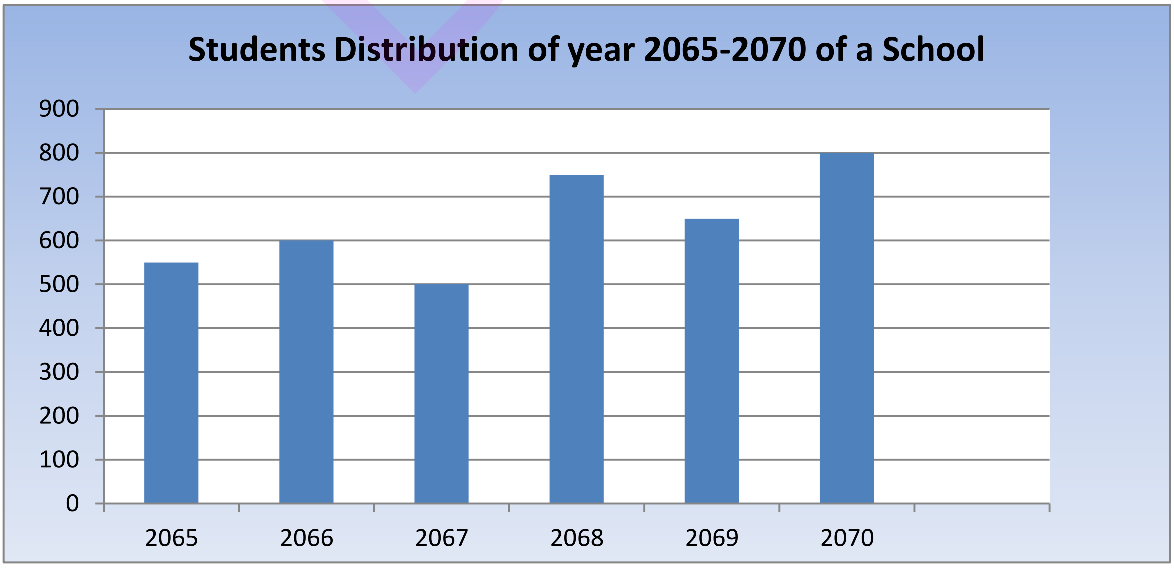
१. साधारण स्तम्भ रेखाचित्र (Simple Bar Diagram)

२. खण्डे स्तम्भ रेखाचित्र (Subdivided Bar Diagram)

३. बहुस्तम्भ रेखाचित्र (Multiple Bar Diagram)

१. साधारण स्तम्भ रेखाचित्र (Simple Bar Diagram) यस किसिमको रेखाचित्र सामान्यतया अक्षतिर फैलिएको हुन्छ । यसमा स्तम्भलाई छुट्टाछुट्टै रूपमा राखिएको हुन्छ । माथिको उदाहरणमा दिइएको विद्यार्थीहरूको विवरणलाई साधारण स्तम्भ रेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ ।

:

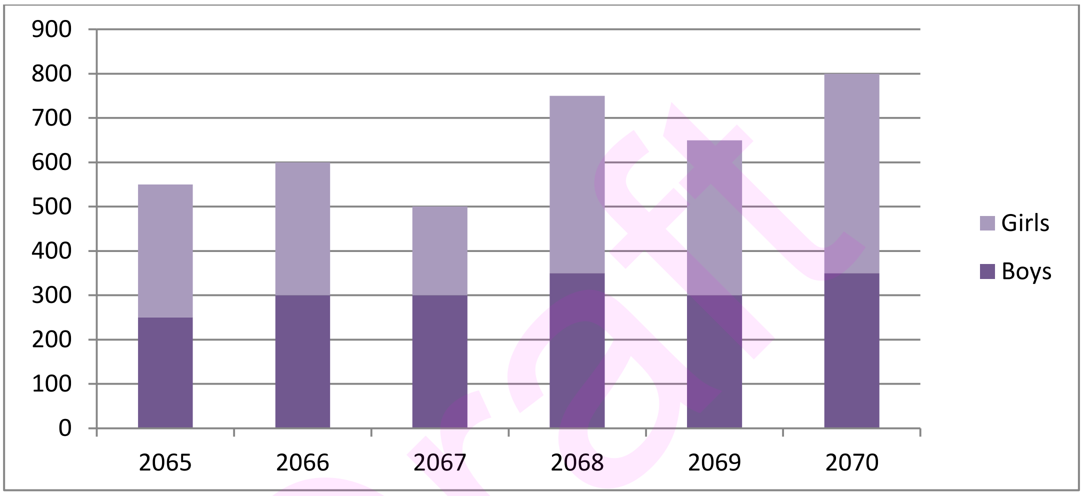


२. खण्डे स्तम्भ रेखाचित्र (Subdivided Bar Diagram)

एउटा चरका मानलाई स्तम्भको विभिन्न खण्डमा देखाइने रेखाचित्रलाई खण्डे स्तम्भ रेखाचित्र (Subdivided Bar Diagram) भनिन्छ । यसमा पनि सरल रेखाचित्रमा झै स्तम्भलाई छुट्टाछुट्टै राखिएको हुन्छ । यसको निर्माण गर्न निम्न कार्य गरिन्छ :

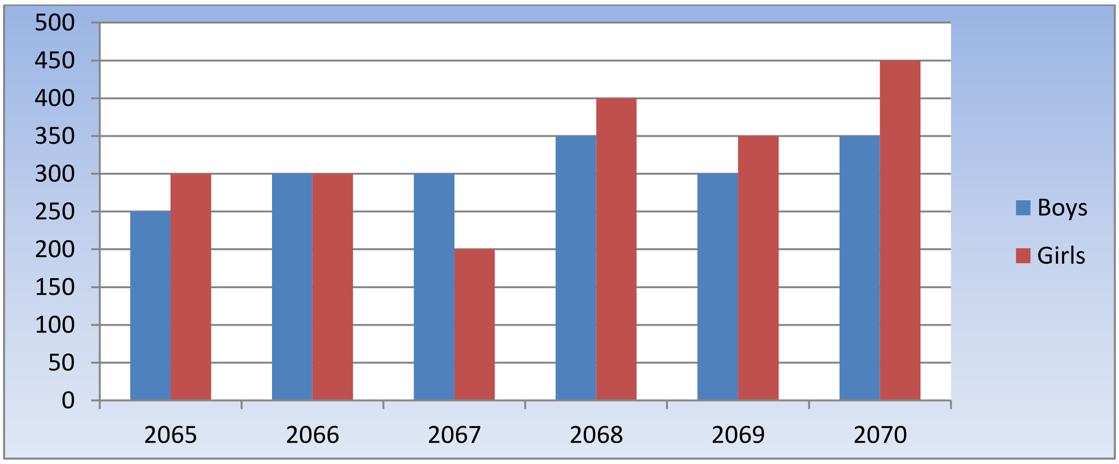
- चरका प्रत्येक कुल मानबाट छुट्टाछुट्टै स्तम्भ निर्माण गर्ने
- प्रत्येक स्तम्भलाई चरका विभाजित मानअनुसार खण्डमा निर्माण गर्ने
- स्तम्भका विभिन्न खण्डलाई स्पष्ट देखाउन रङ वा छाया पारी देखाउने

माथिको उदाहरणमा दिइएको विद्यार्थीहरूको विवरणलाई खण्डे स्तम्भ चित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ ।



३. बहुस्तम्भ रेखाचित्र (Multiple Bar Diagram)

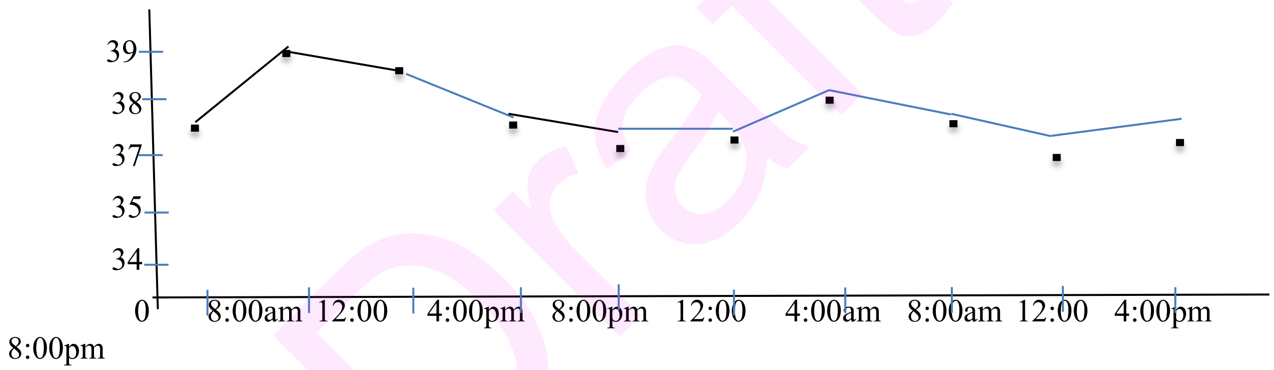
दुई वा दुईभन्दा बढी चरहरूलाई छुट्याई रेखाचित्रमा देखाउन बहुस्तम्भ रेखाचित्रको प्रयोग गरिन्छ । दुई वा सोभन्दा बढी परस्पर सम्बन्धित चरहरूको तुलनात्मक अध्ययन गर्न बहुस्तम्भ रेखाचित्रको प्रयोग गरिन्छ । यसमा साधारण स्तम्भ रेखाचित्रमा झैँ विभिन्न चरहरूको स्तम्भ निर्माण गरिन्छ तर एउटै प्रकृतिका चरहरू एकै ठाउँमा जोडेर लेखिन्छ । माथिको उदाहरणमा दिइएको विद्यार्थीहरूको विवरणलाई बहुस्तम्भ रेखाचित्रमा निम्नअनुसार देखाउन सकिन्छ ।



रेखाचित्र (Line Graph)

सबै खालका तथ्याङ्कलाई एउटै खाले लेखाचित्रमा व्यक्त गर्नु उपयुक्त हुँदैन । तथ्याङ्कहरूको प्रकृति अनुसार कुन खालको लेखाचित्र उपयुक्त हुन्छ भन्ने कुरा निर्धारण गरिन्छ । कतिपय तथ्याङ्कलाई अन्य लेखाचित्रबाट भन्दा रेखाचित्र (Line Graph) बाट व्यक्त गर्दा बढी प्रभावकारी हुन्छ । तापक्रम, वर्षा, गति आदिसँग सम्बन्धित तथ्याङ्कहरूलाई चित्रद्वारा वा वृत्त चित्रद्वारा प्रस्तुत गर्नु त्यति उपयुक्त हुँदैन । यस्ता तथ्याङ्कलाई रेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्दा बढी अर्थपूर्ण र सूचनादायक हुन्छ । उदाहरणका लागि एक जना बिरामीको विहान ८ बजेदेखि बेलुकी ८ बजेसम्मको जम्मा २ दिनको तापक्रमको विवरण रेखा चित्रमा दिइएको छ ।

समय	8:00am	12:00	4:00pm	8:00pm	12:00	4:am	8:am	12:00	4:00pm	8:00pm
तापक्रम	37.5^{0}C	39^{0}C	38.5^{0}C	37.5^{0}C	37.1^{0} C	37.2^{0} C	38^{0} C	37.5^{0} C	37^{0}C	37.3^{0}C



यस्तो रेखाचित्र शिक्षण गर्ने समयमा विद्यार्थीहरूको तर्क शक्ति र विश्लेषणात्मक क्षमताको विकास गर्न विद्यार्थीहरूबिच छलफल र अन्तरक्रिया गर्न सकिन्छ । विद्यार्थीहरूलाई माथिको रेखाचित्रको सहयोगबाट निम्न लिखित प्रश्नहरूमा छलफल गराउन सकिन्छ ।

- तापक्रम कति समयको फरकमा नापिन्छ ?
- सबभन्दा धरै र सबैभन्दा कम तापक्रम भएको समय कुन कुन हो ?
- दोस्रो दिनको ८ बजे विहानको तापक्रम कति रहेछ ?
- के तापक्रममा सुधार आएको छ ?

यस्ता प्रश्नहरूमा छलफल गराएपछि विद्यार्थीहरूमा रेखाचित्र पढ्ने सिपको विकास हुनुका साथै यस्तो चित्रको महत्त्व र प्रयोगलाई समेत बुझि अर्थपूर्ण र विश्लेषणात्मक क्षमता समेत अभिवृद्धि गराउन सकिन्छ । रेखाचित्र सम्बन्धी स्पष्ट भइसकेपछि सिकाइलाई दिगो बनाउन थप अभ्यासका लागि आफ्नो विद्यालय रहेको स्थानको तापक्रम, वर्षको औषत वर्षा, हावाको गति,

गाउँका शिशुहरूको वार्षिक जन्मदर, हप्ताभरि विद्यालय पुग्न लागेको समय आदि तथ्याङ्कलाई रेखाचित्र बनाई व्यक्त गर्न लगाउन सकिन्छ, जसले गर्दा विद्यार्थीहरूले व्यवहारिक रूपमा रेखाचित्रलाई बुझी आफ्ना क्रियाकलापलाई पनि रेखाचित्रमा व्यक्त गर्न सक्दछन् ।

नोट : हिस्टोग्राम (Histogram) र सञ्चित बारम्बारता बक्र (Cumulative frequency curve or ogive) सम्बन्धी विषयवस्तु माथिल्लो कक्षामा अध्यापन गरिन्छ

३. तथ्याङ्क विश्लेषण (Analysis of Data) :

सङ्कलित आँकडाहरूलाई व्यवस्थित रूपमा प्रस्तुत गरिसकेपछि यसको अध्ययन र विश्लेषण गर्नु पर्दछ । तथ्याङ्कलाई प्रस्तुत गरिएको लेखाचित्रबाट तथ्याङ्कको आचरणबारे मोटामोटी ज्ञान प्राप्त हुन्छ तर त्यसबाट कुनै ठोस कुरा पत्ता लगाउन र निष्कर्षमा पुग्न सकिँदैन । तसर्थ, तथ्याङ्कको विश्लेषण गरी ठोस निष्कर्ष निकाल्न र यसलाई प्रयोग गर्नका लागि तथ्याङ्कका साधनहरू (Statistical Tools) प्रयोग गर्नुपर्दछ । तथ्याङ्क विश्लेषणका लागि निम्न साधनहरू प्रचलनमा छन् :

(क) केन्द्रीय मान (मध्यक, मध्यिका, रीत)

(ख) विचरशीलताको मापन (विस्तार, चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता, स्तरीय भिन्नता) आदि ।

केन्द्रीय प्रवृत्तिको नाप (Measures of Central Tendency)

तथ्याङ्कशास्त्रको शिक्षणको प्रारम्भिक चरणमा तथ्याङ्कलाई सङ्गठित गर्ने, तालिका बनाउने तथा लेखाचित्रको माध्यमबाट प्रस्तुत गर्नुको उद्देश्य तुलना गर्न सहयोग पुऱ्याउनु हो । तर एक समूहको तथ्याङ्कलाई उस्तै विशेषता भएको अर्को समूहसँग तुलना गर्नुपर्दा तालिका वा लेखाचित्रमा गरिएको प्रस्तुतिकरण सँधै त्यतिकै उपयोगी हुँदैनन् । उदाहरणका लागि एक जना शिक्षकले दुई ओटा फरक फरक विधिले उस्तै क्षमता भएका दुई समूहका विद्यार्थीहरूलाई शिक्षण गरेपछि विद्यार्थीले प्राप्त गरेको उपलब्धिलाई तलको तालिकामा प्रस्तुत गरिएको छ ।

विद्यार्थीहरूको रोल नं.		१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
समूह A (विधि I)	प्राप्ताङ्क	65	53	71	49	73	85	95	63	78	98
समूह B (विधि II)	प्राप्ताङ्क	54	61	95	93	75	76	86	69	79	89

यो प्राप्ताङ्कको आधारमा शिक्षकले कुन विधि राम्रो भयो ? कसरी छान्न सक्नु हुन्छ हेला ? समूह A का रोल नं. ६, ७ र १० का विद्यार्थीले राम्रो नतिजा ल्याएका छन् भने समूह B का रोल नं. ३, ५ र १० का विद्यार्थीले धेरै राम्रो गरेका छन् । यस्तो अवस्थामा प्रत्येक समूहको प्रतिनिधित्व गर्ने एउटै अङ्क भएमा तुलना गर्न सजिलो पर्दछ । यसको लागि दुवै समूहको औसत अङ्क प्रयोग गर्न सकिन्छ । यहाँ समूह A को औषत अङ्क 73 र समूह B को औषत अङ्क 78 छ । समूह A को औसत अङ्क भन्दा समूह B को औषत अङ्क बढी भएकोले विधि II लाई राम्रो मान्न सकिन्छ । सामान्यतया औसत अङ्क तथ्याङ्कलाई क्रम मिलार राख्दा न्यूनतम र अधिकतम मानहरूको बीचमा पर्दछ । त्यसैले तथ्याङ्कको तुलनामा औसतलाई प्रयोग गर्नु नै केन्द्रीय प्रवृत्तिको नाप गर्नु हो । यसरी विभिन्न किसिमका तथ्याङ्कहरूको बिचमा पर्ने केन्द्रीय मान वा औसत अङ्क गणना

गर्ने कार्यलाई केन्द्रीय प्रवृत्तिको नाप (Measures of Central Tendency) भनिन्छ । सामान्यतया बढी प्रचलनमा आउने केन्द्रिय प्रवृत्तिका नापहरू निम्न छन् ।

- अङ्कगणितीय मध्यक (Arithmetic Mean)
- मध्यिका (Median)
- रीत (Mode)

अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean):

केन्द्रीय प्रवृत्तिका नाप मध्ये मध्यकलाई सबैभन्दा सरल र बढी प्रचलित मानिन्छ । दिइएका तथ्याङ्क वा प्राप्ताङ्कहरूको औसत अङ्कलाई मध्यक भनिन्छ । यसलाई गणना गर्न दिइएका तथ्याङ्क वा प्राप्ताङ्कको योगफललाई सङ्ख्याले भाग गरी निर्धारण गरिन्छ । विद्यालय तहमा विद्यार्थीहरूले विभिन्न विषयमा प्राप्त गरेको अङ्कको औसत निकाली अन्य विद्यार्थीले पाएको अङ्कको समेत प्रतिनिधित्व गर्ने सङ्ख्या वा मध्यक निकाली परीक्षाको व्याख्या, विश्लेषण तथा आवश्यकताअनुसार शिक्षण कार्यमा सुधार गर्न सकिन्छ । मध्यकको गणनाले अन्य तथ्याङ्कशास्त्रीय गणना कार्य जस्तैः स्तरीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता, सह-सम्बन्ध आदि गणना गर्न पनि सहयोग गर्दछ ।

मध्यकका विशेषताहरू (Characteristics of Mean)

१. मध्यक बुझ्न र गणना गर्न सजिलो हुन्छ ।

२. मध्यकको मान श्रेणीका सबै पदहरूमा आधारित हुने भएकाले तथ्याङ्कको राम्रो प्रतिनिधित्व गर्दछ ।

३. खुला वर्गान्तर भएको श्रेणीमा मध्यकको मान ठिक निस्कँदैन ।

४. श्रेणीमा एउटा पदको मान अज्ञात भएमा मध्यक पत्ता लगाउन सकिँदैन ।

५. तथ्याङ्कहरू असमानुपातिक रूपमा छरिएको अवस्थामा मध्यकले तथ्याङ्कको प्रतिनिधित्व गर्दैन ।

६. मध्यक कहिले पनि अनिश्चित हुँदैन ।

७. लेखाचित्रको माध्यमबाट मध्यक पत्ता लगाउन सकिँदैन ।

८. मध्यकलाई तथ्याङ्कशास्त्रका अन्य विधिहरूमा उपयोग गर्न सकिन्छ ।

विद्यार्थीहरूलाई अङ्कगणितीय मधयकको शिक्षण गर्दा सामान्य औसतको शिक्षणबाट सुरु गरी क्रमशः वर्गीकृत तथ्याङ्कको अङ्कगणितीय मध्यकतिर डोऱ्याउँदा शिक्षण सिकाइमा सरलता आउँछ । यसका लागि दुई जना विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको औसत, विद्यार्थीको उचाइको औसत, तौलको औसत जस्ता धेरै उदाहरणहरूमा अभ्यास गराएपछि मात्र सूत्रहरूको प्रयोग सिकाउनुपर्दछ । शिक्षकद्वारा मध्यक शिक्षण गर्दा निम्न शैक्षणिक क्रियाकलाप गर्न सकिन्छ :

मानौँ, १० जना विद्यार्थी भएको कक्षा ८ मा विद्यार्थीहरूलाई आआफ्नो पैतालाको लम्बाइ से.मी.मा नाप्न लगाउने र विद्यार्थीले दिएको नाप बोर्डमा लेख्दै जाने ।

15, 14, 13, 10, 17, 16, 14, 15, 13, 19

त्यसपछि निम्न प्रश्नहरूमा छलफल गर्ने:

- तिमीहरू सबैको खुट्टाको नापको प्रतिनिधित्व गर्ने एउटा सङ्ख्या के हुन सक्दछ ?
- सबैलाई प्रतिनिधित्व गर्ने त्यस्तो सङ्ख्या कसरी आउँछ होला ?

यस्तो सङ्ख्या औसत निकालेर मात्र आउँछ । अब सबै जना विद्यार्थीलाई औसत निकाल्न लगाउने ।

औसत (Average) = $\frac{15+14+13+10+17+16+14+15+13+19}{10}$

$= \frac{150}{10} = 15$ तसर्थ, औसत अङ्क = 15

यहाँ, सबै विद्यार्थीहरूको पैतालाको लम्बाइलाई प्रतिनिधित्व गर्ने अङ्क नै अङ्कगणितीय मध्यक वा औसत अङ्क हो । सबै विद्यार्थीहरूको पैतालाहरूको लम्बाइ जोडेर विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गरेपछि औसत वा मध्यक निस्कन्छ । मध्यकलाई $\bar{x}$ ले जनाइन्छ । यसलाई सूत्रको रूपमा व्यक्त गर्दा निम्न अनुसार लेख्न सकिन्छ :

मध्यक (Meam): $(\bar{x}) = \frac{X1+X2+X3+\cdots+Xn}{N}$,

$= \frac{\sum X}{N}$ जहाँ, $\sum X$ = प्राप्ताङ्कहरूको योगफल,

N = जम्मा अवलोकन सङ्ख्या वा पद सङ्ख्या

विद्यार्थीका पैतालाको लम्बाइको मध्यक निकाले जस्तै गरी विदयार्थीको उचाई, विद्यार्थीहरूको तौल, विद्यार्थीको प्राप्ताङ्क जस्ता तथ्याङ्कहरूको मध्यक निकाल्न धेरै अभ्यास गराएपछि मात्र सूत्रको प्रयोग सिकाउँदा शिक्षण सिकाई प्रभावकारी हुन्छ ।

शिक्षण सिकाइमा मध्यकको उपयोगिता वा प्रयोग (Uses or Implications of Mean in Teaching)

- विद्यार्थीले प्राप्त गरेको प्राप्ताङ्कलाई मध्यक वा औसतसँग तुलना गर्न
- प्राप्त मध्यक वा औषत अङ्कको आधारमा विद्यार्थीको स्तर पत्ता लगाई भावी शिक्षण योजना निर्माण गर्न
- मध्यक वा औसतभन्दा कम अङ्क ल्याउने विद्यार्थीको सिकाइ क्षमता बढाउनप
- मध्यक वा औसत अङ्कलाई हेरेर कार्यमूलक अनुसन्धान र निरन्तर मूल्याङ्कन गर्न

उदाहरण : एउटा विद्यार्थीको कुनै परीक्षाको प्राप्ताङ्कहरू 60, 69, 87, 93, 84, 75, 91, 80 **छन् । यसको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान : यहाँ, $\sum X = 60 + 69 + 87 + 93 + 84 + 75 + 91 + 80 = 640$, N = 8,

अब, मध्यक (Mean): $(\bar{x}) = \frac{\sum X}{N} = \frac{640}{8} = 80$, तसर्थ, मध्यक = 80 हुन्छ ।

दिइएको तथ्याङ्क वर्गीकृत (खण्डित) श्रेणी भएमा विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्क र विद्यार्थी सङ्ख्याको गुणनफल जोडेर आएको योगफललाई जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्याले भाग गरेमा अङ्कगणितीय मध्यक निकाल्न
सकिन्छ । यदि आँकडाहरू आवृत्ति वितरणमा दिइएका छन् अर्थात अवलोकनहरू X_1 को आवृत्ति f_1, X_2 को आवृत्ति f_2....र X_k को आवृत्ति f_k, छ भने

यसको मध्यक (Mean): $(\bar{x}) = \frac{f1X1+f2X2+\cdots+fkXk}{f1+f2+\cdots+fk} = \frac{\sum_{i=1}^{k} fiki}{\sum_{i=1}^{k} fi} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$

यदि x ले प्राप्ताङ्क/चलसङ्ख्या (Variables) लाई, N ले परिणाम सङ्ख्या (Number of Items) , f ले बारम्बारता (Frequency) लाई जनाउँछ भने

अब, मध्यक $(\bar{x}) = \frac{\sum fX}{N}$ हुन्छ ।

उदाहरण : एउटा विद्यालयको कक्षा ८ का विद्यार्थीहरूले अनिवार्य गणितको 50 पूर्णाङ्कमा लिइएको अर्धवार्षिक परीक्षामा प्राप्त गरेको अङ्कहरू निम्नअनुसार छ । त्यसको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

प्राप्ताङ्क (x)	**20**	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**
विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	**5**	**10**	**12**	**8**	**5**	**6**

यहाँ, दिइएको तथ्याङ्कको मध्यक निकाल्दा,

प्राप्ताङ्क (x)	विद्यार्थी सङ्ख्या (f)	f×x
20	5	100
25	10	250
30	12	360
35	8	280
40	5	200
45	6	270
	N = 46	$\sum fX$=1460

यहाँ, $\sum fX = 1460$ N =46

सूत्र अनुसार, मध्यक (Mean) : $(\bar{x}) = \frac{\sum fX}{N} = \frac{1460}{46} = 31.74$

तसर्थ, मध्यक = 31.74 हो ।

मध्यिका (Median)

मध्यिकाको शिक्षण गर्न शिक्षकले विद्यार्थीहरूको तौल भन्न लगाई बोर्डमा लेख्दै जाने । कक्षा ८ मा पढ्ने 11 जना विद्यार्थीको तौल (के.जी.मा) निम्नअनुसार छ :

35, 42, 36, 41, 45, 44, 35, 38, 43, 40, 37

प्राप्त तथ्याङ्कहरूलाई सानो देखि ठुलोको क्रममा मिलाउँदा,

35, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 44, 45

यहाँ, तथ्याङ्कको ठिक बिचमा परेको मान = 40, त्यसैले मध्यिका 40 हो ।

अर्को तरिका

माथिको तथ्याङ्कमा पदहरूको सङ्ख्या (N) = 11

मध्यिका स्थान पत्ता लगाउँदा, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद नै मध्यिका हुन्छ ।

त्यसैले यहाँ, मध्यिका = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$ औँ पद

= 6 औँ पदमा पर्ने मान 40 हो । तसर्थ मध्यिका 40 हो ।

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई सानोदेखि ठुलो वा ठुलोदेखि सानोको क्रम मिलाएर राख्दा बिचमा पर्ने पद नै मध्यिका हो । अर्को शब्दमा भन्दा मध्यिका तथ्याङ्कको केन्द्रीय मान हो , जसले तथ्याङ्कलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ । यसरी मध्यिकाभन्दा तल र माथि बराबर तथ्याङ्कहरू रहेका हुन्छन् । यदि अवलोकन सङ्ख्या बिजोर भएमा मध्यिका त्यस श्रेणीको बिचमा पर्छ भने अवलोकन सङ्ख्या जोर भएमा त्यस श्रेणीको बिचका दुई ओटा अवलोकनहरूको औसत मान नै मध्यिका हुन्छ । मध्यिका पनि मध्यक जस्तै बुझ्न र गणना गर्न सजिलो हुन्छ । मध्यिका तथ्याङ्कमा भएका ज्यादै ठूला र ज्यादै साना पदहरूबाट प्रभावित हुँदैन किनभने यसले पदहरूको मानलाई नभई स्थिती (Position) लाई महत्त्व दिन्छ । तसर्थ मध्यिकालाई कतिपय पदहरूको स्थितिजन्य औसत (Positional Average) पनि भन्दछन् ।

मध्यिकाका विशेषताहरू (Characteristics of Median)

१. मध्यिका बुझ्न र गणना गर्न सजिलो हुन्छ ।

२. मध्यिकामा तथ्याङ्कको सबैभन्दा ठुलो र सबैभन्दा सानो मानले कुनै प्रभाव पार्दैन ।

३. खुला वर्गान्तर भएको श्रेणीमा पनि उपयुक्त मध्यिका गणना गर्न सकिन्छ ।

४. कहिलेकाँही मध्यिकाले वास्तविक तथ्याङ्कलाई प्रतिनिधित्व गर्दैन ।

५. तथ्याङ्कहरू अपूर्ण हुँदा पनि मध्यिका गणना गर्न सकिन्छ ।

६. गुणात्मक तथ्यहरूको विश्लेषण गर्न पनि मध्यिका प्रयोग गर्न सकिन्छ ।

७. लेखाचित्रको माध्यमबाट पनि मध्यिका पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

८. मध्यिकालाई तथ्याङ्कशास्त्रका केही विधिहरूमा मात्र उपयोग गर्न सकिन्छ ।

मध्यिका निकाल्ने तरिका (Computation of Median):

(क) अवर्गीकृत तथ्याङ्कको मध्यिका निकाल्न निम्न प्रक्रिया अपनाउनुपर्दछ :

- दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो वा घट्दो क्रममा मिलाएर लेख्ने ।
- मध्यिका पर्ने स्थान पत्ता लगाउन निम्न सूत्र प्रयोग गर्ने : मध्यिका = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पद
- त्यसपछि अवलोकनहरू सुरुदेखि गन्दै गएर बिचको मान वा मानहरू पत्ता लगाउने । यदि अवलोकन सङ्ख्या बिजोर भएमा त्यस श्रेणीको बिचको मान नै मध्यिका हुन्छ भने जोर भएमा बिचका दुई अवलोकन सङ्ख्याको औसत मान मध्यिका हुन्छ ।

उदाहरण : 52, 50, 68, 56, 65, 61, 57, 70 **को मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।**

समाधान : यहाँ,

माथिको तथ्याङ्कहरूलाई सानो देखि ठुलोको क्रममा मिलाउँदा,

50, 52, 56, 57, 61, 65, 68, 70

अवलोकन पदहरूको सङ्ख्या (N) = 8

त्यसैले मध्यिका =$\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पदको मान

= $\left(\frac{8+1}{2}\right)$ औँ पद मान = 4.5 औँ पदमा पर्ने मान मध्यिका हो ।

माथिको तथ्याङ्कमा चौथो स्थानको मान 57 हो र पाँचौं स्थानको मान 61 हो । यदि 57 लाई मध्यिका मान्दा यसको दायाँतिर चार ओटा र बायाँतिर तिन ओटा सङ्ख्या पर्दछन् । यदि 61 लाई मध्यिका मान्दा यसको दाँयातिर तिन ओटा र बायाँतिर चार ओटा सङ्ख्या पर्दछन् । त्यसैले मध्यिकाको मान 57 र 61 को बिचमा पर्दछ । अर्थात् यसको मान 57 र 61 को औसत (average) $\frac{57+61}{2}$ =59 हुन्छ । तसर्थ मध्यिका (Median) 59 हो ।

यहाँ, 59 मान दिइएको श्रेणीमा नपर्न पनि सक्छ किनभने तथ्याङ्कमा यस्तो मान छैन । त्यसैले यो मध्यिकाको अड्कल (Approximation) मात्र हो यकिन नहुन पनि सक्दछ ।

ख. खण्डित तथ्याङ्कको मध्यिका निकाल्न निम्न प्रक्रिया अपनाउनु पर्दछ :

- सर्वप्रथम दिइएको वितरणको सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउने ।
- मध्यिका पर्ने स्थान पत्ता लगाउन निम्न सूत्र प्रयोग गर्ने : मध्यिका = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औँ पदको मान
  जहाँ N = $\sum f$ हुन्छ ।

- $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औं स्थानमा परेको सङ्ख्या थाहा पाउन सञ्चित बारम्बारता महलमा हेर्नुपर्दछ । सञ्चित बारम्बारता महलमा $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ बराबरको अङ्क नभएमा त्यसभन्दा माथिल्लो अङ्क हेर्नुपर्दछ । सो अङ्कसँग सम्बन्धित X को मान नै मध्यिका हुन्छ ।

उदाहरण : एउटा गाउँका अव्यवस्थित रूपमा सङ्कलन गरिएका 60 परिवारका केटाकेटीहरूको विवरण दिइएको छ । त्यसको मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

बालक सङ्ख्या (x)	0	1	2	3	4	5
परिवार सङ्ख्या (f)	4	10	25	15	5	1

समाधान : यहाँ,

दिइएको तथ्याङ्कको मध्यिका निकाल्न निम्नानुसार गर्नुपर्दछ ।

१. दिइएको तथ्याङ्कको सञ्चित बारम्बारता तालिका बनाउँदा,

बालक सङ्ख्या (x)	परिवार सङ्ख्या (f)	सञ्चित आवृत्ति (c.f.)
0	4	4
1	10	4+10=14
2	25	4+10+25=39
3	15	4+10+25+15=54
4	5	4+10+25+15+5=59
5	1	4+10+25+15+5+1=60
	N = 60	

२. यहाँ, N = 60 भएकोले मध्यिका पर्ने स्थान = $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ औं स्थानको मान

$= \left(\frac{60+1}{2}\right)$ औं स्थानको मान

= 30.5 औं स्थानको सङ्ख्या मध्यिका हुन्छ ।

३. सञ्चित बारम्बारता महलमा 30.5 भन्दा माथिल्लो अङ्क 39 छ र 39 सँग सम्बन्धित बालक सङ्ख्या 2 छ ।

त्यसैले मध्यिका = 2 हुन्छ । मध्यिका 2 को अर्थ, बालक 2 सङ्ख्या भन्दा तल र माथि 50% परिवार सङ्ख्या रहेछन् भन्ने हुन्छ ।

शिक्षण सिकाइमा मध्यिकाको उपयोगिता (Uses of Median in Teaching)

- व्यक्ति विशेषको प्राप्ताङ्कको
- क्रमिक स्थान पत्ता लगाउन
- व्यक्तिको Intelligence पत्ता लगाउन
- गुणात्मक तथ्याङ्कको अध्ययन गर्न
- विभिन्न शैक्षिक अध्ययन अनुसन्धान गर्न

रीत (Mode)

कक्षा ८ मा अध्ययनरत 15 जना विदयार्थीहरूलाई उनीहरूले प्रयोग गर्ने जुत्ताको नम्बर सोध्दै बोर्डमा टिप्दै गएँ । जसमा निम्नअनुसारको जुत्ता प्रयोग गरेको पाइयो :

5, 4, 4, 5, 5, 7, 6, 6, 4, 5, 5, 4, 6, 7, 5

अब, धेरै जनालाई मिल्ने जुत्ताको साइज कुन हो ? छलफल गरौँ । माथिको तथ्यहरूलाई सानो देखि ठुलोको क्रममा मिलाएर राख्दा,

{4, 4, 4, 4}	{5, 5, 5, 5, 5, 5}	{6, 6, 6}	{7, 7}
चार पटक	छ पटक	तिन पटक	दुई पटक

यहाँ, सबैभन्दा बढी प्रयोग भएको जुत्ताको साइज 5 हो, जुन छ पटक प्रयोग भएको छ । त्यसैले रीत 5 हुन्छ ।

रीत भन्नाले तथ्याङ्क वा आँकडा सङ्कलनको सिलसिलामा सबैभन्दा बढी दोहोरिने मान हो । कुनै पनि आवृत्ति वितरणमा सबैभन्दा बढी दोहोरिएर आउने अङ्कलाई रीत वा बहुलक (Mode) भनिन्छ । तसर्थ, तथ्याङ्कमा कुन पदको आवृत्ति बढी छ, त्यो नै रीत हुन्छ । उदाहरणको लागि 5, 6, 8, 5, 6, 10, 5, 6, 8, 5, 9, 7, 8, 11 मा 5 सबभन्दा धेरै दोहोरिएकाले रीत = 5 हुन्छ । व्यक्तिगत श्रेणीमा बढी दोहोरिएको मान नै रीत हुन्छ । कहिलेकाँही दिइएको तथ्याङ्कमा एकभन्दा बढी मानको आवृत्ति एउटै भयो भने रीत अनिश्चित हुने भएकाले सोभै त्यसको मान पत्ता लगाउन सकिँदैन । त्यसै गरी कुनै तथ्याङ्क दोहोरिएन भने पनि रीत निर्धारण गर्न सकिँदैन । एउटा मान सबैभन्दा बढी पटक दोहोरियो भने त्यसलाई एकल बहुलकीय (Unimodal) भनिन्छ । दुई ओटा मान बराबर पटक दोहोरिएमा द्विबहुलकीय (Bimodal) र दुईभन्दा बढी मानको दोहोरिएको आवृत्ति बराबर भएमा त्यसलाई बहुलकीय (Multimodal) भनिन्छ । एकल बहुलकीय नभएमा बहुलक अनिश्चित हुने भएकाले त्यस्तो अवस्थामा बहुलक गणना गर्न निम्न सूत्रको प्रयोग गरिन्छ ।

बहुलक (Mode): **= 3 मध्यिका** (Median): **- 2 मध्यक** (Mean)

or, $Mo = 3Md - 2\bar{x}$

रीत वा बहुलकका विशेषताहरू (Characteristics of Mode)

१. रीत सरल र सजिलै बुझ्न सकिने हुन्छ ।

२. कतिपय अवस्थामा रीतलाई निरीक्षणबाट पनि निर्धारण गर्न सकिन्छ ।

३. सबै तथ्याङ्क नहुँदा पनि रीतको गणना गर्न सकिन्छ ।

४. रीतको मान श्रेणीका सबै पदमा आधारित हुँदैन ।

५. विभिन्न विधिबाट रीतको मान फरक फरक आउन सक्छ ।

६. कतिपय अवस्थामा रीत अनिश्चित हुन्छ ।

७. लेखाचित्रको माध्यमबाट रीत पत्ता लगाउन सकिन्छ ।

८. पदहरूको सङ्ख्या थोरै भएमा रीतले श्रेणीको प्रतिनिधित्व गर्दैन ।

उदाहरण: कक्षा ७ मा अध्ययनरत 40 **जना विद्यार्थीको उमेर दिइएको छ । यसको रीत पत्ता लगाउनुहोस ।**

उमेर (वर्ष)	11	12	13	14	15
विद्यार्थी सङ्ख्या	4	8	15	11	2

समाधान : यहाँ,

सबैभन्दा बढी दोहोरिएको उमेर 13 हो । अर्थात, धेरै विद्यार्थीहरू (15जना) भएको उमेर 13 हो । त्यसैले, रीत 13 हो ।

नोट : केन्द्रीय प्रवृत्तिको नापअन्तर्गत अविछिन्न श्रेणीको मध्यक, मध्यिका र रीत पत्ता लगाउन विधि माथिल्लो कक्षामा अध्यापन गराइन्छ ।

फैलावट वा विचलनको मापन (Measures of Dispersion)

केन्द्रीय प्रवृत्तिको नापले श्रेणीको औसत मानलाई मात्र जनाउँदछ । तर उक्त मानले श्रेणीका विभिन्न पदहरूमा भएको भिन्नता वा फरकलाई देखाउन सक्दैन । तसर्थ उक्त भिन्नता वा फरकलाई देखाउन विचलन वा फैलावटको मापन गरिन्छ । यसरी श्रेणीका विभिन्न पदहरू मध्यकबाट कति टाढा छन्, कति ठुला वा साना छन् र एकआपसमा कति सम्बन्धित छन् भनी हेर्नका लागि गरिने मापनलाई विचलन वा फैलावटको मापन (Measures of Dispersion) भनिन्छ । विचलन वा फैलावटको मापनको अर्थ स्पष्ट पार्न तलको उदाहरण हेरौं ।

नाम	गणित	विज्ञान	अङ्ग्रेजी	सामाजिक	नेपाली	कम्प्युटर	जम्मा	मध्यक
अनिश	४५	४५	४५	४५	४५	४५	२७०	**४५**
डोल्मा	३०	३०	६०	४०	६०	५०	२७०	**४५**
रविना	१०	४०	५०	२०	७०	९०	२७०	**४५**

माथिको तालिकामा तिनै जना विद्यार्थीको ६ ओटा विषयहरूको प्राप्ताङ्कको मध्यक वा औसत अङ्क ४५ छ। त्यसको अर्थ सबै विद्यार्थीहरूको प्राप्ताङ्कहरूमा औसत अङ्कले समान प्रतिनिधित्व गर्दैन। अनिशको प्राप्ताङ्कमा औसत र अन्य प्राप्ताङ्कहरू बराबरी छ। यस्तो अवस्थामा औसतले पूर्ण प्रतिनिधित्व गर्दछ। त्यस्तै गरी डोल्मा र रविनाको प्राप्ताङ्कहरूमा औसत अङ्क र अन्य प्राप्ताङ्कहरू बिचमा ठुलो भिन्नता देखिन्छ। यस्तो भिन्नतालाई औसतले मापन गर्दैन। तसर्थ, तथ्याङ्कका विभिन्न एकाइहरूमा हुने भिन्नता अध्ययन वा मापन गर्न विचलन वा फैलावटको मापन गरिन्छ। तथ्याङ्कको विचलन वा फैलावटलाई मापन गर्ने तरिकाहरू निम्नअनुसार छन्।

- विस्तार (Range)
- चतुर्थांशीय भिन्नता (Quartile Deviation)
- मध्यक भिन्नता (Mean Deviation)
- स्तरीय भिन्नता (Standard Deviation)

विस्तार (Range)

विस्तार सबैभन्दा सजिलो किसिमको विचलन मापन गर्ने विधि हो। कुनै पनि तथ्याङ्कको वितरणमा भएको सबैभन्दा ठुलो पद र सबैभन्दा सानो पदको फरकलाई विस्तार (Range) भनिन्छ। यसले दिइएको तथ्याङ्कको फैलावट कति छ भनेर देखाउँछ। दिइएको तथ्याङ्कको विस्तार निकाल्दा बारम्बारताले केही असर गर्दैन वा बारम्बारता हेरिँदैन। जस्तै : नेपालका निजामती कर्मचारीहरूको मासिक तलब यस प्रकारका छन् :

7500, 6500, 25000, 25000, 12500, 31000, 15000, 45000

यसमा अधिकतम तलब रु.45,000 र न्यूनतम तलब रु.6,500 बीचको अन्तर (फरक) रु.38,500

हुन्छ। अर्थात, रु.45,000 - रु.6,500 = रु.38,500 तसर्थ, यस तथ्याङ्कको विस्तार पनि रु.38,500 हुन्छ। यसलाई सूत्रका रूपमा निम्नअनुसार राख्न सकिन्छ :

विस्तार (Range) = L - S

यहाँ L = सबैभन्दा ठुलो पद (Largest Item)

S = सबैभन्दा सानो पद (Smallest Item)

विस्तारको उपयोगिता वा प्रयोग (Uses or Implications of Range)

- कुनै पनि तथ्याङ्कको उच्चतम र न्यूनतम मान पत्ता लगाउन
- तथ्याङ्कको उच्चतम र न्यूनतम मान बीचको फरक पत्ता लगाउन
- प्राप्त फरकको आधारमा तथ्याङ्कको फैलावट निकाल्न
- विभिन्न अध्ययन तथा अनुसन्धान गर्न
- प्रशासनिक प्रयोजनको लागि

- दुई वा दुईभन्दा बढी तथ्याङ्कको तुलनात्मक अध्ययन गर्न

उदाहरणः दिइएको तथ्याङ्कबाट विस्तार पत्ता लगाउनुहोस ।

प्राप्ताङ्क	40	50	60	70	80	90
विद्यार्थी सङ्ख्या	5	8	3	5	7	4

समाधान : यहाँ,

सबैभन्दा ठुलो पद (L) = 90

सबैभन्दा सानो पद (S) = 40

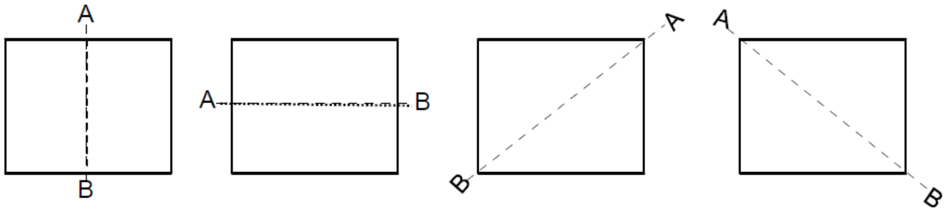
अब, विस्तार (Range) = L - S = 90 – 40

= 50 तसर्थ, उक्त तथ्याङ्कको विस्तार 50 हुन्छ ।

नोट : विचलनको मापनअन्तर्गत चतुर्थांशीय भिन्नता, मध्यक भिन्नता र स्तरीय भिन्नता सम्बन्धी विषयवस्तु माथिल्लो कक्षामा अध्यापन गराइन्छ ।

१२. सममिति र टेसेलेसन (Symmetry and Tessellations)

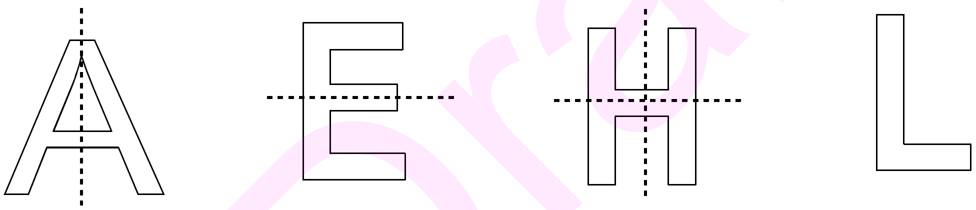
रेखीय सममिति (Line Symmetry)



माथिका चित्रहरूमा प्रत्येक वर्गाकार कागजका टुक्राहरूलाई रेखा AB बाट दुई बरावर भागमा पट्याउन सकिन्छ । सममिति (summetry) भनिन्छ । यसरी यदि कुनै पनि चित्र वा ज्यामितीय आकृति वा अक्षर (letter) लाई दुई कुनै रेखामा पट्याउँदा बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ भने त्यस्ता चित्रलाई सममितीय चित्रहरू भनिन्छ र त्यो आकृतिमा रेखीय सममिति छ भन्न सकिन्छ । यहाँ वस्तुलाई पट्याउँदा जुन रेखामा पट्याइन्छ त्यो रेखालाई सममितिको अक्ष भनिन्छ ।

अथवा

ज्यामितीय आकृतिलाई एउटा रेखामा परावर्तन गर्दा वस्तु र प्रतिबिम्व उही रहन्छ भने त्यो आकृतिलाई त्यो परावर्तनको अक्षमा सममिति भएको आकृति भनिन्छ । अर्थात् परावर्तनको अक्षले वस्तुलाई प्रतिबिम्व र आकृति गरी दुई बराबर भाग लगाउँछ भने त्यो वस्तुमा रेखीय सममितिछ भनिन्छ । जस्तैः



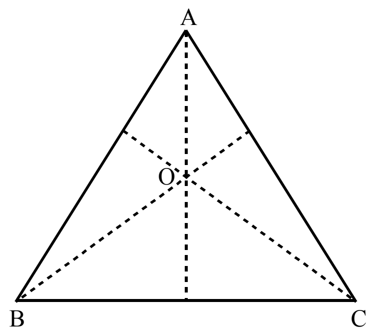
चित्र (i) चित्र (ii) चित्र (iii) चित्र (iv)

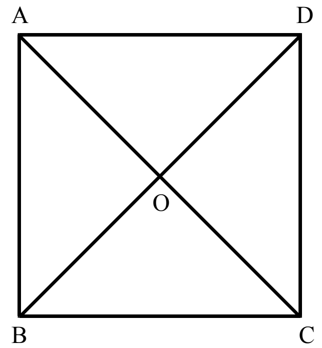
माथिका चित्र (i), (ii) र (iii) लाई दुई बराबर भागमा पट्याउन सकिन्छ । त्यसैले तिनीहरू सममितीय चित्रहरू हुन् । तर चित्र (iv) मा बरावर दुई भागमा पट्याउन (fold) गर्न सकिँदैन । त्यसैले चित्र (iv) सममितीय चित्र होइन वा यसको सममिती अक्ष छैन तर माथिको वर्गाकार आकृतिको चार ओटा सममितिको अक्षहरू छन् । त्यसैले ज्यामितीय आकृतिको एकभन्दा बढी सममितिका अक्षहरू हुन सक्दछन् ।

परिक्रमण सममिति (Rotational Symmetry)

यस प्रकारको सममितिमा कुनै वस्तु वा ज्यामितीय चित्रहरूलाई एउटा निश्चित बिन्दुमा परिक्रमण गरिन्छ र त्यसरी परिक्रण गर्दा पनि उक्त वस्तु वा चित्र उस्तै रहन्छ ।

जस्तैः





माथिको समबाहु त्रिभुजमा शीर्ष बिन्दुबाट खिचिएका लम्बहरू 120° मा काटिन्छन् र यी लम्ब काटिएको बिन्दुमा 120° को परिक्रमण गर्दा त्रिभुज पहिलेको स्थितिमा आउँदछ र एक पूर्ण परिक्रमणमा यस्तो स्थिति घ पटक आउँदछ । त्यसैले समबाहु त्रिभुजमा क्रम – 3 (order – 3) को परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

त्यस्तैगरी दोस्रो चित्र वर्गमा क्रम – 4 (order – 4) को परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

यदि θ कोणमा परिक्रमण गर्दा ज्यामितीय आकृति परिहलेको स्थितिमा आउँदछ भने त्यो आकृतिमा $\frac{360°}{q}$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

जस्तैः समबाहु त्रिभुजका लागि $\frac{360°}{120°} = 3$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

वर्गका लागि $\frac{360°}{90°} = 4$ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।

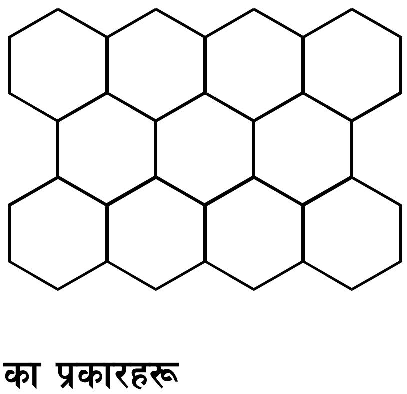
तसर्थ, यदि ज्यामितीय आकृतिभित्र परेको बिन्दुको वरिपरि दिएको कोण (180° < □) मा परिक्रमण गराउँदा आकृति र प्रतिबिम्ब एउटै हुन्छ भने त्यो ज्यामितीय आकृतिमा

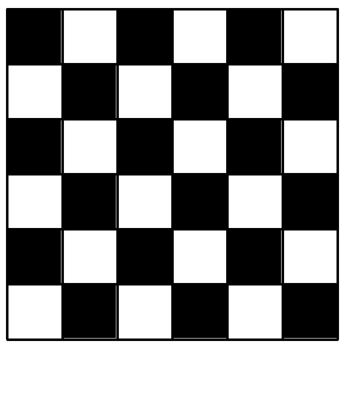
$$h = \frac{360°}{q} \text{ क्रमको परिक्रमिक सममिति हुन्छ ।}$$

टेसिलेसन (Tessellation)

एउटा अनन्त समतल सतहलाई खाली ठाउँ नछरिकन अनुरूप टायलहरूले एकआपसमा टायल नखपटिने गरी छाप्ने प्रक्रियालाई टेसिलेसन (Tessellation) भनिन्छ ।

गणितको सुन्दरताको रूप (Beauty of Mathematics) मा नियमित र अनियमति बहुभुजहरूलाई निश्चित ढाँचाको रूपमा प्रस्तुत गरिएको हुन्छ । जसलाई हामी Tessellation भन्दछौं । Tessellation लाई विभिन्न डिजाइनहरूमा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

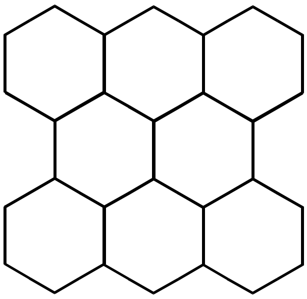
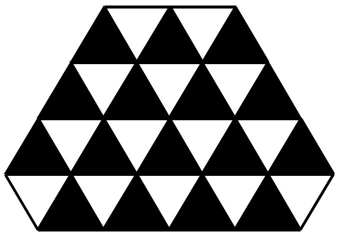
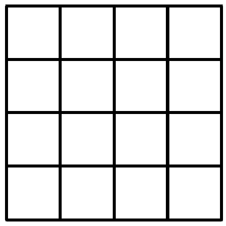




Tessellation का प्रकारहरू

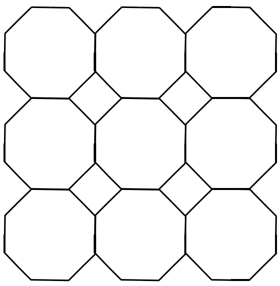
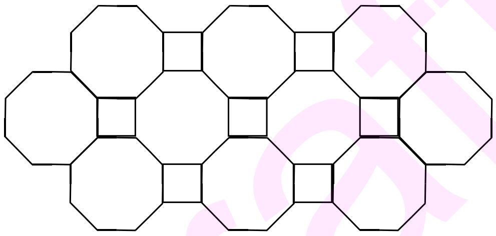
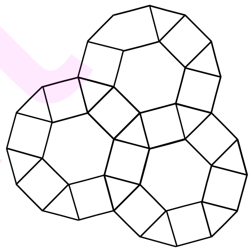
१. **नियमित टेसिलेसन** (Regular Tessellation)

एकै प्रकारका नियमित बहुभुजबाट बनेका टेसिलेसनलाई नियमित tessellation भनिन्छ ।
उदाहरणका लागि तल दिइएको वर्गबाट बनेको टेसिलेसन नियमित tessellation हो ।

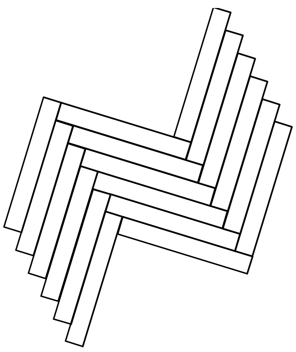
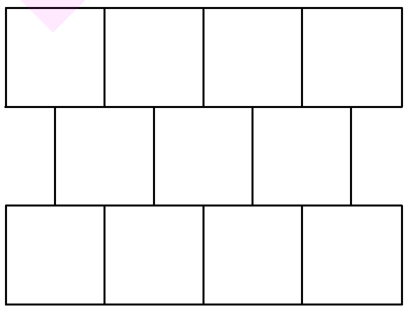
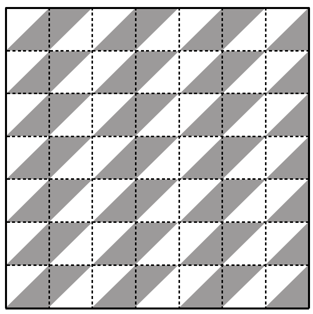
२. **अर्धनियमित टेसिलेसन** (Semi-regular Tessellation)

दुई वा दुईभन्दा बढी बहुभुजबाट बनेका टसिलेसनलाई अर्धनियमित tessellation भनिन्छ । तलको चित्रमा समषष्टभुज समबाहु त्रिभुज र वर्गबाट बनेको टेसिलेसन अर्धनियमित tessellation हो ।

३. **अनियमित टेसिलेसन** (Irregular Tessellation)

अनियमित बहुभुज वा वक्र वक्षकृतिबाट बनेका टेलिसेलनहरू अनियमित टेसिलेसनहरू हुन् । तल चित्रमा समानान्तर चतुर्भुजबाट बनेका तथा वक्रभन्दा कृतिबाट बनेका टेसिलेसनहरू अनियमित टेसिलेसनका उदाहरणहरू हुन् ।

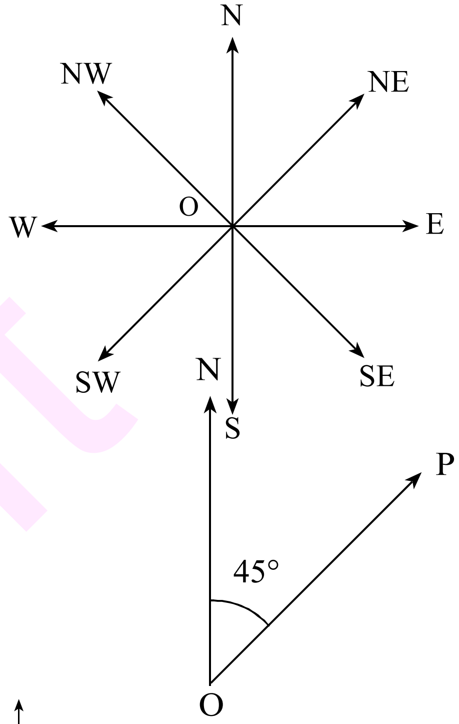
सममिति (Symmetry) **र टेसिलेसन** (Tessellation) **का लागि चाहिने शैक्षिक सामग्रीहरू**

सेतो कागज, कैँची, कार्डबोर्डमा बनेका विभिन्न ज्यामितीय आकृति तथा अङ्ग्रेजी वर्णमालाका अक्षरहरू, ट्रेसिङ पपेर, पेन्सिल, रुलर, कम्पास, प्रोटेक्टर

१३. दिसास्थिति र स्केलड्रइङ (Bearing and Scale Drawing)

दिसास्थिति (Bearing)

उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानी घडीको सुईको दिशामा कुनै दुई स्थानबिचको दुरीलाई मापन गरी तिन अङ्कको कोणको रूपमा प्रस्तुत गर्ने तरिकालाई दिसास्थिति (Bearing) भनिन्छ । दिसास्थिति (Bearing) लाई कम्पास दिसास्थिति (compass bearing) पनि भनिन्छ । यसलाई कम्पासबाट खिचिएको तलको विभिन्न दिसाहरूमा देखाउन सकिन्छ ।



दिसास्थिति पत्ता लगाउन निम्न लिखित तिन ओटा कुरा जान्नुपर्छ :

(क) उत्तर दिसालाई आधार रेखा मान्ने

(ख) घडीको सुईको दिसामा नाप्ने

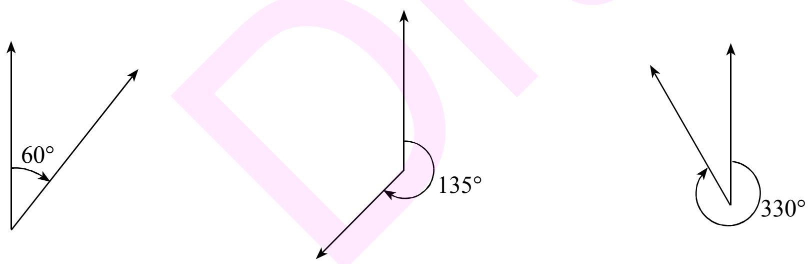
(ग) मापन तिन अङ्कमा प्रस्तुत गर्ने

जस्तै :

O बाट P सम्मको दिसास्थिति पत्ता लगाउन उत्तर रेखा जनाउने रेखा ON लाई आधार मानी घडीको सुई घुम्ने दिसाको कोण $\angle NOP = 45°$ छ ।

त्यसैले O बाट P सम्मको दिसास्थिति 045° हुन्छ ।

अन्य उदाहरणहरू पनि हेरौँ ।



060° को दिसास्थिति   135° को दिसास्थिति   330° को दिसास्थिति

स्केलड्रइङ (Scale Drawing)

यदि कुने दुई ठाउँबीचको दुरीलाई कापीमा कोरेर देखाउन सम्भव हुँदैन वा गाह्रो हुन्छ भने त्यस्तो बेला हामीले उक्त दुरीलाई विभिन्न एकाइहरू जस्तैः मिटर (m), किलोमिटर (km), माइल (mile) आदिमा नापिन्छ र वास्तविक दुरी पत्ता लगाइन्छ ।

यसरी वास्तविक दुरीलाई नक्सामा प्रस्तुत गर्न सम्भव पार्ने खालको मापनको तरिकालाई नै scale drawing भनिन्छ ।

Scale drawing को माध्यमबाट लामो दुरी वा ठुलो क्षेत्र ओगटेको वस्तुलाई नक्सामा एउटै पेजमा अटाउन सकिन्छ ।

उदाहरण - 1M यदि कुनै दुई स्थानहरू A र B बिचको दुरी 120 km छ भने 15 km = 1 cm स्केल प्रयोग गरी उक्त दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी कति हुन्छ ?

उत्तर:

15 km = 1 cm लिँदा,

$120 \text{ km} = \frac{120}{15} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$

$\therefore$ AB = 8 cm

उदाहरण - 2: 1 cm = 400 m स्केल प्रयोग गरी एउटा नक्सा तयार गर्दा दुई स्थानबिचको नक्साको दुरी 4 cm भए उक्त दुई स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

उत्तर :

यहाँ, स्केल 1 cm = 400 m लिँदा,

$4 \text{ cm} = 4 \times 400 \text{ m} = 1600 \text{ m}$

$\therefore$ उक्त दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी = 1600 m

Scale drawing **र** Bearing **शिक्षण का लागि चाहिने शैक्षिक सामग्रीहरू**

प्रोट्याक्टर, स्केल र नक्साहरू, कम्पासबाट देखिने दिशाहरूलाई रेखाङ्कन गरिएको चार्ट

सन्दर्भ ग्रन्थसूची (References)

1. आधारभूत तह गणित पाठ्यक्रम (कक्षा ६, ७ र ८), पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, सानोठिमी भक्तपुर ।
2. गणित पाठ्यपुस्तक (कक्षा ६, ७ र ८), पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, सानोठिमी भक्तपुर ।
3. गणित शिक्षक निर्देशिका (कक्षा ६, ७ र ८), पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, सानोठिमी भक्तपुर ।
4. हीरा बहादुर महर्जन, लेखनाथ पौडेल, हरिनारायण उपाध्याय, माध्यमिक गणित शिक्षण, बुद्ध प्रकाशन, काठमाडौं ।
5. रामजी प्रसाद पण्डित, प्रारम्भिक गणित शिक्षण, अनन्त प्रकाशन, काठमाडौं ।
6. गणित शिक्षण विधि, मोहम्मद हुमेदुर रहमान, विद्यार्थी प्रकाशन तथा वितरक, वाराणसी ।
7. गणित शिक्षण स्वअध्ययन सामग्री, शैक्षिक जनशक्ति विकास केन्द्र, सानोठिमी, भक्तपुर ।
8. Mathematics Education Forums, Council for Mathemaics Education, Kathmandu.
9. Azaya Bikram Sthapit, Rashindra Prasad Yadav, Shankar Prasad Khanal, Business Statistics, Asmita Publication, Kathmandu.
10. Mathematics Education Voice, Council For Mathematics Educaion, Gorkha.
11. शैक्षिक तालिक केन्द्र गारखाबाट प्रकाशित TPD प्याकेज ।
12. D.R. Simkhadha, Links Mathematics Grade 6, 7 and 8, Allied Publication, Kathmandu.
13. एम.बी. नेपाली, बि, आर. कोइराला, गिनिज प्रकाशन, काठमाडौं ।
14. राजेन्द्र कुँवर, पाठ्यक्रम र मूल्याङ्कन अक्सफोर्ड इन्टरनेशनल प्रकाशन, काठमाडौं ।
15. बुडाथोकी र सुरेन्द्रराम, गणित शिक्षाको आधार, क्षितिज प्रकाशन, काठमाडौं ।
16. Consult of internet and Journels.
17. Teaching mathematics in secondary school, Ratna pustak bhandar,bhotahiti, kathmandu, Hira bahadur maharjan, Hari narayan upadhaya, Lekhnath paudel
18. Essential mathematics – grade 6, 7,8,9, MK publication, prof. dr. B.C. bajracharya
19. Mathematics textbook for class 6,7,8,9, National council of education research and trainning
20. Mathematics for school teacher, Heritage publication, Ramjee Prasad Pandit
21. The quality mathematics for class 6,7,8,9, Buddha publication, prof. Dr. Prakash Muni Bajracharya
22. Math plus for class 6,7,8,9, Ekta Publication, prof. Dr. H.B. Shrestha
23. Easy mathematics for class 6,7,8,9, Asmita publication, prof. Dr. A.K. chaudhary
24. Secondary mathematics for class 6,7,8,9, arya publication, R.G. Gupta,P.K. Garg, C.S. Sarna
25. Mathematics for class6,7,8,9, FK publication, Prof. Vinod Tyagi
26. References

27. Aichele, D. B. and Reys, R. E., Editors (1997). The reading in secondary school mathematics (2nd Edition), USA: Prindle, Weber and Schmist Inc.
28. Bell, F. H. (1978). Teaching and learning mathematics in secondary schools, USA: Brown Company Publishers.
29. Boyer, C. B. (1999). A history of mathematics. New York: John Wiley and Sons Inc.
30. Eves, H. (1961). An introduction to the history of mathematics. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.
31. Pandit, R. P. (2007). Foundation of Mathematics Education. Kathmandu: Indira Pandit.
32. CDC. Grade VI Mathematics
33. CDC. Grade VII Mathematics
34. CDC. Grade VIII Mathematics